

面向21世纪本科生教材

# 线性空间

## 引论

叶明训 郑延履 陈恭亮 编著

修订版



全国优秀出版社  
武汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

# 线性空间

叶明训 郑延履 陈恭亮 编著

修订版

引论

全国优秀出版社  
武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

线性空间引论/叶明训,郑延履,陈恭亮编著.—3版.—武汉:  
武汉大学出版社,2002.2  
面向21世纪本科生教材  
ISBN 7-307-03454-9

I. 线… II. ①叶… ②郑… ③陈… III. 线性空间—理论  
IV. O177.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第096079号

责任编辑:顾素萍 责任校对:李桂珍 版式设计:支 笛

---

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp1@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

发行:新华书店湖北发行所

印刷:湖北民政印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:12.25 字数:313千字

版次:1990年7月第1版 2002年2月第3版

2002年2月第3版第1次印刷

ISBN 7-307-03454-9/O·253 定价:18.00元

---

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,  
请与当地图书销售部门联系调换。

## 内 容 提 要

全书共九章。前两章由群、环、域介绍线性空间的基本理论,并利用它在第三、五章和 § 4.6 讨论矩阵运算、矩阵相似和线性方程组;第四章用交错的多重线性型来讨论行列式;第九章再深入讨论交错多重线性型的一般理论;第六章讲对偶空间后,第七章讲对称的双线性型,并讨论二次齐式、欧氏空间等,第八章则讲类似的埃米特型。

这是一本以线性空间与线性变换为理论基础的线性代数教材,写法力求方便于教学和自学,适用于综合大学、师范院校数学系,也可以作其他院校线性代数课程的参考书。

## 序 言

线性代数是线性空间与线性变换的理论，我们用这个观点来阐述全书的内容。介绍集合、映射和基本代数结构后，线性空间和线性变换看做带算加群和带算同态。解线性方程组归结成求线性变换为核子空间。矩阵运算性质由线性变换推出；求矩阵的相似对角块型，实质是把线性空间分解成不变子空间的直和。线性泛函是一类特殊的线性变换，对偶空间则是讨论多重线性型的基础。二次齐式和欧氏空间都包含在对称双线性型的内容中，行列式也包含在多重交错线性型的内容中。多重交错线性型的深入讨论，又利用了张量代数和外代数的基本知识。

在上述教材体系下，我们还注意以下几点：交代概念和问题的背景，再抽象到“公理化”的讨论；较现行教材内容有所增减，又保证教学大纲的基本要求；分析和解决问题的思想方法在进化，基本运算能力和解题技巧要保持；大量的例题和习题，使讲课与作业相配合。这个教材，可用于综合大学和师范院校数学系，也可以作其他读者的参考。

1980年至1986年，在武汉大学《中法数学试验班》的线性代数教学中，采用法国的教材和参考书。在教学中，我们吸取这些书籍的大框架，结合中国的具体情况，组织教学内容，自编成讲义，从1986年以来又使用了五次。边使用，边修改，还参考了一些中、美的教材，写成现在的这个本子。成书过程中，得到许多师长和同事的指导和帮助，谨致谢意。

水平所限，错误难免，抛砖引玉，力求更新教学内容。

作 者

## 再版前言

这个教材初版于1990年，此后在武汉大学数学基地班使用了六次。吸收各位任课教师的具体意见，又作了较多的增添和修改，成为现在的这个本子。再版主要的改动在：

1. 保持初版的体系和大框架，把线性代数作为线性空间和线性变换的理论。同时，不拘泥于统一的模式，适时地增加了矩阵运算的许多方法和技巧，例如分块矩阵和初等变换等，以便更灵活地讨论问题。

2. 增加了例题和习题的类型和份量，例题所占的篇幅大约可达全书之半。力求精讲多练，使基本理论与解题有较紧密的配合。

3. 对全书的习题，除特别简单的，都作了一个提示性的解答，帮助初学者澄清思路，不能代替学生的作业。

作 者

2000年2月

# 目 录

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 第一章 代数系         | 1   |
| § 1.1 集合        | 1   |
| § 1.2 映射        | 5   |
| § 1.3 等价关系      | 13  |
| § 1.4 代数系       | 18  |
| § 1.5 群和子群      | 32  |
| § 1.6 环和域       | 41  |
| 第二章 线性空间与线性变换   | 48  |
| § 2.1 线性空间      | 48  |
| § 2.2 线性变换      | 55  |
| § 2.3 直和        | 60  |
| § 2.4 基底        | 67  |
| § 2.5 维数        | 77  |
| § 2.6 线性算子代数    | 87  |
| 第三章 矩阵运算        | 98  |
| § 3.1 矩阵空间和矩阵代数 | 98  |
| § 3.2 矩阵的秩      | 116 |
| § 3.3 初等变换      | 122 |
| § 3.4 等价矩阵      | 131 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| <b>第四章 行列式和线性方程组</b> | 145 |
| § 4.1 多重线性型          | 145 |
| § 4.2 方阵的行列式         | 152 |
| § 4.3 行列式的性质         | 159 |
| § 4.4 行列式展开          | 172 |
| § 4.5 矩阵的秩           | 187 |
| § 4.6 线性方程组          | 191 |
| <b>第五章 矩阵的相似</b>     | 209 |
| § 5.1 特征根与特征向量       | 209 |
| § 5.2 与对角型矩阵相似的矩阵    | 221 |
| § 5.3 矩阵的相似对角块型      | 229 |
| <b>第六章 对偶空间</b>      | 240 |
| § 6.1 对偶空间和对偶基底      | 240 |
| § 6.2 正交             | 247 |
| § 6.3 转置变换           | 252 |
| <b>第七章 对称双线性型</b>    | 259 |
| § 7.1 双线性型与二次型       | 259 |
| § 7.2 正交基底           | 269 |
| § 7.3 实二次齐式          | 280 |
| § 7.4 欧氏空间           | 290 |
| § 7.5 正交子空间          | 295 |
| § 7.6 伴随变换           | 300 |
| § 7.7 正交变换           | 309 |
| <b>第八章 埃米特型</b>      | 317 |
| § 8.1 埃米特型           | 317 |



|            |                      |            |
|------------|----------------------|------------|
| § 8.2      | 正交基底 .....           | 320        |
| § 8.3      | 伴随变换 .....           | 326        |
| § 8.4      | 酉变换 .....            | 330        |
| § 8.5      | 埃米特变换 .....          | 332        |
| <b>第九章</b> | <b>多重交错线性型</b> ..... | <b>339</b> |
| § 9.1      | 线性型的外积 .....         | 339        |
| § 9.2      | 多重交错线性型 .....        | 344        |
| § 9.3      | 多重交错线性型的外积 .....     | 350        |
| § 9.4      | 交错双线性型 .....         | 354        |
|            | <b>习题提示</b> .....    | <b>360</b> |

# 第一章 代 数 系

集合论的语言和方法,已经深入到数学理论的各个分支,也是代数方面课程的重要基础.为了给这本书各章作准备,在这一章里首先介绍集合论的一些基本概念,然后在集合内引入运算,讲几种常用的代数系.主要讲 5 个问题:(1) 集合与元素;(2) 映射;(3) 等价关系和等价分类;(4) 运算与代数系;(5) 群、环、域.

## § 1.1 集 合

在讨论一个数学问题的时候,我们常常把一些讨论的对象作为一个整体来看待,以便确定这些对象的共同性质和相互关系.在一个问题中,这些讨论对象的全体作为一个整体,叫做**集合**;其中的每一个对象叫做集合的**元素**,简称为**元**.

例如:所有的自然数组成一个集合,叫做自然数集,记成  $N$ ;所有的整数组成一个集合,叫做整数集,记成  $Z$ ;此外,类似的还有有理数集  $Q$ 、实数集  $R$ 、复数集  $C$  等.

值得注意的,集合不一定是数集,元素不一定是数.例如:一个平面上的所有点组成一个集合;直观空间内的所有直线也组成一个集合;一台计算机内,所有的集成电路元件也组成一个集合.集合的例子,是不胜枚举的.

集合有两种表示方法,一种是列举元素来表示集合.如集合

$$E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

是 30 的所有正约数组成的集合,它的元素可以列举无遗.又例如:

$$\{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

$\mathbf{N}$  和  $\mathbf{Z}$  等, 它们的元素不可能列举无遗, 只好辅以省略号. 集合的另一种表示方法, 是指出集合内元素所具有的公共性质. 例如:  $x \in \mathbf{N}$  表示  $x$  是  $\mathbf{N}$  的元时, 前面的  $E$  又可以表示成

$$\{x | x \in \mathbf{N}, x | 30\}.$$

又例如: 平面上以原点为圆心、以 1 为半径的圆上所有点, 组成一个集合  $F$ , 它可以表示成

$$\{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

同样, 奇数集、偶数集可以分别表示成

$$\{2x+1 | x \in \mathbf{Z}\}, \quad \{2x | x \in \mathbf{Z}\}.$$

为了今后叙述的方便, 我们约定: 不包含任何元素也组成一个集合, 叫做空集, 记成  $\emptyset$ . 譬如说,

$$\{x | x \in \mathbf{Z}, 3 < x < 4\}$$

就是空集. 我们还约定: 集合不包含相同的元素. 也就是说, 集合是不同元素的全体. 当元素的个数有限时, 这个集合叫有限集, 否则叫无限集.

如果  $x$  是集合  $E$  的元素, 就称  $x$  属于  $E$ , 记成  $x \in E$ , 像上面已经用过的记号; 否则, 称  $x$  不属于  $E$ , 记成  $x \notin E$ .

假设  $E, F$  是两个集合. 如果  $E$  的任何元素都属于  $F$ , 即任意  $x \in E$  时都有  $x \in F$ , 就称  $E$  是  $F$  的子集合, 记成  $E \subseteq F$ , 读成  $F$  包含  $E$ , 或  $E$  包含在  $F$  内. 如果  $E \subseteq F$  但是  $E \neq F$ , 就称  $F$  真包含  $E$ , 记成  $E \subset F$ . 譬如说,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

假设  $E, F$  是两个集合,  $E \subseteq F$  而且  $F \subseteq E$ , 就称  $E$  与  $F$  相等, 记成  $E = F$ .

假设  $E, F$  是两个集合. 那么,  $E$  与  $F$  的公共元素的全体, 组成一个新的集合, 叫做  $E$  和  $F$  的交集, 记成  $E \cap F$ . 这就是说,

$$E \cap F = \{x | x \in E, x \in F\}.$$

另外,  $E$  的所有元素及  $F$  的所有元素的全体, 也组成一个新的集合, 叫做  $E$  和  $F$  的并集, 记成  $E \cup F$ . 这就是说,

$$E \cup F = \{x | x \in E, \text{ 或 } x \in F\}.$$

最后,属于  $F$  但不属于  $E$  的所有元素的全体,也组成一个新的集合,叫做  $F$  对于  $E$  的差集,记成  $F - E$ . 这就是说,

$$F - E = \{x | x \in F, x \notin E\}.$$

譬如说,  $E = \{1, 2, 3\}$ ,  $F = \{2, 3, 4\}$ ,  $G = \{1, 2\}$  时,就有

$$E \cap F = \{2, 3\},$$

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$E - F = \{1\},$$

$$E - G = \{3\},$$

$$G - E = \emptyset.$$

像初等数学的运算一样,集合的交集、并集、差集也有一些类似的性质.

**性质 1** 假设  $E, F, G$  是 3 个集合. 那么有

$$1) \text{ 交换律: } E \cap F = F \cap E, E \cup F = F \cup E;$$

$$2) \text{ 结合律: } (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G),$$

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G);$$

$$3) \text{ 分配律: } E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G),$$

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

**证** 性质 1 的这些命题,证明方法都是一样的. 我们只就分配律的第一个命题来证明,其余留给读者做练习.

对于任意  $x \in E \cap (F \cup G)$ , 有  $x \in E$  同时  $x \in F \cup G$ . 也就是说,  $x \in E$  同时  $x \in F$ , 或者  $x \in E$  同时  $x \in G$ . 即  $x \in E \cap F$ , 或  $x \in E \cap G$ . 总之,  $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$ . 这就证明了

$$E \cap (F \cup G) \subseteq (E \cap F) \cup (E \cap G). \quad (1)$$

反过来,显然  $E \cap F \subseteq F, E \cap G \subseteq G$ . 因此,

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq F \cup G. \quad (2)$$

同理可证

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cup E = E. \quad (3)$$

由(2),(3)两式就得到

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cap (F \cup G). \quad (4)$$

由(1),(4)说明,分配律的第一个命题成立.

**性质 2** 假设  $A, B, E$  是 3 个集合. 那么有

$$1) E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B);$$

$$2) E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B).$$

**证** 先来证明第一个命题.

对于任意  $x \in E - (A \cup B)$ , 有  $x \in E$  但  $x \notin A \cup B$ . 也就是说,

$$x \in E, x \notin A, x \notin B.$$

所以  $x \in E - A, x \in E - B$ . 因而  $x \in (E - A) \cap (E - B)$ . 这就证明了

$$E - (A \cup B) \subseteq (E - A) \cap (E - B). \quad (5)$$

反过来, 对于任意  $x \in (E - A) \cap (E - B)$ , 有  $x \in E - A$  和  $x \in E - B$ . 也就是说,  $x \in E$  但  $x \notin A, x \notin B$ . 即是说  $x \in E$  但  $x \notin A \cup B$ . 所以,  $x \in E - (A \cup B)$ . 这就证明了

$$(E - A) \cap (E - B) \subseteq E - (A \cup B). \quad (6)$$

(5),(6)两式说明 1) 成立.

利用 1), 又得到

$$\begin{aligned} E - [(E - A) \cup (E - B)] &= [E - (E - A)] \cap [E - (E - B)] \\ &= E \cap A \cap B. \end{aligned}$$

再由差集的定义, 不难得到

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B).$$

这就证明了 2).

最后, 我们来介绍集合的直积, 它是由若干个集合导出的一个新的集合.

假设  $E, F$  是两个集合. 由  $x \in E, y \in F$  作一个有顺序的元素对  $(x, y)$ . 当取遍  $E, F$  的元素时, 所有这样的元素对的全体, 组成一个新的集合, 叫做  $E$  与  $F$  的直积, 记成  $E \times F$ . 这就是说,

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}.$$

用同样的方法, 可以定义  $n$  个集合  $E_1, \dots, E_n$  的直积

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in E_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

特别地,  $E_1 = \cdots = E_n = E$  时, 记  $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$ , 即

$$E^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in E, i = 1, \cdots, n\}.$$

在几何内有许多集合直积的实例, 平面上的点的集合可以看成两个实数集的直积、空间内的点的集合可以看成 3 个实数集的直积.

## 习 题

1. 列举下面每个集合的元素:

$$A = \{x | x \in \mathbf{Z}, 4 < x < 10\},$$

$$B = \{x | x \text{ 是偶数}, x^2 \text{ 是奇数}\},$$

$$C = \{x | \text{存在 } y \in \mathbf{Z} \text{ 使得 } x = 5y + 1\},$$

$$D = \{x | x^3 = 1\},$$

$$E = \{x | x \in \mathbf{Z}, x > 1 \text{ 或 } x < 2\}.$$

2. 假设  $A, B$  都是  $E$  的子集合. 那么,  $B = E - A$  的充要条件是

$$A \cup B = E, \quad A \cap B = \emptyset.$$

3. 假设  $A, B$  都是  $E$  的子集合. 那么, 下面 4 个条件是等价的:

$$A \subseteq B; \quad E - B \subseteq E - A; \quad A \cup B = B; \quad A \cap B = A.$$

4. 假设  $A, B, C$  都是  $E$  的子集合. 那么有

$$1) A - B = A - (A \cap B);$$

$$2) (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B);$$

$$3) A \cap (B - C) = B \cap (A - C) = (A \cap B) - C.$$

5. 假设  $A, B, C, D$  是 4 个集合. 那么有

$$1) A \subseteq B, C \subseteq D \text{ 的充要条件是 } A \times C \subseteq B \times D;$$

$$2) (A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C;$$

$$3) (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C;$$

$$4) (A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$$

6. 假设  $A, B, C$  都是  $E$  的子集合,  $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ . 那么有

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B), \quad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

## § 1.2 映 射

为了讨论不同集合之间的相互关系, 我们引入映射的概念.

假设集合  $X$  的元素与集合  $Y$  的元素之间,有一个对应的规则  $f$ : 对于任意  $x \in X$ , 都有一个对应的  $y \in Y$ , 记成  $y = f(x)$ . 那么, 这个对应的规则  $f$  叫做  $X$  到  $Y$  的映射,  $y$  叫做  $x$  的像,  $x$  叫做  $y$  的像源. 映射和元素的对应关系通常记成

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y,$$

$$f: x \longmapsto y \quad \text{或} \quad x \xrightarrow{f} y.$$

根据上述定义, 对于映射  $f$ ,  $X$  内的任意元素  $x$  都有像  $f(x)$  在  $Y$  内. 但是,  $Y$  内的任意元素  $y$  不一定都有像源. 譬如说, 集合  $E$  到  $E$  的映射:  $x \longmapsto x$ , 它把  $E$  的任意元都对应它自身. 这个映射叫做  $E$  的恒等映射, 记成  $\text{id}_E$ . 显然,  $E$  内任意元素都有像源. 再譬如说,  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的映射:  $x \longmapsto x^2$ .  $\mathbf{R}$  内的元素  $y < 0$  时,  $y$  就没有像源. 假若  $f$  是  $X$  到  $Y$  的映射, 而且  $Y$  内任意元素都有像源. 那么, 这种  $f$  叫做  $X$  到  $Y$  上的映射或  $X$  到  $Y$  的满射.

根据映射的定义, 对于映射  $f$ ,  $X$  内任意元素  $x$  的像  $f(x)$  是惟一的. 但是,  $Y$  内的元素  $y$  有像源时,  $y$  的像源不一定是惟一的. 譬如说, 对恒等映射  $\text{id}_E$ ,  $E$  内任意元素  $x$  有惟一的像源  $x$ . 再譬如说, 对  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  内的映射:  $x \longmapsto x^2$ ,  $\mathbf{R}$  内元素  $y > 0$  时,  $y$  都有像源  $\pm\sqrt{y}$ , 不是惟一的. 再举个例子,

$$f: x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$$

是  $\mathbf{R} - \{1\}$  到  $\mathbf{R}$  的映射. 任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 1$ , 都有像  $f(x) \in \mathbf{R}$ . 但是,  $\mathbf{R}$  内  $y = 2$  没有像源, 不存在  $x \in \mathbf{R} - \{1\}$  使  $\frac{2x}{x-1} = 2$ . 容易看出,  $f$  是  $\mathbf{R} - \{1\}$  到  $\mathbf{R} - \{2\}$  上的映射; 而且,  $\mathbf{R} - \{2\}$  内任意元素的像源是惟一的. 假若  $f$  是  $X$  到  $Y$  的映射,  $Y$  内元素  $y$  有像源时,  $y$  的像源还是惟一的. 那么,  $f$  叫做  $X$  到  $Y$  的一对一的映射. 上面的例子, 就是  $\mathbf{R} - \{1\}$  到  $\mathbf{R} - \{2\}$  上的、一对一的映射.  $X$  到  $Y$  上的一对一的映射又叫做一一对应的映射或可逆映射.

还是用上面的例子, 对于  $\mathbf{R} - \{1\}$  到  $\mathbf{R} - \{2\}$  上的一对一的映

射  $f$ , 任意  $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ , 都有  $f(x) = \frac{2x}{x-1} \in \mathbf{R} - \{2\}$ . 反过来, 任意  $y \in \mathbf{R} - \{2\}$ , 都有  $x = \frac{y}{y-2} \in \mathbf{R} - \{1\}$ , 而且是惟一的, 使得  $f(x) = y$ . 于是,

$$g: y \mapsto \frac{y}{y-2}$$

是  $\mathbf{R} - \{2\}$  到  $\mathbf{R} - \{1\}$  上的一对一的映射. 再举一个例子,

$$f: x \mapsto x^3$$

是  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的可逆映射. 于是, 把像与像源相颠倒, 又得到  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的映射

$$g: y \mapsto \sqrt[3]{y}.$$

一般地说, 假设  $f$  是  $X$  到  $Y$  的可逆映射. 那么, 对于任意  $y \in Y$ , 存在惟一的  $x \in X$ , 使得  $f(x) = y$ . 如果把上述  $y$  对应于  $x$ , 即  $y \mapsto x$ , 就得到一个  $Y$  到  $X$  的映射. 它是由  $f$  派生出来的一个新的映射, 叫做  $f$  的逆映射, 记成  $f^{-1}$ . 前面的  $g$  就是  $f$  的逆映射, 即  $g = f^{-1}$ .

对于元素个数相同的有限集合, 各种映射有下面的简单关系.

**定理 1** 假设  $X, Y$  都是  $n$  个元素的集合,  $f$  是  $X$  到  $Y$  的映射. 那么, 下面的 3 个条件是等价的: 1)  $f$  是到上的; 2)  $f$  是一对一的; 3)  $f$  是一一对应的.

**证** 事实上, 只要证明前两个条件是等价的, 命题就成立. 记  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

如果  $f$  是到上的, 那么  $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\} = Y$ . 但是  $Y$  也是  $n$  个元素组成的, 所以  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  是  $n$  个不同的元素. 即是说, 不同的  $n$  个元素的  $n$  个像是不同的. 这说明,  $f$  是一对一的.

反过来, 如果  $f$  是一对一的, 那么  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  是  $Y$  的  $n$  个不同元素.  $Y$  只有  $n$  个元素, 因而  $Y = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ ,  $f$  是到上的.

定理 1 证毕.



我们已经看到,映射是与两个集合相联系的.再举一个例子, $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射

$$f: 2n \mapsto n; 2n+1 \mapsto 2n+1.$$

奇数集 $\mathbf{Z}_1$ 与偶数集 $\mathbf{Z}_2$ 都是 $\mathbf{Z}$ 的子集合.假若只看 $f$ 在 $\mathbf{Z}_1$ 内的作用,它是 $\mathbf{Z}_1$ 到 $\mathbf{Z}$ 内的一对一的映射.假若只看 $f$ 在 $\mathbf{Z}_2$ 内的作用,它是 $\mathbf{Z}_2$ 到 $\mathbf{Z}$ 内的一对一的映射.一般地说,假设 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的映射, $X_1 \subseteq X$ .对于任意 $x \in X_1$ ,使得 $x \mapsto f(x)$ 的映射 $f_1$ ,叫做 $f$ 在 $X_1$ 上的限制,它是 $X_1$ 到 $Y$ 的映射.上面例子中, $f$ 不是一对一的,但 $f$ 在 $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ 上的限制都是一对一的.

下面开始讨论两个映射,假设 $f_1, f_2$ 都是 $X$ 到 $Y$ 的映射.如果对于任意 $x \in X$ 都有 $f_1(x) = f_2(x)$ ,就称 $f_1$ 与 $f_2$ 相等,记成 $f_1 = f_2$ .

假设 $X, Y, Z$ 是3个集合, $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的映射, $g$ 是 $Y$ 到 $Z$ 的映射.对于任意 $x \in X$ ,有 $f(x) \in Y$ ;对于 $f(x) = y \in Y$ ,又有 $g(y) = z \in Z$ ,即是

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z.$$

那么,对于任意 $x \in X$ ,使得 $x \mapsto z$ 的对应规则是 $X$ 到 $Z$ 的映射,叫做 $f$ 与 $g$ 的乘积,记成 $g \circ f$ ,或 $gf$ .即

$$gf(x) = g[f(x)].$$

值得注意的,上面的 $gf$ 存在,是 $X$ 到 $Z$ 的映射;而 $fg$ 不一定存在,因为 $Z \cap X = \emptyset$ 时 $fg$ 就不能定义.还要注意,即使 $fg$ 与 $gf$ 都存在,也不一定相等.譬如 $X = Y = Z = \mathbf{R}$ 时,假设 $f(x) = \sin x$ , $g(x) = x^2$ .那么 $gf(x) = \sin^2 x$ , $fg(x) = \sin x^2$ ,可见 $fg \neq gf$ .

有了映射乘积的概念之后,介绍一个判别可逆映射的方法.

**定理2** 假设 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的映射, $g$ 是 $Y$ 到 $X$ 的映射,而且

$$gf = \text{id}_X, fg = \text{id}_Y,$$

那么, $f$ 和 $g$ 都是可逆映射,而且互为逆映射.

**证** 首先,由 $gf = \text{id}_X$ ,可以得到:(1)  $g$ 是到上的:因为对于