高 等 教 育 教 材

经济数学(上)

西部、东北高职高专数学教材编写组

高等教育出版社

高　等　教　育　教　材

经济数学(上)

西部、东北高职高专数学教材编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 上/西部、东北高职高专数学教材编写组主编. —北京:高等教育出版社,2002. 8

ISBN 7-04-011342-2

Ⅰ. 经… Ⅱ. 西… Ⅲ. 经济数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ. F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056559 号

责任编辑 邵 勇 孙鸣雷
封面设计 吴 昊
责任印制 蔡敏燕

书 名 经济数学(上)
主 编 西部、东北高职高专数学教材编写组

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048
021-56965341
购书热线 010-64054588
021-56964871
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
http://www.hepsh.com

排 版 南京理工排版校对公司
印 刷 上海市印刷七厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 17.75
字 数 440 000
版 次 2002 年 8 月第 1 版
印 次 2002 年 8 月第 1 次
定 价 17.00 元

编 者 的 话

根据2000年教育部《应用数学基础课程基本要求》和1996年国家教委颁布的工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》,我们编写了此教材,供高职、高专学生和部分财经类本科专业使用。

本教材遵循"拓宽基础,强化能力,立足应用"与"必需、够用为度"的原则编写。强调与计算机应用相结合,书中编写了Mathematica软件的使用简介。教师应在教学中适当安排时间组织数学实验,以便学生掌握该软件,解决相关问题。

为把学生培养成有较宽的数学基础,具有创新意识,懂得管理,有较强应用能力的高素质人才,本书对传统数学体系削枝强干,力求深入浅出,在不影响数学体系的前提下,淡化理论推导,强化实践能力培养。教材加强了例题和习题的编写,使数学理论和实际应用结合得更紧密。教材渗透了数学建模思想,整体上有一定的创新。

教材展示了数学在经济活动中的应用,编写了大量新颖的例题、习题。这些题目有助于开阔学生视野,启迪思维,激发学生对数学的学习兴趣,从而不仅会学数学,也会用数学。

教材富有弹性,大部分内容是用宋体印刷的,少部分内容是用楷体印刷的。楷体部分的内容,供教师根据专业的特点与学生的实际选用。本书立足"好教、好学",每节复习题分A和B组两组题,A组为基本题,B组供学生选用。在内容选择和文字叙述上,始终贯穿编写原则,力求使本教材成为师生欢迎的教材。

本书由胡灿任主编、陈聆、刘颖任副主编,参编的有唐胜荣、杜怡平、王刚,由罗钊任主审,王德安、曾晓兰任副主审,参与审稿的有廖远芳、许必才。

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿,提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促,错误之处在所难免,恳请使用本教材的广大师生批评指正,以便我们修订提高。

西部、东北财经类高职高专数学教材编写组

2002年7月

目　　录

第一章　函数　极限与连续

函数是微积分学研究的基本对象,它反映了变量之间的依赖关系.极限理论是微积分学的基础,它是研究函数性质的重要工具.本章主要讨论函数的概念、函数的极限、连续函数及其性质.

§1-1　初等函数

一、函数的概念

在一个经济活动中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量的变化一般不是孤立的,而是相互联系着并遵循着一定的变化规律.下面我们就两个变量的情形(多于两个变量的情形见第五章)举例说明.

例 1　考虑单价为 2 元的足球彩票的销售额 y(单位:元)与销量 x(单位:张)之间的依赖关系.显然,它们之间的关系由公式

$$y = 2x$$

给定.当销量 x 在自然数集合 $\mathbf{N}$ 中任意取定一个数值时,由上式就可确定销售额 y 的相应数值.

上例中表达了变量 y 与 x 之间的依赖关系.这种依赖关系给出了一个对应法则,根据这一法则,当其中一个变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量 y 就有相应确定的值与之对应.两个变量 x,y 间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1　设 D 是一个给定的非空数集,如果对于 D 中的每一个数 x,按照某个对应法则 f,变量 y 都有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为 $y = f(x)$. 数集 D 称为这个函数的**定义域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

当 $x_0 \in D$ 时,$f(x_0)$称为**函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值**.当 x 取遍 D 中的一切元素时,它所对应的函数值全体组成的集合

$$R_f = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

一般地,如果对于任一数值 $y \in R_f$,集合 D 中有惟一确定的数值 x 与 y 对应,且满足

$$f(x) = y,$$

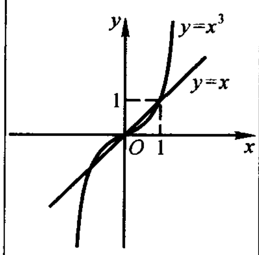
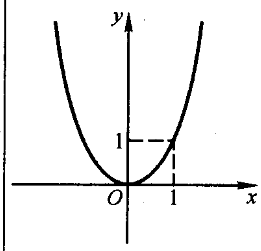
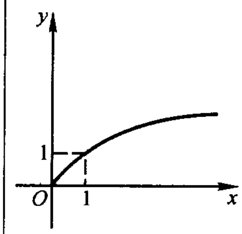
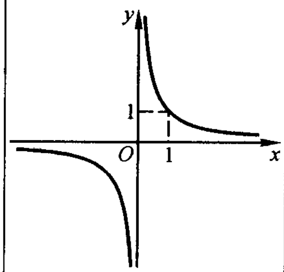
此时,如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,按照函数概念,就得到一个新的函数,这个新的函数称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**,记为 $x = f^{-1}(y)$,其定义域为 R_f,值域为 D. 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说,函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**.

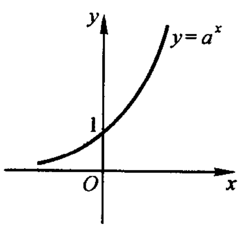
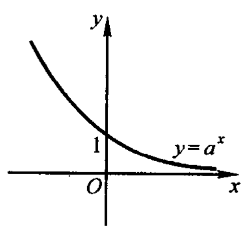
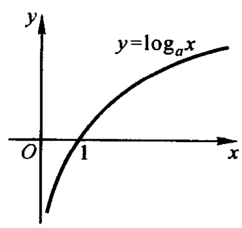
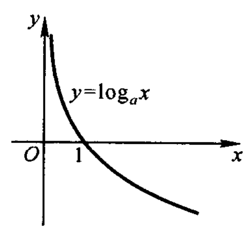
习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,于是函数 $y = f(x)$ 的反函数又记为 $y = f^{-1}(x)$.

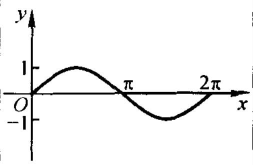
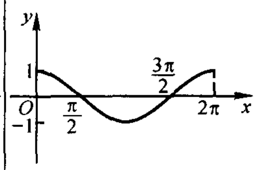
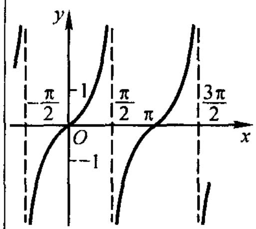
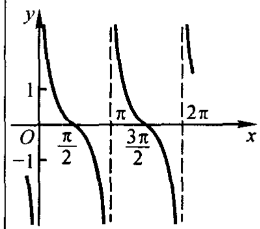
二、基本初等函数

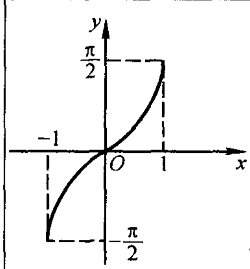
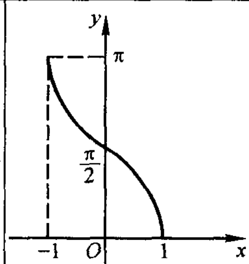
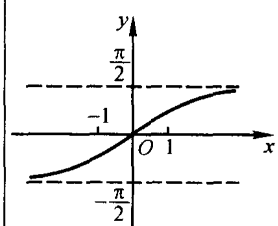
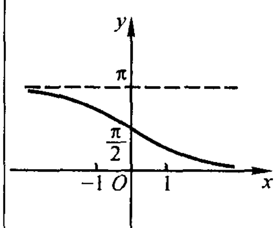
在中学,我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等**

函数.基本初等函数是构成各种函数的基本元素,现将其性质和图像罗列如下:$kKH*2l$

函 数	幂函数 $y=x^{\alpha}$			
	$\alpha=1,3$	$\alpha=2$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=-1$
图 像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值 域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调递增	在$(-\infty,0]$内单调递减 在$[0,+\infty)$内单调递增	单调递增	在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 内分别单调递减

函 数	指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图 像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值 域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减

函　数	$y=\sin x$ （正弦函数）	$y=\cos x$ （余弦函数）	$y=\tan x$ （正切函数）	$y=\cot x$ （余切函数）
图　像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$
值　域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	单调递减	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	单调递减	单调递增	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	单调递增	单调递增	单调递增	单调递减

函　数	$y=\arcsin x$ （反正弦函数）	$y=\arccos x$ （反余弦函数）	$y=\arctan x$ （反正切函数）	$y=\text{arccot}\ x$ （反余切函数）
图　像				
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$	$\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)$ $=-\arctan x$	$\text{arccot}(-x)$ $=\pi-\text{arccot}\ x$

此外,还有另外两个三角函数,它们是正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 正割函数是余弦函数的倒数,余割函数是正弦函数的倒数,即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\qquad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数.

三、初等函数

设某企业的总收入 R 是产量 Q 的函数

$$R=f(Q)=3Q+7, \tag{1}$$

但企业的产量 Q 又是投入的劳动力 l 的函数

$$Q=g(l)=3l^2-2l+6. \tag{2}$$

将(2)代入(1),得

$$R=f[g(l)]=9l^2-6l+25. \tag{3}$$

上式为总收入 R 与投入的劳动力 l 之间的关系,则总收入 R 为投入的劳动力 l 的函数.下面我们就讨论这类函数.

定义 2 设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数: $u=g(x)$, 且 $g(x)$的函数值的全部或部分在 $f(u)$的定义域内,此时称 y(通过 u)与 x 的函数关系 $y=f[g(x)]$, 是 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ **复合而成的函数**,简称**复合函数**,u 称为**中间变量**.

例如,函数 $y=\sin u$, $u=x^2$ 复合成函数 $y=\sin x^2$; 函数 $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=3+x$ 复合成函数 $y=e^{\sin(3+x)}$.

例 2 指出下列各函数的复合过程,并求其定义域:

(1) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$;　　　　(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

解 (1) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2$, $u=\arcsin v$, $v=\frac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的.要使函数 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 有意义,只须 $\arcsin\frac{1}{x}$意义,即 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 因此 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为

$$(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty);$$

(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2-3x+2$ 这两个函数复合而成的.要使函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义,必须 $x^2-3x+2\geqslant 0$. 解此不等式,得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为

$$(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty).$$

特别注意:

(1) 并不是任何两个函数都可以复合成一个函数.例如 $y=\arcsin u$, $u=1.5+x^2$ 就不能复合成一个函数,其原因在于 u 的值域为$[1.5,\ +\infty)$,它与 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,\ 1]$的交集为空集,即 u 的任何函数值都超出了 y 的定义域.

(2) 分析一个复合函数的复合过程时,每个层次都应是基本初等函数(如例 2(1))或常数与基本初等函数的四则运算式(如例 2(2)中的 $u=x^2-2x+2$),当分解到常数与自变量的基本初等函数的四则运算式(我们称其为**简单函数**)时就不再分解了.

定义 3 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数,称为**初等函数**.显然初等函数能用一个表达式表示.

例如,分段函数 $y=\begin{cases}x,\ x\geqslant 0,\\ -x,\ x<0,\end{cases}$ 即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,它是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2$ 复合而成的,因此它是一个初等函数.

又例如,分段函数 $y=\begin{cases}x+1,\ x\geqslant 0,\\ x^2+2,\ x<0,\end{cases}$ 它不能用一个表达式表示出来,因此它不是初等函数.一般地,分段函数若不能用一个表达式表示,此时,该分段函数就不是初等函数.

本书将主要研究初等函数.

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于 I 中的任一元素 x,都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$**在 I 内是有界的**.如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$**在 I 内是无界的**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立.又例如函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的,因为不存在正数 M,使得对于任一 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,都有 $|\tan x|\leqslant M$ 成立.但 $y=\tan x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上是有界的,此时只要 $M=1$ 就行了,即 $|\tan x|\leqslant 1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

四、经济活动中几个常见的函数

为了学习和理解本书的内容,解释有关数学表达式的经济意义,现将经济活动中的常见函数略加介绍.

1. 需求函数

某种商品的需求量是消费者愿意购买此种商品,并且有支付能力购买该种商品的数量,它不一定是商品的实际销售量.消费者对某种商品的购买量,除了与该商品的价格有直接关系外,还与消费者的收入、偏好、其它可取代的商品的价格有关.本书用 Q 表示商品的数量,用 p 表示商品的价格,现排除其它因素,只考虑商品的需求量 Q 与其价格 p 之间的关系 $Q=D(p)$,我们称 $Q=D(p)$ 为**需求函数**,p 为**需求价格**,其中,Q 和 p 取非负值.由需求函数所作出的图形称为**需求曲线**,并称 $Q=D(0)$ 为**最大需求**.

一般地,需求函数是一个减函数.需求函数 $Q=D(p)$ 的反函数 $p=D^{-1}(Q)$ 通常称为**需求价格函数**,有时也称为**需求函数**.当需求函数为一次函数 $Q=D(p)=a-bp$ 时,通常有 a, $b>0$.

2. 供给函数

某种商品的供给量是指在一定时期内,生产者(厂家)在一定价格下,愿意并可能出售商品的数量.记供给量为 Q,厂家愿意接受的价格为 p,则供给量与价格之间的关系 $Q=S(p)$ 称为**供给函数**,p 称为**供给价格**,其中 Q 和 p 取非负值.由供给函数所作的图形称作**供给曲线**.

一般地,供给函数是一个增函数.供给函数 $Q=S(p)$ 的反函数 $p=S^{-1}(Q)$ 通常称为**供给价**

格函数,有时也称为**供给函数**. 当供给函数为一次函数 $Q = S(p) = -c + dp$ 时, 通常有 c, $d > 0$.

需求函数 $Q = D(p)$ 与供给函数 $Q = S(p)$ 的图像如图 1-1.

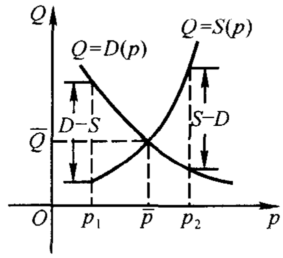


图 1-1

从图 1-1 中可以看出,当 $p = p_1$ 时,需求量 $D(p)$ 大于供给量 $S(p)$,此时称 $D(p) - S(p)$ 为**过剩需求**;当 $p = p_2$ 时,供给量 $S(p)$ 大于需求量 $D(p)$,此时称 $S(p) - D(p)$ 为**过剩供给**. 对同一种商品市场而言,过剩需求将使价格有上涨趋势,过剩供给将使价格有下跌趋势. 当需求量和供给量相等,即 $D(p) = S(p)$ 时,市场处于相对均衡,此时需求价格和供给价格相一致,我们称此价格 $\overline{p}$ 为**均衡价格**,曲线 $Q = D(p)$ 和曲线 $Q = S(p)$ 的交点$(\overline{p}, \overline{Q})$称作**均衡点**,$\overline{Q}$ 称作**均衡供应量**或**均衡需求量**.

应该指出,市场的均衡是暂时的,当条件变了,原有的均衡被破坏,从而在新的条件下建立新的均衡.

例如,如果 $D(p) = a - bp$, $S(p) = -c + dp$ $(a, b, c, d > 0)$, 当市场处于局部均衡,即 $D(p) = S(p)$ 时,有

$$\overline{Q} = a - b\overline{p} = -c + d\overline{p},$$

从而得

$$\overline{p} = \frac{a+c}{b+d}, \ \overline{Q} = \frac{ad - bc}{b+d}.$$

这里为了保证 $\overline{Q} > 0$,还需 $ad - bc > 0$.

3. 总成本函数和平均成本函数

总成本是指生产某种一定数量产品所需要的费用. 它包括**固定成本**和**可变成本**.

固定成本是不随产量而变动的成本. 例如厂房费、机器折旧费、一般管理费及管理人员的工资等. **可变成本**是随产量的变化而变化的成本,例如原材料、燃料和动力费、生产工人的工资等.

若记总成本为 C,固定成本为 C_0,Q 为产量,$F(Q)$为可变成本,则有

$$C = C(Q) = C_0 + F(Q),$$

其中, $C_0 \geqslant 0$, $Q > 0$,显然总成本函数是增函数.

平均成本是生产每单位产品的成本,记为 $\overline{C}$,即

$$\overline{C} = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{Q} + \frac{F(Q)}{Q}.$$

4. 收益函数和利润函数

总收益是指生产者将产品出售后的全部收入. **平均收益**是指生产者出售一定数量的商品时,每单位产品所得的平均收入,即单位产品的平均售价.

若记 R 为总收益,Q 为产量,$\overline{R}$ 为平均收益,产量为 Q 时的平均售价为 p,则有 $\overline{R} = p$. 即

$$R = R(Q) = \overline{R}Q = pQ, \ \overline{R} = \frac{R(Q)}{Q} = p,$$

其中,Q, R 取正值.

总利润是指总收益与总成本之差. **平均利润**是指生产一定数量产品时,每单位产品所得的利

润. 若记总利润为 L,平均利润为 $\overline{L}$,则有

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q),\ \overline{L} = \frac{L(Q)}{Q} = p - \overline{C}(Q).$$

5. 生产函数

在介绍生产函数之前,我们首先介绍生产要素的概念. 所谓**生产要素**,就是指生产产品时所必备的条件或因素. 例如,劳动力、机器、设备、厂房、原材料等.

生产函数是表示生产要素的投入与某产品的产出之间的关系. 通常生产某种产品需要多种生产要素的投入,为简化问题起见,我们假定在生产过程中只有一种生产要素的投入是变化的,其它生产要素的投入是不变的. 此时产出是指在既定的技术条件下可能生产某种产品的最大产量. 若以 t 表示生产要素的投入量,Q 表示产品的产量,则 t 与 Q 之间的关系 $Q = f(t)$ 称为**生产函数**. 生产要素投入后得到的全部产量称为**总产量**,因此生产函数又称为**总产量函数**.

每单位生产要素的投入量所得的产量称为**平均产量**,记为 $\overline{Q}$,即

$$\overline{Q} = \frac{f(t)}{t}.$$

习题 1-1

1. 确定下列各函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;　(2) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;　(3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

(4) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$;　(5) $y = \dfrac{1}{\lg(1 - x)}$;　(6) $y = \arcsin(x - 1) + \sqrt{x}$.

2. 若 $f(x) = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$, $g(x) = \log_a x\ (a > 0,\ a \neq 1)$,证明:

(1) $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$;　(2) $\dfrac{f(x)}{f(y)} = f(x - y)$;

(3) $g(x) + g(y) = g(x \cdot y)$;　(4) $g(x) - g(y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

3. 某批发商店按照下列价格表成盒地批发销售某种盒装饮料:

当购货量小于或等于 20 盒时,每盒 2.50 元;

当购货量小于或等于 50 盒时,其超过 20 盒的饮料每盒 2.30 元;

当购货量小于或等于 100 盒时,其超过 50 盒的饮料每盒 2.00 元;

当购货量大于 100 盒时,其超过 100 盒的饮料每盒 1.80 元;

设 x 是销售量,y 是总价,试建立总价 y 与销售量 x 之间的函数关系式,并作出它的图像.

4. 若 $f(x) = 3x^2 - 2x$, $\varphi(t) = \lg(1 + t)$,求 $f[\varphi(t)]$.

5. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y = (2x + 5)^4$;　(2) $y = \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $y = (1 + \ln x)^5$;　(4) $y = [\arcsin(ax + b)]^2$.

6. 设某商品的市场供应函数 $Q = S(p) = -80 + 4p$, 其中 Q 为供应量,p 为市场价格. 商品的单位生产成本是 1.5 元,试建立总利润 L 与市场价格 p 的函数关系式.

7. 用 p 代表单价,某商品的需求函数为 $Q = D(p) = 7\,000 - 50p$, 当 Q 超过 1 000 时成本函数为 $C = 20\,000 + 25Q$. 试确定能达到损益平衡的价格(提示: 当总收入 = 总成本时, 便达到损益平衡).

§1-2 函数的极限

下面我们将研究函数的极限，主要讨论函数 $y=f(x)$ 的以下三种变化情况：

1. 整标函数(数列) $a_n=f(n)$ 当自变量 $n\in \mathbf{Z}^+$ 无限增大(即 n 趋于正无穷大，记为 $n\to\infty$)时，对应的函数值 $f(n)$(数列的项 a_n)的变化情况；

2. 函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大(即 x 趋于无穷大，记为 $x\to\infty$)时，对应的函数值 $f(x)$的变化情况；

3. 函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 从某一常值 x_0 的左右两侧无限接近这一常值 x_0(即 x 趋于 x_0，记为 $x\to x_0$)时，对应的函数值 $f(x)$的变化情况.

一、数列的极限

考察下面的数列，当 n 无限增大时，对应的 a_n 的变化情况：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$；　　(2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$；

(3) $2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots$；　　(4) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \cdots$.

不难发现，这四个数列有如下变化趋势(图 1-2)：

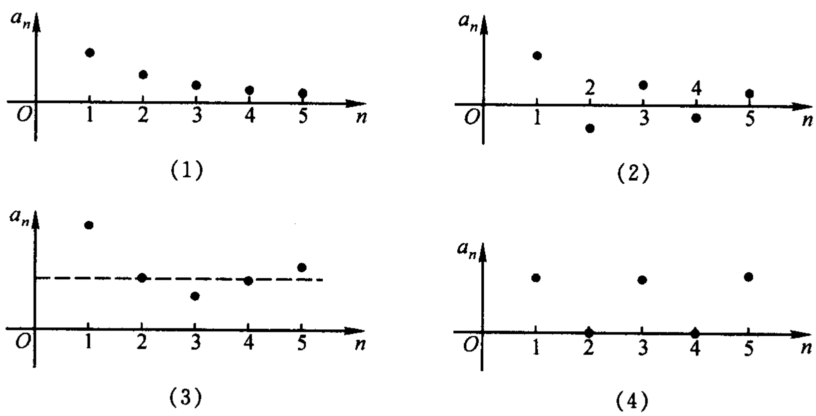


图 1-2

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：大于零，且无限接近于零；

(2) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$：大于零和小于零互相交替地无限接近于零；

(3) $\left\{1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$：大于 1，小于 1 或等于 1，无限接近于 1；

(4) $\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$：1 和 0 相间，没有固定的趋势.

当 n 无限增大时，数列(1)和(2)的项都分别地与零无限接近，数列(3)的项与 1 无限接近，像这种情况我们有如下的定义：

定义 1 如果无穷数列 $a_n=f(n)$ 的项数 n 无限增大时，项 a_n 无限接近于一个常数 A，则称 A 为**数列 a_n 的极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad 或 \quad a_n \to A, 当\ n \to \infty\ 时.$$

由此定义，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=1.$$

应当指出，"a_n 无限接近于一个常数 A"是指 a_n 与 A 的距离 $|a_n-A|$ 无限小，即 $|a_n-A|$ 可以小到任意小的程度. 如果 $n\to\infty$ 时，a_n 无限接近的常数 A 不存在，则 a_n 的极限不存在. 例如极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

不存在.

例 1 已知数列 $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$，求 n 为何值时，$|a_n-1|$ 小于：

(1) 10^{-5}； (2) 0.000 05； (3) 任意小的正数 ε.

解 $|a_n-1|=\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$.

(1) $|a_n-1|<10^{-5}$，即 $\frac{1}{n}<10^{-5}$，$n>10^5$，所以 n 只要取 10^5 以后的正整数，就能使

$$|a_n-1|<10^{-5};$$

(2) $|a_n-1|<0.000\,05$，即 $\frac{1}{n}<0.000\,05$，$n>20\,000$，所以 n 只要取 20 000 以后的正整数，就能使

$$|a_n-1|<0.000\,05;$$

(3) $|a_n-1|<\varepsilon$，即 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，$n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以 n 只要取大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数，就能使

$$|a_n-1|<\varepsilon.$$

例 2 确定数列 $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$ 的极限.

解 从图 1-3 可以看出，当 n 无限增大时，数列

$$a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

与直线 $y=1$ 无限接近. 即 a_n 与常数 1 无限接近，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

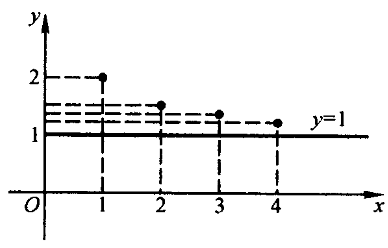


图 1-3

例 3 根据数列极限的定义，回答下列问题：

(1) 2 是不是数列 $a_n=\frac{2n+1}{n}$ 的极限？

(2) C 是不是常数数列 $b_n=C$ 的极限？

(3) 0 是不是数列 $c_n=q^n\,(|q|<1)$ 的极限？

解 (1) 由于 $|a_n-2|=\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$. 可以看出,当 n 无限增大时,$\frac{1}{n}$可以小到任意小的程度,即数列 a_n 与常数 2 无限接近. 由定义 1 知,2 是数列 $a_n=\frac{2n+1}{n}$ 的极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2.$$

(2) 由于 $|b_n-C|=|C-C|=0$, 即不论项数 n 为何值,数列 b_n 恒等于C. 由此可见,当 n 无限增大时,C 与数列 $b_n=C$ 完全相同,自然它们之间无限接近. 因此

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}C=C.$$

(3) 由于 $|c_n-0|=|q|^n$, $|q|<1$, 易见 $1>|q|^n>|q|^{n+1}$, 可以看出,当 n 无限增大时,$|q|^n$ 可以小到任意小的程度,即数列 $c_n=q^n$ 与 0 无限接近,由定义知,0 是数列 $c_n=q^n$ 的极限,即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

例 4 观察下列数列当 $n\to\infty$时有无极限:

(1) $a_n=n(n-1)$;　　　　(2) $b_n=\cos\frac{n\pi}{2}$.

解 (1) 将 $a_n=n(n-1)$ 写出,即为:

$$1\times 0,\ 2\times 1,\ 3\times 2,\ \cdots,\ n(n-1),\ \cdots,$$

易见,当 n 无限增大时,a_n 也无限增大,它不趋于某一确定的常数. 因此,数列 $a_n=n(n-1)$ 没有极限.

(2) 将 $b_n=\cos\frac{n\pi}{2}$ 写出,即为:

$$0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ \cos\frac{n\pi}{2},\ \cdots,$$

可见,b_n 在数 0, -1, 0, 1 之间摆动,当 n 无限增大时,b_n 不趋于某一确定的常数. 因此,数列 $b_n=\cos\frac{n\pi}{2}$没有极限.

二、$x\to\infty$时函数的极限

我们首先考察当 $x\to\infty$时,反比例函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

从图 1-4 可以看出,当 x 取正值且无限增大(记为 $x\to+\infty$)时,图像的上半支无限接近于 x 轴;当 x 取负值且绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$)时,图像的下半支无限接近于 x 轴. 即当 x 的绝对值无限增大时,对应的函数值无限接近于零. 像这种 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$的变化趋势,我们有如下定义:

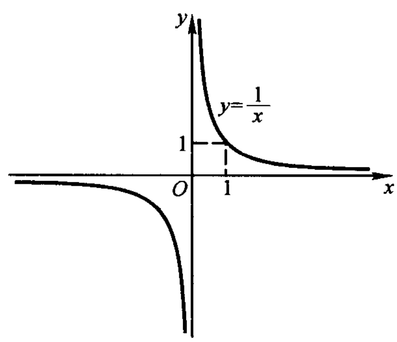


图 1-4

定义 2 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函