高中数学
综合能力培养
（上册）

北京市第八中学
张环　胡剑涛　杨玉蓉　主编

高中数学综合能力培养

（上　册）

北京市第八中学

张　环　胡剑涛　杨玉蓉　主编

科学技术文献出版社

1989

内 容 简 介

为了帮助高中学生进一步理解数学概念，提高分析问题、解决问题的能力，根据国家教委颁发的全日制中学《数学教学大纲》编写了此书。

本书分为上、下两册。上册内容为代数、三角；下册内容为立体几何、解析几何。书中对各章的概念作了详细的分析，对易错、易混的问题作了针对性的解释，对每章应该掌握的习题类型进行了分类举例，并配有一定量的练习题，附有答案或提示。

本书涉及的知识面广，进行了必要的归纳和总结，注意了面对学生实际和教材实际。可供高中各年级学生及自学青年使用，也可供中学数学教师教学中参考。

高中数学综合能力培养

（上 册）

北京市第八中学

张 环 胡剑涛 杨玉蓉 主编

科学技术文献出版社出版

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 18印张 401千字

1989年3月北京第一版第一次印刷

印数：1—10000 册

社科新书目：221—168

ISBN 7-5023-0786-9/G·281

定价：4.60元

编者的话

为了满足高中在校生复习功课和青年自学者学习高中课程的需要，北京市第八中学多年担任高中三年级教学工作的部分高级教师主编了这套辅导读物。本辅导读物包括语文、数学（上、下册）、英语、物理、化学、历史、地理七个分册。

本辅导读物以国家教委颁布的全日制中学教学大纲为依据，以“巩固知识、培养能力、开发智力”为编写宗旨，对中学新教材所涉及的基础知识、基本概念进行了系统的归纳和阐析，把纷繁丰富的知识梳理成线条清晰的系统，同时注意揭示教材各部分内容的内在联系，以便读者在复习和自学高中课程时“有章可循”。

本辅导读物各分册均附有知识覆盖率较高、题型灵活多样的练习题及参考答案。本辅导读物主编教师根据自己多年的教学经验及青年学生解题时易出现的问题，从思考的角度、思考的“路数”等方面，有重点地给予“点拨”。我们相信对读者是会有裨益的。

由于我们的水平有限，加之时间仓促，错误与不当之处在所难免，欢迎批评指正。

1988 年 10 月

目　录

代数部分……………………………………………… 1

第一章　复数…………………………………………… 1

一、概念要点分析……………………………………… 1

（一）复数 ……………………………………………… 1

（二）复数的模与共轭复数的性质 …………………… 2

（三）复数的运算 ……………………………………… 4

（四）复数与实数的区别和联系 ……………………10

二、习题分类举例……………………………………13

（一）复数的运算 ……………………………………13

（二）复数的三角形式 ………………………………18

（三）解方程与因式分解 ……………………………19

（四）复数模性质的应用 ……………………………25

（五）复数与几何 ……………………………………27

（六）复数与三角 ……………………………………36

三、练习 ………………………………………………39

第二章　函数…………………………………………49

一、概念要点分析……………………………………49

（一）集合与映射 ……………………………………49

（二）函数的概念及性质 ……………………………53

（三）初等函数 ………………………………………56

（四）函数的图象 ……………………………………63

二、习题分类举例……………………………………65

（一）集合与映射 ……………………………………65
（二）函数的对应法则 ……………………………………67
（三）函数的定义域 ……………………………………68
（四）函数的值域 ……………………………………71
（五）求已知函数的反函数 ……………………………………74
（六）函数的奇偶性与单调性 ……………………………………75
（七）二次函数 ……………………………………77
（八）指数、对数的运算 ……………………………………81
（九）数的比大小 ……………………………………83
（十）指数、对数方程与不等式 ……………………………………86
（十一）函数的最值问题 ……………………………………91
（十二）函数的图象 ……………………………………94
（十三）应用题 ……………………………………97
三、练习……………………………………99
第三章　不等式 ……………………………………113
一、概念要点分析 ……………………………………113
（一）不等式的性质和解法……………………………………113
（二）不等式的证明……………………………………117
（三）利用不等式求极值……………………………………119
二、习题分类举例 ……………………………………119
（一）绝对值不等式的解法……………………………………119
（二）无理不等式的解法……………………………………124
（三）含文字的不等式的解法及讨论……………………………………129
（四）利用比较法证明不等式……………………………………134
（五）综合法证明不等式……………………………………137
（六）分析法证明不等式……………………………………141
（七）其他方法证明不等式……………………………………143

（八）利用不等式求极值……………………………149
三、练习 ……………………………………………154
第四章 数列和极限 ………………………………164
一、概念要点分析 …………………………………164
（一）数列的概念……………………………………164
（二）等差数列、等比数列…………………………166
（三）特殊数列求和…………………………………168
（四）数列极限的概念及其四则运算………………169
（五）无穷等比数列求和……………………………171
二、习题分类举例 …………………………………172
（一）求数列的通项…………………………………172
（二）等差、等比数列的证明题……………………177
（三）等差、等比数列的基本公式及性质
的应用…………………………………………180
（四）等差、等比数列的综合题……………………184
（五）特殊数列求和…………………………………191
（六）数列极限的证明………………………………196
（七）求数列极限……………………………………198
（八）应用题…………………………………………202
三、练习 ……………………………………………205
第五章 数学归纳法 ………………………………215
一、概念要点分析 …………………………………215
（一）归纳的思想、方法……………………………215
（二）数学归纳法……………………………………219
二、习题举例 ………………………………………222
三、练习 ……………………………………………238
第六章 排列与组合 ………………………………241

一、概念要点分析 ……………………………………241
（一）两个基本原理……………………………………241
（二）排列……………………………………………242
（三）组合……………………………………………244
二、习题分类举例 ……………………………………247
（一）有关排队问题……………………………………247
（二）有关数字排列问题………………………………250
（三）有限制条件的组合问题…………………………252
（四）排列、组合混合问题……………………………254
（五）排列、组合公式及性质的应用…………………255
三、练习 ………………………………………………258
第七章　二项式定理 …………………………………262
一、概念要点分析 ……………………………………262
（一）二项式定理………………………………………262
（二）通项公式…………………………………………263
（三）二项展开式系数的性质…………………………263
二、习题分类举例 ……………………………………264
（一）利用通项公式求二项展开式中的某一项……264
（二）求多项式展开式中的某一项……………………266
（三）利用系数间关系求某一项或项数 n …………269
（四）证明题……………………………………………270
三、练习 ………………………………………………272
三角部分 ……………………………………………277
第一章　三角函数的图象和性质 ……………………277
一、概念要点分析 ……………………………………277
（一）角的符号…………………………………………277
（二）各种角的概念及表示法…………………………277

（三）三角函数的性质……………………………277
（四）诱导公式、同角三角函数关系式……………280
（五）几个常用的关系式……………………………282
二、习题分类举例………………………………………283
（一）角的表示…………………………………………283
（二）复合三角函数的定义域…………………………288
（三）复合三角函数的值域……………………………291
（四）复合三角函数的性质讨论及图象画法…………292
（五）某些三角关系式的变换…………………………295
三、练习…………………………………………………299
第二章 三角变换………………………………………308
一、概念要点分析………………………………………308
（一）两个角的和、差及一个角的倍角………………308
（二）和角、差角公式的使用…………………………308
（三）对sin2α、cos2α公式的使用……………………309
（四）对半角公式的使用………………………………309
（五）和、差、倍半公式的运用………………………312
（六）和差化积、积化和差公式的应用………………315
二、习题分类举例………………………………………320
（一）求值问题…………………………………………320
（二）三角变换常用的手法……………………………328
（三）三角不等式的证明………………………………354
（四）三角形中的三角变换……………………………358
三、练习…………………………………………………377
第三章 反三角函数……………………………………387
一、概念要点分析………………………………………387
（一）反三角函数的定义………………………………387

(二) 反三角函数的图象……………………………………391
(三) 反三角函数的三角运算……………………………392
(四) 三角函数的反三角运算……………………………393
(五) 反三角函数间的两个重要关系式…………………394
二、习题分类举例 ……………………………………………395
(一) 求反三角函数的定义域、值域……………………395
(二) 求值………………………………………………………399
(三) 角的运算…………………………………………………403
(四) 反三角方程、反三角不等式………………………407
三、练习 ………………………………………………………409
第四章 三角方程 ………………………………………419
一、概念要点分析 …………………………………………419
(一) 简单三角方程的解集公式…………………………419
(二) 简单三角方程的解法………………………………419
(三) 三角函数值相等的角之间的关系………………423
(四) 三角方程解集的等效性……………………………425
(五) 三角方程的增失根问题……………………………425
二、习题分类举例 …………………………………………427
(一) 解三角方程……………………………………………427
(二) 三角方程有解的判定………………………………433
三、练习 ………………………………………………………445
第五章 三角的综合应用 ………………………………450
练习 ……………………………………………………………464
答案与提示 ………………………………………………466
代数部分 ……………………………………………………466
一、复数 ……………………………………………………466
二、函数 ……………………………………………………481

三、不等式 ……………………………………492
四、数列与极限 ……………………………………501
五、数学归纳法 ……………………………………513
六、排列组合 ……………………………………524
七、二项式定理 ……………………………………528
三角部分 ……………………………………535
一、三角函数的图象和性质 ……………………………………535
二、三角变换 ……………………………………539
三、反三角函数 ……………………………………548
四、三角方程 ……………………………………550
五、三角的综合应用 ……………………………………555

代 数 部 分

第一章 复 数

一、概念要点分析

复数的主要内容有：复数的概念和性质（其中包括复数模的性质、共轭复数的性质等）；复数的运算；复数和其它数学知识的联系。

（一）复数

1．形如 $a+bi(a,\ b\in R)$ 的数叫复数。a 叫复数的实部，b 叫复数的虚部。

2．$z=a+bi(a,\ b\in R)$，若 $b=0$ 则 $z\in R$；若 $a=0$ 且 $b\neq 0$，则 z 为纯虚数。

3．复数的表达形式

（1）代数形式：$z=a+bi(a、b\in R)$

（2）三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geqslant 0)$

r 为复数的模，记作 $|z|$；θ 为复数的幅角。

若 θ 为复数 z 的一个幅角，则 $2k\pi+\theta(K\in Z)$ 都是复数 z 的幅角；若 $\theta\in[0,\ 2\pi)$，则 θ 为复数 z 的幅角主值，记作 $\arg z$。

（3）几何形式：复数 z 对应着复平面上位置向量 $\overrightarrow{OZ}$，且这个对应是一一对应。

4．复数的相等

对于复数的代数形式：

$z_1=a_1+b_1i$、$z_2=a_2+b_2i$，a_1、b_1、a_2、$b_2\in R$

$z_1=z_2\Longleftrightarrow a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$

对于复数的三角形式：

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$z_1=z_2\Longleftrightarrow r_1=r_2$ 且 $\theta_1-\theta_2=2k\pi(k\in Z)\Longleftrightarrow r_1=r_2$ 且 $\arg z_1=\arg z_2$

解决复数问题的基本思想是把复数问题转化为实数问题，复数相等的条件则是这个转化的根据。所以对复数 z 通常设 $z=a+bi(a$、$b\in R)$，若已知 $|z|=r$，通常设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，特别是已知 $|z|=1$，则设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$。

5. 共轭复数

$z=a+bi(a$、$b\in R)$，则 $a-bi$ 叫做复数 z 的共轭复数，记作 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=a-bi$

（二）复数的模及共轭复数的性质

共轭复数的性质：

$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；

当 $z_2\neq 0$ 时，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

$\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$，$(n\in N)$。

复数模的性质：

$$|-z|=|z|=|\bar{z}|;$$

$$|z|^2=|\bar{z}|^2=z\cdot\bar{z};$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|;$$

当 $z_2\neq 0$ 时，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；

$$|z^n|=|z|^n, \ (n\in N);$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

正确使用这些性质可以简化一些计算，此外在一些模与共轭复数关系的变换中也常用到这些性质。

例1. 若 $z=\dfrac{(4-3i)^2(-1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{12}}$，求$|z|$。

略解：$|z|=\dfrac{|4-3i|^2|-1+\sqrt{3}i|^{10}}{|1-i|^{12}}=\dfrac{5^2\cdot 2^{10}}{(\sqrt{2})^{12}}$

$=5^2\cdot 2^4=400$

例2. 证明$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

略证：左式$=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$=z_1\cdot\bar{z}_1+\bar{z}_1\cdot z_2+z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_2+z_1\cdot\bar{z}_1-\bar{z}_1\cdot z_2$

$-z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_2$

$=2(z_1\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2)$

$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$可以用来求$|z_1+z_2|$的最大（小）值。

1．当$|z_1|+|z_2|=$常数，且$\dfrac{z_1}{|z_1|}=\dfrac{z_2}{|z_2|}$时，$|z_1+z_2|$有最大值$|z_1|+|z_2|$，此时，复数$z_1$、$z_2$在复平面上对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$的方向相同。当$z_1=z_2=0$时，也成立。

2．当$||z_1|-|z_2||=$常数，且$\dfrac{z_1}{|z_1|}=\dfrac{z_2}{|z_2|}$时，$|z_1+z_2|$有最小值$||z_1|-|z_2||$。此时，复数$z_1$、$z_2$在复平面上对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$的方向相反。当$z_1=z_2=0$时，也成立。

所以，使用此性质求$|z_1+z_2|$的最值时，除了$|z_1|+|z_2|$或

$||z_1|-|z_2||$必须为常数外，还一定要考查等号是否成立。

求$|z_1+z_2|$的最值问题不仅可以使用复数的这个性质，还可以转化为实数范围内求最值的问题。有时，还可以巧妙地利用复数与几何的关系使问题更为简单。这方面的例题可以在后面的习题分类举例中见到。

（三）复数的运算

1．复数的加、减法

$$z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i\ (a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2\in R)$$

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\,i$$

这实质上是按复数的实部、虚部分别合并同类项的问题。

几何意义：

z_1、z_2分别对应着复平面上向量$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$，则z_1+z_2对应着向量$\overrightarrow{OZ}$（其中OZ_1ZZ_2为平行四边形）。z_1-z_2对应着向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$。

2．复数的乘法

（1）代数形式

$$z_1=a_1+b_1i、z_2=a_2+b_2i\ (a_1、b_1,\ a_2、b_2\in R)$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,i$$

实质上是按二项式乘法法则展开，再按实部、虚部合并同类项。

（2）三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

几何意义：z_1z_2对应的向量$\overrightarrow{OZ}$，其方向可以由z_1对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$绕原点逆时针旋转θ_2而确定，$\overrightarrow{OZ}$的长度是向量$\overrightarrow{OZ_1}$长度的r_2倍。

3．复数的除法

（1）代数形式

$$z_1=a_1+b_1i \quad z_2=a_2+b_2i \quad (z_2\neq 0 \quad a_1、b_1、a_2、b_2\in R)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

（2）三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(r_2\neq 0)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

几何意义：$\frac{z_1}{z_2}$对应的向量$\overrightarrow{OZ}$，其方向可以由z_1对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$绕原点顺时针旋转θ_2而确定，$\overrightarrow{OZ}$的长度是向量$\overrightarrow{OZ_1}$长度的$\frac{1}{r_2}$倍。

4．复数的乘方

（1）代数形式

$$z=a+bi\ (a、b\in R) \quad n\in N$$

$$z^n=(a+bi)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}bi+C_n^2a^{n-2}(bi)^2+C_n^3a^{n-3}(bi)^3+\cdots+(bi)^n$$

化简后，按实部、虚部合并同类项即可。

这实质上是二项展开问题。如果注意到它的实部系数按规律：1、$-C_n^2$、C_n^4、$-C_n^6$、…出现、虚部系数按规律：C_n^1、$-C_n^3$、C_n^5、$-C_n^7$、…出现，那么有些关于二项式的计算问题就可以和复数的乘方联系起来。

（2）三角形式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \in N)$$

——棣美佛定理

几何意义：z^n对应的向量$\overrightarrow{OM}$，其方向可以由z对应的向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点逆时针旋转$n\theta$角来确定，$\overrightarrow{OM}$的长度是$\overrightarrow{OZ}$长度的n倍。

关于棣美佛定理很容易用数学归纳法证明，这是应该掌握的。

例 1．求$S = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \cdots$

分析：根据式子的特点，可以联想到S是一个二项展开式的虚部，所以首先要构造一个二项式$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$。

略解：
$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{i}{\sqrt{3}} + C_n^2\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2 + C_n^3\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 + C_n^4\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^4 + \cdots$$
$$= 1 + C_n^1\frac{i}{\sqrt{3}} - C_n^2\frac{1}{3} - C_n^3\frac{i}{8\sqrt{8}} + C_n^4\frac{1}{9} + \cdots$$

又：
$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$