梁克辉 编著

中考数学题型

ABCDEO ABCDEO ABCDEO ABCDEO ABCDEO ABCDEO ABCDEO ABCDEO AB

关键30分

圆中比例式（等积式）证明的思路与方法

科学普及出版社

中考数学题型关键30分

圆中比例式(等积式)证明的思路与方法

梁克辉 编著

科学普及出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

中考数学题型关键30分:圆中比例式(等积式)证明的思路与方法/梁克辉编著.-北京:科学普及出版社,1998.1
ISBN 7-110-04375-4

Ⅰ.中… Ⅱ.梁… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第27992号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路32号 邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京印刷学院实习工厂印刷
*
开本:787毫米×1092毫米 1/32 印张:5.625 字数:132千字
1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷
印数:1—8000册 定价:6.60元

前　　言

《圆中比例式(等积式)证明的思路与方法》是中考数学题型关键30分中的知识考查重点,是当前初中数学教研重点涉及的题目,也是学生平时学习的知识重点。21世纪即将到来,能否抓住机遇,使中学数学学科的教学工作获得更快发展,关键在于提高学生的数学思维品质。初中是实施素质教育的重要基地,提高学生诸方面的素质,特别是数学思维素质,是今后为中学生编写课外读物的重要内容,也是广大中学生迫切希望得到有意义的帮助之一。根据《中国教育改革和发展纲要》的基本精神,按照当代社会对人的思维素质的要求,从初中学生的心理和教育理论出发,结合中考的实践与同步学习的需求,为他们编写这种读物将是十分必要的。编写本书的意图正是如此。

初中数学的精彩部分是圆中比例式的证明,这是重要的知识点,也是中考的重点内容。这一题目集中了相似形的内容并使之在圆这一部分知识中综合应用,综合考察了基础知识、基本技能与基本数学方法,促进了数学思想方法的形成,例如转化思想,方程思想,数形结合思想和分类讨论的思想在这里得到初步应用,对促进学校数学学科的教学,提高学生的思维能力,为高一级学校选拔有发展前途、富于科学开发精神的人才提供了可操作的典型题目,对每一个中学生有实际指导意义。1996、1997年的中考,北京市实施了新教材(九年制义务教育教材)内容的中考,数学试卷的中心和重要考点仍如前所述。在这之前,旧教材及历届中考也突出了这一考点。本书第5节的基础题型和第

6 节的综合题型每年必考。前者在试卷中处于基础题向综合题过渡型并在 120 分中占有 6 分的位置。后者出现在三道综合题中,并占有 9 分的重要位置。考虑到降低难度的要求,1996 年中考将这前者题型压减,而在 1997 年中考时特别再次提出,以降低过高的优秀率。可见在降低教材难度之时,并没有降低对学生能力的要求,这种题型仍然是考查学生知识与能力的重要题型。

实施新教材的中考已考过两次,试卷由原来的 100 分增加为 120 分为满分,及格分仍为 60 分。在 120 分中,有 76 分的选择题即基础知识,20 分的中档题及 24 分的高难度综合题。而近两年的中考平均分均在 80～90 分之间,说明圆中比例式的知识点在广大中学生中仍然是不易掌握的知识难点,能较好地解答本书第 5 节的基础题型才有可能使中考分数达到 96 分标准,由平均分看,北京市的绝大多数中学生尚未达到这一标准,这也是初中数学教学亟待解决的重要问题之一。对此知识点的学习,应重在提高学生的思维能力和数学素质,这对于一般校、基础薄弱校或重点校的学生来说,都是努力追求的目标。特别是前两类学校的要求更为迫切。

近两年数学分数段统计表明,数学中考成绩与本书力主解决的问题有极大关系(见表)。

中考成绩最后分数段统计:(北京市)

人数比例 / 分数段	1996 年	1997 年
100 分以上	36%	30%
110 分以上	14%	9%

1996 年中考压减此题型,使得高分的人数相对 1995 年偏高

10～20个百分点。1997年重新采用这一题型，明显地达到了压减优秀率的目的。得高分的人数明显减少。30%的学生掌握了圆中比例式这一题型，而70%的学生却有待提高。由于完成试卷的选择题及简单的计算后可得76～90分，由北京市的中考平均分80～90分之间来看，解决本书提出的重要题型以增加6分，总分达96分已成为各类学校努力提高教学质量的当务之急。以1997年高分段的统计为参照，只有9%的学生达到110分，说明综合题的难度已把相当一部分学生拒之于重点高中的大门之外。提高数学思维素质，将中考成绩再提高10分不是不可以实现的目标，这需要各方面作出努力。无论是一般学生或者尖子学生，努力提高数学思维素质才是攻克这一知识难点的最好方法。由于70%的学生在100分以下，对这部分学生进行有效的课内、课外指导非常必要。1997年中考满分率只有5%，说明提高的必要性，当前影响尖子学生的素质提高突出表现在综合题的解题上毫无章法，思维品质差。无论参加中考的学生是想上(重点或普通)高中、中专，还是想上职高、技校，研究并指导全体学生掌握这种题型的思维方法已成为重要课题。目前旨在培养学生数学思维品质，深入地、有针对性地专题讨论数学课程难点的辅导书籍并不多见，课外辅导书多为练习册，缺乏思维方法的指导，没有完整的便于各类学生思维用的解题分析过程。实际上这些书在学生的手里没有发挥作用，有能力解题的学生解不完这些题，无能力解题的学生望题兴叹实则无辅导作用可言。

由于本书作者在初中数学长年教学实践中，深深认识到上述问题的严重性，结合中考题型展示的知识点给学生指明思路与方法，养成思维习惯，培养良好的数学思维素质，不仅能使广大学生取得优异成绩，更重要的是为他们提供一种如何提高自

己的认识能力、思维能力、自学能力、发现能力、创造能力，从单科的素质教育转向全面的人的思维素质的培养的方法。

把课堂上没有学透的知识，对照本书加以理解深化，这是必要且可行的，希望读者从本书的分析讨论中得到帮助与提高，对本书的不足之处提出批评、指正。

作　者

1997 年 10 月

目　　录

一、问题的提出

初中平面几何的证明题和计算题主要分为两种类型:直线型、直线与圆的结合型.把直线型中的基础知识,特别是相似三角形中的比例线段问题放在圆中研究,是提高学生思维能力的重要知识点,也是毕业、升学考试的重要内容.这种类型的题目,其图形有明显的特点.在圆中通过线段或角的不同位置,寻找相似三角形或与圆有关的比例线段,求证比例式或等积式,或求解边、角、面积、三角函数的数值以及引起这些变化的函数解析式等等.

不断更新的图形和题型与代数计算的巧妙结合在直线与圆的相互关系中达到了数学演绎推理和归纳推理的精彩结合,使数学关系,从静态向动态转化,并在转化过程中表现出数学中最精华的内容,识图量也由此大量增加,为学生逻辑思维和形象思维跃上新台阶提供了演练场所.

初中数学的基础知识在直线与圆的结合中表现得充分而深刻,解题的数学思维方法,诸如数形结合、分类讨论、方程思想及转化思想使寻求解题的方法多样化,通过"从未知入手,寻求所需条件,逐步靠拢已知"的分析,使按步推理、变式反应、逆向思索的优良思维品质通过综合演绎的解题过程而得到培养.

不少学生对圆中比例式的证明感到十分困难和迷惘,主要原因是对图形的观察力不强,对有关定理的形象化认识不足所致.在这里,我们有必要就圆中比例式的证明提供足够的感性材料,在学好课本基础习题的前提下进一步提高的自己的应变能

力，通过对本书的阅读与思考克服无所作为的心理，树立信心，从点滴做起，使解题思维流畅，得心应手，逐步培养数学思维的高品质.

中考数学题型关键30分是中考数学试卷的最后30分.这30分包括的知识重点，主要是圆中比例式的证明及综合计算，一元二次方程根与系数的关系、根的判别式的综合题、解直角三角形及函数的综合题等重点内容.

本书以初中数学知识重点：圆中比例式的证明为中心，提出加强基础知识学习，提高解题能力，培养数学思维的优良品质，掌握中考数学关键30分的题型为主旨，由易到难，循序渐进，编写了有关圆的比例式问题的基础知识选择题百余道，小结了圆中比例式问题的主要定理、基本图形及常用的添加辅助线的方法，重点对近百道基础题和综合题进行了思路分析，指出了解题方法和用到的主要定理并给出了详细的解题过程.帮助你更好地掌握“双基”，数学思想、数学方法，灵活地运用“双基”分析和解决问题，在升入高一级学校的选拔考试中顺利地进入你的理想学校.

二、圆中比例式证明用到的主要定理

1. 比例的基本性质定理：

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ ，

$ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，……(共八种比例式)

特别注意比例中项的性质：

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^2=ac$，$b^2=ac\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. （课本第 201 页）

2. 平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.（课本第 209 页）

推论：平行三角形一边的直线截其它两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例.（三角形一边平行线的性质定理，课本第 211 页）

3. 三角形一边平行线的判定定理：如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.（课本第 213 页）

4. 例 6(定理)：平行于三角形的一边，并且和其它两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例.（课本第 215 页）

5. 三角形相似的判定定理 1：两角对应相等，两三角形相似.（课本第 225 页）

6. 三角形相似的判定定理 2：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.（课本第 227 页）

7. 三角形相似的判定定理3:三边对应成比例,两三角形相似.(课本第228页)

8. 直角三角形相似的判定定理:如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.(课本第230页)

9. 定理:平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.(课本第224页,预备定理)

10. 三角形相似的判定(定理)"例2":直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形相似.(课本第226页)

11. 相似三角形的性质:

定理:相似三角形对应高的比,对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.(课本第238页)

定理:相似三角形周长的比等于相似比.(课本第239页)

定理:相似三角形面积的比等于相似比的平方.(课本第240页)

性质:相似三角形的对应角相等,对应边成比例.(课本第238页)

12. 和圆有关的比例线段:

相交弦定理:圆内的两条相交弦,被交点分成的两条线段长的积相等.(课本第125页)

推论:如果弦与直径垂直相交,那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项.(课本第125页)

切割线定理:从圆外一点引圆的切线和割线,切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.(课本第127页)

推论:从圆外一点引圆的两条割线,这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等.(课本第127页)

此外,还经常用到下列基础知识:等底(高)的三角形的面积比等于它们对应底边上的高(对应底)之比.在使用这条性质时要与“相似三角形的面积比等于相似比的平方”区别开来,由此可以通过面积比转化为线段的比.

例如:(见图2-1)$EF \parallel BC$,$AN \perp BC$于N,交EF于M,可证$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$,由相似三角形的性质有:

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2=\left(\frac{AM}{AN}\right)^2=\cdots\cdots$$

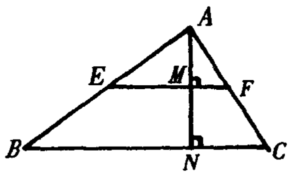

图2-1

例如:(见图2-2)$AD \parallel BC$,AC与BD交于点E,$\because$ $\triangle AED$与$\triangle ECD$等高不等底

$$\therefore \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{\frac{1}{2}AE \cdot h_{AC}}{\frac{1}{2}EC \cdot h_{AC}}=\frac{AE}{EC} \quad ①.$$

同理:$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEA}}=$

$$\frac{\frac{1}{2}DE \cdot h_{DB}}{\frac{1}{2}BE \cdot h_{DB}}=\frac{DE}{BE} \quad ②.$$

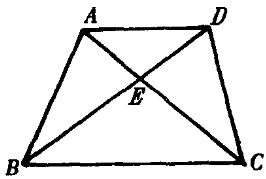

图2-2

又$\because$ $AD \parallel BC$,$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{DE}{BE}$,由①、②式

$$\therefore \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEA}}.$$

$$\therefore S_{\triangle ECD}=S_{\triangle BEA}.$$

事实上，由于$\triangle ADC$与$\triangle ADB$等(同)底等高，$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ADB}$，它们与$S_{\triangle ADE}$的差当然相等，即$S_{\triangle ECD}=S_{\triangle BEA}$，我们从两个角度说明了$\triangle ABE$与$\triangle ECD$等积. 特别注意$\triangle AED\backsim\triangle CEB\Rightarrow$它们的面积比等于相似比的平方，而不是等于它们对应边的比. 即：

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle CEB}}=\left(\frac{AE}{CE}\right)^2=\left(\frac{DE}{BE}\right)^2=\left(\frac{AD}{CB}\right)^2.$$

在直角三角形相似的判定中，几何课本第二册第226页的例2是一个重要的“定理”，虽然它是以例题的形式出现的，一方面它可帮助你掌握三角形相似的判定定理1，另一方面你可直接利用例2证明这样的两个直角三角形相似. 如图2-3：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=\mathrm{Rt}\angle$，$CD\perp AB$于$D$，由例2有如下结论：

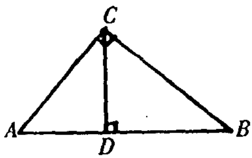

图2-3

(1)$\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$

$$\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB;$$

(2)$\mathrm{Rt}\triangle CBD\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$

$$\Rightarrow\frac{CB}{AB}=\frac{DB}{CB}\Rightarrow CB^2=DB\cdot AB.$$

由相似三角形的传递性还可推出下面结论；即左、右两个三角形也相似.

(3) $Rt\triangle ACD \backsim \triangle Rt\triangle CBD$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD.$$

要特别注意三角形中有了双垂直的条件后，有三对直角三角形相似的结论，更应记住由此得到的三组比例式和三组等积式，这些式子在圆中比例式的证明中非常有用.

圆的图形中经常明示或隐藏着等量线段、等边、等弦、等弧、或等角(圆周角、圆心角、弦切角、对顶角、内错角、同位角). 这些相关的等量关系之间的代换往往是证三角形相似前的条件或是证三角形相似后找出结论的解题技巧. 而证出比例式之后，比例式之间的等量代换，或证出等积式之后，等积式之间的等量代换，或证出一个比例式，另一个等积式之后的等量代换，都是解决圆中比例式(等积式)证明时必须考虑的，特别是题目较复杂时.

当图形中有平行线时，由平行线截线段成比例定理很容易找到对应的四条比例线段，如果这些线段不在应有的位置上时，通过平移或线段间的代换，或添辅助线构造相等的线段，常常使问题迎刃而解.

当四条线段位于两个明显相似的三角形之中往往是解题时考虑问题的出发点，否则应将一条线段或两条线段转移到合适的位置上去，或平移，或代换，或构造中间比来开通证明的思路.

如果利用比例式的代换仍然难于找到所证的结论就应该转化比例式为等积式，考虑等积的代换或中间量的代换. 这里经常考虑直角三角形中的三个等积式，圆中比例线段的四个等积式. 在这里只有充分地熟悉图形，合理地分析因果关系，细心有序地展开联想，不难在短时间里寻到开门的钥匙.

这些基本方法和技巧只有在具体的解题过程中才会充分领

悟到这些思维与技巧的奥妙所在.当然,图形中表现的条件与证明的结论之间往往相差很远,有的条件是明显的,有的是隐蔽的,解题时应善于观察图形的内在联系,可延伸发展的条件,能活动变形的可能性,挖掘线段、角的等量代换的条件,使问题的本质充分显露,促进思维的开拓.如果在观察思考过程中思路总是开不通,那很可能是隐蔽的条件没有发掘显露,或者图形没有补充完整,关键的点、线段、角的位置没有找对.一般来讲,当图形过于简单,而结论不是很简单时,应考虑添加辅助线,使图形关系明显起来,使结论和已知条件通过添加辅助线拉近关系.当遇到复杂的图形时,要善于分解图形,使其板块化,化整为零,以便各个击破.当复杂图形变为基本图形之时正是你找到已知与结论的关系的桥梁之时.

三、圆中的主要基本图形及常用的添加辅助线的方法

我们结合圆中的基本图形讲讲常用的添辅助线的方法：

1.圆中的弦联系着直径，两端点联系着弧．直径、弦、弧的关系有一个重要的垂径定理及推论．遇着这种图形，往往添加直径、半径构造 Rt△，用勾股定理、垂径定理计算有关线段的长，有时还可设未知数构造一元二次方程，利用相交弦定理推论来求相关线段的长或推出有关比例式．（见基本图形图 3－1）

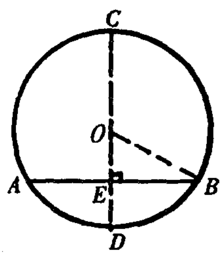

图 3－1

2.圆中有相交弦时，可考虑再添一条弦，构造圆周角，把相交弦形成的三角形中的内角与圆周角联系起来，经常用到三角形内角和定理及其推论．（见基本图形图 3－2）

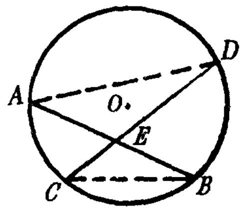

图 3－2

3.圆中有直径时一般考虑构造 90°的圆周角，经常把圆上的特殊点与直径两个端点连结起来，进而利用 Rt△相似判定方法的例 2，用三对相似三角形对应的三组比例式或等积式推证有关问题．有时也由特殊点 C 作直径 AB 的垂线