大學用書

商用數學

譚秩猷編著

世界書局印行

大 學 用 書

商 用 數 學

譚 秩 猷 編 著

世 界 書 局 印 行

中華民國五十三年十月初版

大學用書

商用數學

平裝本基本定價壹圓捌角整

編著者：譚秩猷

發行人：吳開先

內政部登記證內版臺業字第一八八號

出版者：世界書局

印刷者：世界書局

發行所：世界書局

臺北市重慶南路一段九十九號

自　序

商用數學為部定大學商學院之必修學科，其內容係以數學方法解決工商企業有關投資及管理之計算問題。著者於民國五十一年間在國立政治大學會計統計學系代授該項課程時，卽感目前坊間是科之著本，僅限於有關利息之計算，其於大學之高等商學教育似嫌不足，故本書增列統計死亡率與生命表之編製、線型規劃、存貨控制等部份，而前者為研究人壽保險及人口統計不可缺乏之知識，後二者為歐美近年來普遍重視之管理問題。

本書對於利息及年金問題，均用微積分方法推論，蓋兩者之函數形式，皆可由其相互間微分方程之解確定，較之用代數法推算，在理論系統上更顯明析，在推論手續上亦較簡捷，唯著者學識淺薄，尚祈海內方家，有以教之。

本書所附計算用表，以供有助實用為原則，生命年金及保險用表，則採用日本第九回生命表及美國 SA 表、CSO表，前者為日本及本省保險業目前多所採用，後者在美國通用甚廣，雖其編製時間距今較久，為參考比較起見，故仍一併附錄。

本書執筆時，曾蒙國立政治大學商學院韋院長仲殷、鄭教授堯拌、胡教授福成，國立臺灣大學經濟系陸教授民仁、省立師範大學數學系范教授傳坡諸師長賜教之處甚多，並承師長高主任造都、白主任上之、任主任維均不斷鼓勵、均所深感，特此誌謝。

譚　秩　猷　民國五十三年七月於臺北

商用數學目錄

商 用 數 學

第一章 計 息 法

一、利率理論與複利函數

預期利益之誘惑，導致投資行爲之動機，就資本主而言，若以資金借人使用，則每一時刻均希望獲得使用之代價，前項借人運用之資金，稱爲本金 (Principal) ，其應得之代價，稱爲利息 (Interest) ，而每一結算利息期間 (Conversion Period) ，每元本金所應得之利息稱爲利率 (Rate of Interest) 。若利息按期支付，則資本主每期均可將收入之利息作爲新本金繼續投資，凡屬於自己之資金，均可用之於投資，故利息收入亦可作投資生息之本金，毋庸置疑。以上之行爲若隨時繼續進行，則資本主之本金自隨時間之更替而繼續增長，其計息之期間愈短，本金增長之速度愈快，此爲資本主之期望。然事實頗有困難，故可於事先約定每期之利息並不即行支付，而轉入資本主之本金項下，於下期初時一併計息，如是每期本息相生，利息一期比一期增多，而本金亦一期比一期加速的增長，δ 表每一計息期之利率，而以 P 爲本金，x 表時間之變量，當 x 之增量趨近於零時，則每一計息期內本金之平均增加率爲：

$$\frac{dP}{dx}=P\delta \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.a)$$

設 S爲投資至 m 時期之本金與利息總和，亦即本金到m期時之價值，可以簡稱爲複利終值 (Final Value of Compound Interest)， 由 (1 . 1 .a) 式求微分方程之解答，其結果如下：

$$\int_P^S \frac{dP}{P} - \delta\int_0^m dx = 0$$

$$\ln S - \ln P - m\delta = 0$$

$$\ln \frac{S}{P} = m\delta$$

$$\frac{S}{P} = e^{m\delta}$$

$$S = Pe^{m\delta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.b)$$

(1.1.b) 式稱爲複利函數，S爲連續複利至m期時之複利終値。設I爲各期利息之總和，即等於複利終値與原本金之差。

$$I = S - P$$

$$= Pe^{m\delta} - P = P\,(e^{m\delta} - 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.c)$$

(1.1.b) (1.1.c) 兩式皆係假設每一計算利息期間 (Conversion Period) 極爲微小時所求得之理想公式，然此項假設事實上絕不可能，實際應用時之每一計息期間必較爲大，吾人可以 k 個微小之計息期間作爲一個新計息期間，並設新計息期數爲 n 個，則 $n = m/k$，若新計息期間爲主之利率爲 i， 則 i 之值可以 $P = 1$ ， $m = k$ 代入 (1.1.c) 式，求得如下之結果：

$$i = e^{k\delta} - 1$$

移項則得：

$$1 + i = e^{k\delta}$$

以 $k = m/n$ 代入

$$1 + i = e^{\frac{m}{n}\delta}$$

等式兩邊同開n次方得 $(1+i)^n = e^{m\delta}$

將之代入 (1.1.b) 式得：

$$S = P\,(1+i)^n = Pe^{m\delta}$$

卽：
$$S=P(1+i)^n \cdots\cdots (1.1)$$
(1.1) 式爲以本金 P 元依每期利率 i 投資生息至 n 期末時之複利終値，卽第 n 期末時之本利總和，本金 P 元係指今後第 n 期末之 S元在現今之價値，故可對應稱之爲複利現値 (Present Value of Compound Interest)，由 (1.1) 式求得複利現値之公式爲：
$$P=S(1+i)^{-n} \cdots\cdots (1.2)$$
其至 n 期末時之利息總和稱爲複利息 (Compound Interest)，卽爲複利終値與複利現値之差，以 I 表示之，則：
$$I=S-P \cdots\cdots (1.3.a)$$
$$\therefore \quad I=P(1+i)^n-P=P[(1+i)^n-1]$$
卽：
$$I=P[(1+i)^n-1] \cdots\cdots (1.3)$$

前述各式中之 i 稱爲實利率 (Effective Rate)，一般商場習慣，往往將實利率以年利率若干表示之。設以符號 $j_{(m)}$ 代表年利率，m 爲每年內包括之計息期數，每一計息期內之實利率（卽指每一計息期內計息一次之利率）爲i，則應用前述各公式時，須將 $\frac{j_{(m)}}{m}$ 代替 i 計算之，亦卽各公式中之 i 務必與時期之單位相對應配合。至年利率與實利率之互算，茲以實例說明如下：

例 1．設年利率爲一分二厘，每年計息四次，亦卽每季（四個月）爲一計息期，則每期（四個月）利率（實利率）爲三厘（卽一分二厘÷ 4 ＝三厘）。

例 2．設年利率爲五厘，每兩年計息一次，亦卽每兩年爲一計息期，則每期（兩年）之利率（實利率）爲一分（卽五厘× 2 ＝一分）。

例 3．設年利率爲一分二厘，每年計息一次，亦卽每一年爲一計息期，故年利率一分二厘卽爲實利率。

上述例1.及例2.中之年利率 $j_{(m)}$ 均非一年內本金一元之實際利息，故稱爲名義上之利率或虛利率(Nominal Rate)又如年利率四厘，若計息期爲半年時，則每期利息按二厘計算，卽以 $i=\frac{4\text{厘}}{2}=2$ 厘代入 (1.3) 式，則得一年內本金一元之利息爲：

$$P[(1+i)^n-1]$$
$$=(1+0.02)^2-1$$
$$=0.0404$$

卽一年之實際利息並非四厘，而爲四厘零四絲。故年利率四厘稱爲名義上之利率或虛利率。在前述例 3. 中，因計息期一年，故其實利率卽爲年利率。至虛利率與實利率之等值關係分述如下：

（甲）由名利率求實利率：

每元每年之本利合計爲 $\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$，但年初之本金爲1，故 $\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1$，卽爲一年之利息，由是可知求實利率之公式如下：

$$i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.4.a)$$

例——設名利率爲年息四厘，每半年計息一次，時期一年，試求實利率若干？

$$i=\left(1+\frac{.04}{2}\right)^2-1$$
$$=(1.02)^2-1$$
$$=.0404$$

（乙）由實利率求名利率：

$$\therefore \quad 1+i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$$

開 m 方，得下式：

$$1+\frac{j_{(m)}}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

或 $$=\sqrt[m]{(1+i)}$$

求 $j_{(m)}$ 則如下式：

$$j_{(m)}=m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]$$
$$=m(\sqrt[m]{1+i}-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.4)$$

例1.——設實利率爲年息四厘，半年計息一次，即 $i=.04$，$m=2$，求折合名利率若干？

$$j_{(m)}=2(\sqrt{1+.04}-1)$$
$$=.039608$$

例2.——設實利率爲年息四厘零四絲，半年複利一次，即 $i=.0404$，$m=2$，求折合名利率若干？

$$j_{(m)}=2(\sqrt{1.0404}-1)$$
$$=.04$$

茲將年息六厘，一年內複利數次之名利率與實利率之差額，列表於下：

名利率 %	複利時間	m＝一年中複利次數	本利合計		每元所得利息	實利率 %
6	一年	$m=1$	$(1.06)^1$	$=1.06$	0.06	6.
6	半年	$m=2$	$(1.03)^2$	$=1.0609$	0.0609	6.09
6	三個月	$m=4$	$(1.015)^4$	$=1.06136$	0.06136	6.136
6	一個月	$m=12$	$(1.005)^{12}$	$=1.06168$	0.06168	6.168
6	一日	$m=365$	$(1.000164)^{365}$	$=1.06183$	0.06183	6.183

利率因時期之單位不同，而有年利率月利率及日利率之別，其表示方法通常百分率（%）表示年利率，千分率（‰）表月利率，萬分

率（‰）表示日利率，在我國商場習慣上均用分厘毫表示之，如：

（甲）稱年息一分二厘者，表每百元年息十二元，即年利率為12%，亦即每元年息0.12元。

（乙）稱月息一分二厘者，表每千元月息十二元，即月利率為12‰，亦即每元月息0.012元。

（丙）稱日息一分二厘者，表每萬元日息一元二角，即日利率為1.2‱，亦即每元日息0.00012元。

例1．本金1,000元，年利率五厘，每年計息一次，求四年末之本利和為若干？

解：因每年計息一次，故實利率即等於年利率，$i=0.05$，$n=4$，$P=1,000$元代入公式（1.1）得：

$$S=P(1+i)^n$$
$$=1,000(1+0.05)^4$$

由書後所附複利表查得

$$(1+5\%)^4=1.21551$$

$$\therefore \quad S=1,000\times1.21551$$
$$=\$1,215.51$$

例2．求例1．中之利息為若干？

解：由公式（1.3）得：

$$I=P[(1+i)^n-1]$$
$$=1,000[(1+5\%)^4-1]$$
$$=1,000[1.21551-1]$$
$$=\$215.51$$

但亦可利用例1之結果代入公式（1.3.a）直接求之，

$$I=S-P$$

$=1,215.51-1,000$

$=\$215.51$

例 3. 已知年利率 5% 每年計息二次，八年到期時得本利和 4 000元，求其複利現值為若干？

解：由題意得：

$i=\frac{5\%}{2}=2.5\%$　$n=8\times2=16$期　$S=4.000$ 代入公式 (1.2) 得：

$$P=S(1+i)^{-n}$$
$$=4,000(1+2.5\%)^{-16}$$

由書後所附複利表查得 $(1+2.5\%)^{-16}=0.67362493$

$$P=4,000\times0.67362493$$
$$=\$2,694.50$$

例 4. 某君以 500 元存入銀行，其利息按年利率五厘，每年計息一次，問第四年三個月時可得本利和若干元？

解：　$P=500$　$i=5\%$　$n=4\frac{1}{4}$　代入公式 (1.1) 得：

$$S=P(1+i)^{n}$$
$$=500(1+5\%)^{4\frac{1}{4}}$$
$$=500(1+5\%)^{4}.(1+5\%)^{\frac{1}{4}}$$

由書後所附複利表查得 $(1+5\%)^{4}=1.2155062$，　$(1+5\%)^{\frac{1}{4}}=1.0122722$

故　$S=500\times1.2155062\times1.0122722$

$=\$615.2$

公式 (1.1) 中，包含 S, P, i, n 四個變數，若已知其中任意三數

，則其餘之任一數皆可由公式求得之。

二、單利函數一複利函數之近似值

於公式 (1.1) 中將 $(1+i)^n$ 依二項式公式展開則為

$$(1+i)^n=1+in+i^2\frac{n(n-1)}{1.2}+i^3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上式右邊，i 為一甚小之眞分數，其分母至少為 100， i^2 之分母為 10,000，i^3 之分母為 1,000,000，若 $n<1$ 時，則第三項以後各項之值均更為微小，故皆可略去而不計，由是得

$$(1+i)^n=1+in \cdots\cdots\cdots\cdots (1.5.a)$$

$$S=P(1+in) \cdots\cdots\cdots\cdots (1.5)$$

(1.5.a) 式為當 $n<1$ 時，複利終值之近似值，稱為單利函數，其本金 P 之值由 (1.5.a) 式得：

$$P=\frac{S}{1+in}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.6)$$

其利息之總和為：

$$\begin{aligned}I&=S-P\\&=P(1+in)-P\\&=Pin\cdots\cdots\cdots\cdots (1.7)\end{aligned}$$

例1. 本金 1,000 元，年利一分，求五年後之單利息及本利和。

解： $P=1,000$ $i=10\%=0.1$, $n=5$，代入公式 (1.5) 得本利和為：

$$\begin{aligned}S&=P(1+in)\\&=1,000(1+10\%\times5)\\&=1,000(1.5)\end{aligned}$$

$= \$1,500$

由公式（1.7）得單利息為：

$$I = S - P$$
$$= 1,500 - 1,000$$
$$= \$500$$

或 $$I = Pin$$
$$= 1,000 \times 10\% \times 5$$
$$= \$500$$

例2. 已知年利率一分，二年後得本利和 1,200 元，間本金為若干？

解：∴ $i = 10\% = 0.1$，$n = 2$，$S = \$1,200$ 代入公式（1.6）得：

$$P = \frac{S}{1 + in}$$
$$= \frac{1,200}{1 + 10\% \times 2} = \frac{1,200}{1.2}$$
$$= \$1,000$$

由（1.7）式觀之，依單利函數所求得之利息總和即為 n 期利息之和，其每期之利息並不按期轉為投資生息之新本金，故無如複利函數計息法中息上生息之情形。當 $n > 1$ 時，其計算之利息遠較依複利函數求得者為少，不過只要在債權人之同意下，仍不失為便利之簡捷公式。茲就時期 n 之大小，依複利函數及單利函數計算之利息分析比較如下：

由（1.3）式得複利函數計息法求得之複利息為：

$$I_1 = Pin + Pi^2\frac{n(n-1)}{1.2} + Pi^3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \cdots\cdots \qquad (1.8)$$

依單利函數計息法求得之單利息爲：

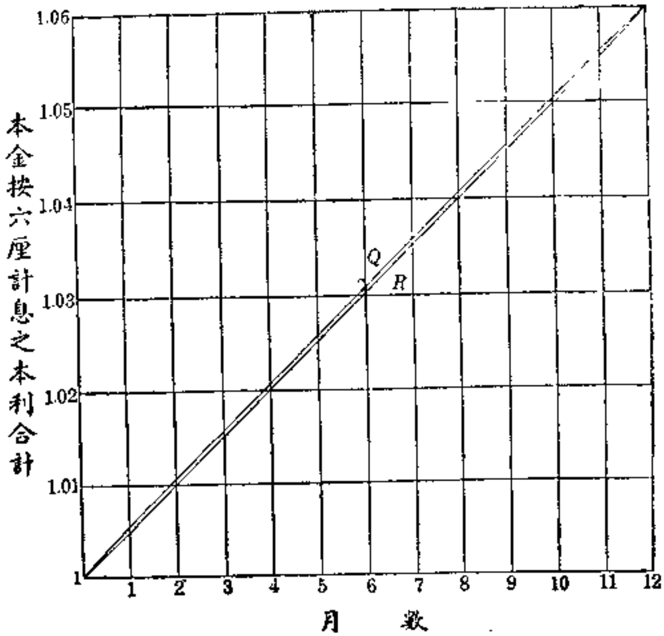
$$I_2 = Pin$$

當 $n>1$ 時，則 $I_1>I_2$，即複利息大於單利息。當 $n=1$ 時，則 $I_1=I_2$ 即複利息等於單利息，當 $n<1$ 時，(1.8) 式內之第二項起以後各項爲負正相間，且各項之絕對值爲後項小於前項，故 $I_1<Pin$，即爲 $I_2>I_1$，是知複利息小於單利息，茲以實例說明如下：

(甲) 設時期爲十二年，利率爲六厘。

年數 (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
單利終價 (Q)	1.06	1.12	1.18	1.24	1.30	1.36	1.42	1.48	1.54	1.60	1.66	1.72
複利終價 (R)	1.06	1.124	1.191	1.262	1.338	1.418	1.504	1.594	1.689	1.791	1.898	2.012

茲再以圖線表示如下：



MN 表本金，NQ 爲單利十年之利息，NR 爲複利十年之利息。

若時期不足一年，則單利之利息較大，而複利之利息較小，玆列表比較於下：

月　數 (n)	1	2	3	4	5	6
單利終價 (Q)	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030
複利終價 (R)	1.0048674	1.0097586	1.0146738	1.0196129	1.0245757	1.0295627
月　數 (n)	7	8	9	10	11	12
單利終價 (Q)	1.035	1.040	1.045	1.050	1.055	1.060
複利終價 (R)	1.0345744	1.0396103	1.0446707	1.0497555	1.0548633	1.0600000

玆再以圖線表示如下：