

数值天气预报新技术 讲 义

数值天气预报新技术讲习班
一九九三年十月



目 录

半拉格朗日法在数值天气预报中的应用和近年来的发展(廖洞贤)..... 1

大气模式中的网格设计(廖洞贤) 27

迭代加速收敛技术—多重网格法(刘卓) 43

自适应网格在计算地球流体力学中的应用(刘卓) 55

完全能量守恒差分法及其应用(季仲贞,王斌,曾庆存) 68

大气科学问题并行计算方法(王宗皓) 83

NWP 应用卫星探测热辐射新进展(王宗皓) 126

大气可预报性研究的新进展

 一对数值预报效果的预测(纪立人,李志锦) 177

大中尺度大气模式中云降水过程的模拟(胡志晋) 198

原始方程模式的分解算法 218

四维同化的理论和新方法(丑纪范) 230

环流模式中的辐射参数化(赵高祥) 252

半拉格朗日法在数值天气预报中的应用和近年来的发展

廖洞贤

(南京气象学院)

一、引言

众所周知,拉格朗日法和欧拉法是流体力学中描写流体运动的两种方法。在数值天气预报中,长时间以来,人们应用的是欧拉法,用拉格朗日法的很少。但是,这种方法,自从五十年代初以来,就有不少气象学者在简化的基础上进行过研究。比如 Fjortoft(1952,1955)根据正压大气气块绝对涡度守恒和斜压大气位涡度守恒原理,提出过用平均气流代替气块路径的图解法。稍后,Sawyer(1960)和 Okland(1962)又用类似办法进行计算。但是,在这时期,为了求得较精确的结果,Wiin-Nielsen(1959)曾用过追踪方形气块路径的方法。他发现,积分 12 小时后气块有很大变形,以致无法继续计算。这迫使人们不得不采用近似的方法,如‘半拉格朗日法’。^①

所谓‘半拉格朗日法’,是指在积分过程中不对同一气块沿其路径追踪,而是在同一时间步长内追踪终点总是在网格点上的气块。

1962 年,Krishnamurti 提出了气块属性不保守而流场又随时间变化的情况下,用半拉格朗日法积分正压原始方程组的方案。还用它和欧拉法作了比较数值试验。结果表明,数值解和解析解极为一致;在同样的理想的初始场、网格距、时间步长等条件下,用半拉格朗日法制作的 12 小时预报,其所花机时为用欧拉法制作同样预报所花的 1.8—2.8 倍。以后,Sawyer(1963)用正压涡度方程作试验,考虑了实际流场变化,其预报结果,不论系统位置和强度,都比用欧拉法的为好。还证明:把时间步长取作 6 小时后计算仍很稳定。以后,Leith(1965),Mathur(1970,1974)又进行了大量工作。但是,对于原始方程模式,他们所取的时间步长仍和用欧拉法所取的相近,而其所花费的机时则比用欧拉法的要大得多。由于这些情况,半拉格朗日法的发展,受到了极大的限制。

虽然这样,但半拉格朗日法在物理上突出的优点,如物理意义明确,易避免非线性计算不稳定,可以保持某些物理量的守恒性等,它一直不断吸引着气象学者去进行研究。

在我国,廖洞贤(1965)曾按拉格朗日思想设计过差分格式。曾庆存(1978)曾设计过原始方程组的迎风差分格式,和今天所用的方法十分相似。以后,王宗皓设计了一种浮动算法(1981)。他证明:尽管差分格式是显式的,但却是无条件计算稳定的。这些工作对解决前面提到的问题,各有程度不同的贡献。

值得提出的是,最近几年,Robert 等(1982,1986)对半拉格朗日法有较大的发展。在基本保证计算精度的情况下,他们的计算已可在网格距为 190.5 公里时,把原始方面模式的时间步长加大到 1 小时以上。现在,加拿大、爱尔兰已用半拉格朗日法作有限区业务预报。欧

^① 也有人称‘准拉格朗日法’

洲天气预报中心自 1991 年 9 月起已用全球半拉格朗日谱模式 T213L31 作中期预报。

二、加大时间步长的依据

早期的工作虽然对奠定半拉格朗日法的基础有过贡献,但还未克服计算费时的困难,而这正是它能否用于实际的一个关键;对于高分辨率的问题来说,更是如此。看来,问题的核心是,和欧拉法相比,能否稳妥地加大时间步长。从技术上来说,这须要解决两个问题:一是加大时间步长后仍基本上不影响计算精度;二是加大时间步长后仍保持计算稳定,也就是说,要突破 CFL 条件对步长的限制。下面我们就从这两个方面进行分析。

1、时间截断误差

1978 年廖洞贤在用平流方程研究槽脊移速偏慢的问题时曾指出,在一般情况下,移速偏慢主要是空间截断误差造成的。其所以如此,是因为在相应的差分方程中,时间截断误差远小于空间截断误差的缘故。我们知道,蛙跃格式要计算稳定须要满足不等式。

$$|\mu| \leq 1$$

这里, $\mu = u \Delta t / d$, u 是风速, Δt 和 d 各是时间和空间步长。可是在实际工作中,人们为了使这个不等式处处满足,又往往取

$$\mu_{\max} = |u_{\max}| \Delta t / d < 1$$

来选取时间步长。这就使在计算域内绝大部分地区 $\mu \ll \mu_{\max}$ 。用一维的平流方程

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

来考虑。如果用蛙跃格式,以 $-u^2 \partial^2 f / \partial x^2$ 代替 $\partial^2 f / \partial x^2$ 则其总截断误差 T 是

$$T = \frac{-u}{6} d^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (\mu^2 - 1) + O(\Delta t^3, d^3)$$

其中与 $\mu^2 - 1$ 相乘的项各表示时间和空间截断误差。如取 μ_{\max}, u 各为 80、20 米/秒, d 和 Δt 各为 300 公里和 1 小时,则在风速为 u 的地区,时间截断误差只有空间截断误差的 1/171

容易看出,上述结论对于原始方程也适用。如仍采用蛙跃格式,则由于计算稳定性判据须对所有方程所能描述的波均成立,时间步长须按最快波速选取,从而,使对于慢波,其时间截断误差和空间截断误差的对比比在平流方程的情形更大。比如, Kasahara (1982) 曾用正规算出, 9 层模式的正规模的特征波速 C_m 和特征厚度 D_m 如表 1 所示。以 $m=1$ 和 4 的波为例,前者的波速约为后者的 9 倍。因对于 1 维线性化原始方程来说

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi \pm C_m u) \pm C_m \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \pm C_m u) = 0$$

故

$$T = \pm \frac{C_m}{6} d^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\Phi \pm C_m u) (\mu^2 - 1)$$

其中 $\mu = \frac{C_m}{d} \Delta t$ 。易见,这时对于 $m=4$ 的波来说,其时间截断误差约只有其空间截断误差的 1/801

表 1 不同垂直波型的特征厚度和波速

m	1	2	3	4	5	6
D_m (米)	9525	823	215	115	68	31
C_m (米/秒)	305.5	89.8	45.9	33.6	25.8	17.4

2、计算稳定性

1981年王宗皓根据拉格朗日法曾发表过浮动算法,可以在显式情况下是无条件稳定的。

仍考虑方程(1)。

设在 Δt 时间内,气块位移为 δx ,则 $\delta x = u\Delta t$ 。如 δx 可以大于 d ,则 μ 可以大于 1。这时,如 μ 的整数部份是 m ,则其邻近的网格点的坐标是 $i-m$ (如 $u > 0$)。由于

$$F_i^{n+1} = F_{i-m}^n \quad (2)$$

而 F_{i-m}^n 可以通过 $i-m$ 周围诸网格点的 F^n 值插值得到,从而,也得到了 F_i^{n+1} 。这里 $l = x/d, i=1, 2, \dots, n=l/\Delta t, n=1, 2, \dots$ 。比如,在图 1 中,以点 $i-m$ 为中心,用拉格朗日 3 点插值,则有(见附录二中(A32)式)

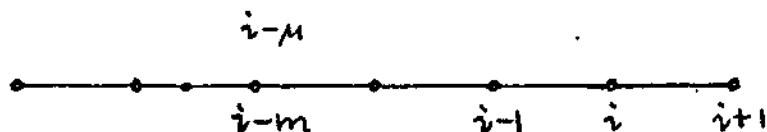


图 1 浮动算法示意

$$F_i^{n+1} = F_{i-m}^n = F_{i+2m}^n + \frac{\sigma}{2}(\delta x + \sigma \delta x x) F_{i+m}^n \quad (3)$$

其中 $\sigma = s(\mu - m)$, 是 μ 的小数部分,

$$s = \begin{cases} 1, & \text{当 } \mu \leq 0 \\ -1, & \text{当 } \mu > 0 \end{cases}$$

$$\delta x(x)_i = (x)_{i+1} - (x)_{i-1}; \quad \delta x x(x)_i = (x)_{i+1} + (x)_{i-1} - 2(x)_i$$

现在,我们来分析格式(2)的计算稳定性。

采用 von Neumann 法。令

$$F_i^n = \hat{F}^{(n)} e^{i(kx - \omega t)} \quad (4)$$

其中 $l = \sqrt{-1}, \theta = kd, k = 2\pi/L, L$ 是波长。

把上式代入(3)式,可以得到

$$\hat{F}^{(n+1)} = G \hat{F}^{(n)} \quad (5)$$

其中

$$G = G_1 G_2,$$

$$G_1 = e^{i(\sigma \theta)}$$

$$G_2 = 1 - \sigma^2(1 - \cos\theta) - i\sigma \sin\theta$$

因 $|\sigma| < 1$, 而

$$|G|^2 = 1 - \sigma^2(1 - \sigma^2)(1 - \cos\theta)^2 \leq 1$$

故格式为无条件稳定。

我们知道,在一般差分格式中,只有隐式格式是无条件稳定的。现在,用显式浮动算法也可以达到这个目的,而且,物理意义比一般隐式更清楚,计算比之要小得多,其优点是显而易见的。

现在,我们来分析格式(2)的截断误差。

显然,这个误差就是 F_T^- 的插值误差。不过,为了比较时间截断误差和空间截断误差,我们也可以把(2)写成

$$F_T^{n+1} = F_T^n - \frac{u \Delta t}{d^*} (F_T^n - F_T^{n-1})$$

其中 $d^* = u \Delta t$ 。令 $\mu^* = u \Delta t / d^* = 1$, 则和上式相当的近似微分方程是

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{u}{2} d^* \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\mu^* - 1) = 0$$

即时间截断误差和空间截断误差是相互抵销的。

浮动算法不仅可以用于平流方程,也可以用于原始方程,这里从略。

浮动算法实际上就是半拉格朗日法,因为如果不用(3)式,而直接用(2)式,并用插值求 F_T^- , 即常用半拉格朗日法。所以,上面的结果也是半拉格朗日法的结果。其实,也很简单, $dF/dt = 0$ 从根本上也保证了无条件稳定。

三、近年来的发展

由于前面的工作和计算机的进步,近年来半拉格朗日法获得了迅速的发展。其中表现在两个方面:一是在实际计算中,对于原始方程模式,时间步长已可取到欧拉法的近 10 倍,而计算稳定,预报结果也相差不大。而且,这种方法已从有限区域模式推广到全球模式和非静力的中尺度模式。这方面有代表性的是加拿大 Robert 等的半拉朗日和半隐式相结合的工作。二是有些工作虽然时间步长比较短,但预报结果一般比用欧拉法得到的较好。这方面有代表性的是美国的 Mathur 的工作。为了节省篇幅,Mathur 的工作从略。

3.1 半隐式半拉格朗日法

1. 浅水波方程

在正形地图投影坐标中,浅水波方程可以写成

$$\frac{d_H u}{dt} = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} + [f + m^2 (v \frac{\partial 1}{\partial x m} - u \frac{\partial 1}{\partial y m})] v, \quad (6)$$

$$\frac{d_H v}{dt} = -m \frac{\partial \phi}{\partial y} - [f + m^2 (v \frac{\partial 1}{\partial x m} - u \frac{\partial 1}{\partial y m})] u, \quad (7)$$

$$\frac{d_H \Phi_T}{dt} = -\Phi_T m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x m} + \frac{\partial v}{\partial y m} \right), \quad (8)$$

其中 $\Phi_T = \Phi - \Phi_0$, Φ_0 是地面位势

$$\frac{d_H}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y})$$

令 $U = u/m, v = v/m$, 并用 $\partial \bar{\phi} / \partial x$ 代替 $\partial \phi / \partial x$ 等, 则

$$\frac{d_H U}{dt} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + fV - K \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{d_H V}{dt} = -\frac{\partial \bar{\Phi}^+}{\partial y} - fU - K \frac{\partial s}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{d_H \varphi_T}{dt} = -\Phi_0 \bar{D}^+ - (\Phi_T - \Phi_0) D \quad (11)$$

其中 $D = s(\partial U / \partial x + \partial V / \partial y)$, $s = m^2$, $K = (U^2 + V^2) / 2$,

$\bar{F} = [F(t - \Delta t) + F(t + \Delta t)] / 2$, Φ_0 是 Φ_T 的平均值, 设为常数。

定义 P_1, P_2, P_3 各是坐标为 $(x, y, t + \Delta t)$, $(x - \Delta x, y - \Delta y, \Delta t)$ 和 $(x - 2\Delta x, y - 2\Delta y, t - \Delta t)$ 的某气块在其路径上的点, 各称作到达点, ‘中点’和‘离开点’(又称上游点)。如各用上标 +, 0, - 表示在相应点上某物理量的值, 则我有如下诸式:

1) 位移

$$\Delta x = \Delta t S^0 U^0 \quad (12)$$

$$\Delta y = \Delta t S^0 V^0 \quad (13)$$

上两式是隐式形式, 可采用迭代法求解。如

迭代公式

$$\Delta x^{(v+1)} = \Delta t s(x - \Delta x^{(v)}, y - \Delta y^{(v)}) \cdot U(x - \Delta x^{(v)}, y - \Delta y^{(v)}, t) \quad (14)$$

$$\Delta y^{(v+1)} = \Delta t s(x - \Delta x^{(v)}, y - \Delta y^{(v)}) \cdot V(x - \Delta x^{(v)}, y - \Delta y^{(v)}, t) \quad (15)$$

其中 v 是迭代次数。

迭代初估值可取作

$$\Delta x^{(0)} = \Delta t s(x, y) \cdot U(x, y, t),$$

$$\Delta y^{(0)} = \Delta t s(x, y) \cdot V(x, y, t),$$

考虑中点一般都不在网格点上, 除 $\Delta x^{(0)}$ 和 $\Delta y^{(0)}$ 外, 在迭代时还须利用中点四周在 $t = t - \Delta t$ 和 t 时刻的 U, V 网格点值进行插值, 以求得中点的 U, V 值。根据经验, 2 次迭代即可。

至于插值, 可以选用附录(二)中的公式或其他合用的公式。

2) 个别微商

$$\frac{d_H F}{dt} \approx \frac{F^+ - F^-}{2\Delta t} \quad (16)$$

3) 差分方程组

$$(U + \Phi_0 \Delta t)^+ = P_u + 2\Delta t r_u, \quad (17)$$

$$(V + \Phi_0 \Delta t)^+ = P_v + 2\Delta t r_v, \quad (18)$$

$$(\Phi_T + \Phi_0 D \Delta t)^+ = P_\phi + 2\Delta t r_\phi, \quad (19)$$

其中 $P_u = (U - \varphi_0 \Delta t)^-$, $P_v = (V - \varphi_0 \Delta t)^-$, $P_\phi = (\varphi_T - \varphi_0 D \Delta t)^-$,

$$r_u = (fV - KS_x)^0, r_v = -(fU + KS_y)^0, r_\phi = -(\varphi_T - \varphi_0) D^0$$

消去 D^+ , 我们可以得到 Helmholtz 方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varphi_0 s \Delta t^2}\right) \varphi^+ = \frac{1}{\varphi_0 s \Delta t^2} [-P_\phi + \varphi_0 s \Delta t \{ (P_u)_x + (P_v)_y \} + 2\Delta t \{ -r_\phi + \varphi_0 s \Delta t \{ (r_u)_x + (r_v)_y \}] \quad (20)$$

在一定边界条件下解上方程, 可以求得 Φ^+ ; 再代入(17)和(18)式, 即可求得 U^+ 和 V^+ 。

不过,和求位移的情形一样,在计算 P_s, r_s 等时也要进行插值。McDonald(1987)曾用理论证明:求位移时对风的插值精度应比对物理量的插值精度低一阶。但 Staniforth 和 Pudy-kiewicz(1985)认为:当用 3 次插值求物理量时,用线性插值求位移已足够。

现在,我们来分析方程(17)–(19)的计算稳定性。

当简便起见,设 $f=2\Omega, m=1,$

$$U=U^*+U'E$$

$$V=V'E$$

$$\varphi=\varphi^*+\varphi'E$$

$$\varphi_r=\varphi_0+\varphi'E$$

其中, $\varphi_0=\varphi-\varphi_r=\varphi^*-\varphi_0, U^*=\text{常数}$ 且

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y}=-2\Omega U^*$$

如再设 E 具有形式

$$E=e^{i(\omega t+kx+ly)}$$

则

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{1}{\Delta t} E^* \sin(\omega \Delta t + k \Delta x + l \Delta y)$$

$$\bar{E} = E^* \cos(\omega \Delta t + k \Delta x + l \Delta y)$$

代入方程(17)–(19)则有

$$\frac{1}{\Delta t} U' \hat{s} - 2\Omega V' \hat{c} + l k \varphi' \hat{c} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{\Delta t} V' \hat{s} + 2\Omega U' \hat{c} + l \varphi' \hat{c} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi' \hat{s} + l \varphi_0 (k U' + l V') \hat{c} = 0 \quad (23)$$

其中

$$\hat{s} = \sin(\omega t + k \Delta t + l \Delta y) \approx \sin[(\omega + k U^*) \Delta t],$$

$$\hat{c} = \cos(\omega t + k \Delta t + l \Delta y) \approx \cos[\Delta t(\omega + k U^*)],$$

欲方程组(21)–(23)有非零解,须其系数行列式为零。这样,可以得到频率方程

$$\hat{s} \{ \hat{s}^2 - \hat{c}^2 [4\Omega^2 \Delta t^2 + \varphi_0 (k^2 + l^2) \Delta t^2] \} = 0 \quad (24)$$

解上方程,则有

$$\omega = -k U^* \quad (25)$$

$$\omega = -k U^* \pm \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} [4\Omega^2 \Delta t^2 + \varphi_0 (k^2 + l^2) \Delta t^2]^{1/2} \quad (26)$$

(25)和(26)式表明: ω 是实数。故解是无条件计算稳定的。

利用差分方程(17)–(20),Robert取 $d=190.5$ 公里(在标准纬度 $\varphi=60^\circ\text{N}$ 处), $t=1$ 小时和 2 小时,分别在极射赤道投影图上,以 1981 年 8 月 30 日 12 时(世界时)和 1981 年 9 月 4 日 12 时(世界时)的 500hPa 资料作初始场,作了北美范围有限区 48 小时预报试验。在计算过程中,所有空间差商均用 4 阶差商,插值也是 4 阶精度的。在边界上设风的法线

分量不随时间变化,法向位势梯度维持地转平衡,也不随时间变化,切向风和其最近内点上的相同。在边界附近的内点上,为了消除由于边界条件产生的噪音,采用了强扩散。但在其他区域没有加人工扩散。初值取无辐散风,用平衡方程反解位势高度。计算时没有考虑地形。结果表明,取 $\Delta t=1$ 小时和2小时都很稳定,也都很接近。

2、多层原始方程

在绝热和无摩擦的情况,斜压原始方程组可以写成

$$\frac{du}{dt} - fV \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + RT \frac{\partial P}{\partial x} + K \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{dV}{dt} - fU \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + RT \frac{\partial P}{\partial y} + K \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dT'}{dt} - \frac{RT'}{C_p} \left(\frac{dP}{dt} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{dP}{dt} + D + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \sigma} = - \frac{RT'}{\sigma} \quad (31)$$

其中 $P = \ln p$, $\sigma = p/p_0$, p_0 是地面气压, $T = T^* + T'$, T^* 是常数, $\varphi' = \varphi - \varphi^*$, $\varphi^* = \varphi_0 + RT^* \ln \frac{1}{\sigma}$ 。设在 $\sigma = \sigma_1, 1$ 处

$$\dot{\sigma} \equiv 0 \quad (32)$$

$$G = \varphi' + RT^* P \quad (33)$$

利用(16)式并用 $\overline{G}_i, \overline{D}_i, \overline{\partial \sigma' / \partial \sigma}, \overline{\sigma}'$ 分别代替 $G_i, D, \partial \sigma' / \partial \sigma, \sigma'$, 则有

$$\left(U + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta t \right)^+ = Q_1 \quad (34)$$

$$\left(V + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta t \right)^+ = Q_2 \quad (35)$$

$$\left(T' - \gamma p - \gamma \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \Delta t \right)^+ = Q_3 \quad (36)$$

$$\left(P + \left(D + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \Delta t \right)^+ \right) = Q_4 \quad (37)$$

应用(31)和(33), 还有

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = - \frac{RT'}{\sigma} \quad (38)$$

其中 $\gamma = RT^* / C_p$,

$$Q_i = (P_i)^- + 2 \Delta t (\tau_i)^0, i = 1, 2, 3, 4 \quad (39)$$

$$P_1 = U - \Delta t \frac{\partial G}{\partial x},$$

$$P_2 = V - \Delta t \frac{\partial G}{\partial y},$$

$$P_3 = T' - \gamma p + \gamma \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \Delta t,$$

$$P_1 = P - \Delta t (D + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma});$$

$$r_1 = -\sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma} + fV - RT' \frac{\partial P}{\partial x} - K \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$r_2 = -\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} + fU - RT' \frac{\partial P}{\partial y} - K \frac{\partial s}{\partial y},$$

$$r_3 = -\sigma \frac{\partial T'}{\partial \sigma} + \frac{RT'}{C_p} \left\{ \frac{\sigma}{1-\sigma_1} \int_{\sigma_1}^1 (\vec{V}_H \cdot \nabla P + D) d\sigma + \vec{V}_H \cdot \nabla P \right\},$$

$$r_4 = 0$$

$$\vec{V}_H \cdot \nabla P = S(U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y})$$

利用(38)消去热力学方程(36)中的 T' , 有

$$\left(\frac{\sigma^2}{R\gamma} + \sigma P + \sigma \Delta t \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^+ = -\frac{\sigma Q_3}{\gamma},$$

于是,通过(37)上式可以化为

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma^2}{R\gamma} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^+ - D^+ \Delta t = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma Q_3}{\gamma} \right) - Q_4$$

再通过(34), (35), 消去 D^+ , 则可以得到 3 维 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma^2}{Rr} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)^+ + \Delta t^2 s \nabla^2 G^+ = H \quad (40)$$

$$\text{其中 } H = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma Q_3}{\gamma} \right) - Q_4 + \Delta t s \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right), \quad (41)$$

解上方程需要水平侧边界条件(如果是有限区域预报的话)和垂直边界条件。对于套网格预报来说,水平侧边界条件可以由全球(或半球)模式提供。垂直边界条件可以作如下考虑。

因为在 $\sigma=1$ 和 σ_1 处 $\sigma \equiv 0$, 通过热力学方程和静力方程(38)和(33)式,我们有:

在 $\sigma=\sigma_1$ 处

$$\frac{\sigma}{R} \frac{\partial G^+}{\partial \sigma} + \frac{1}{C_p} G^+ = -Q_3 + \frac{\varphi^+}{C_p} \quad (42)$$

在 $\sigma=1$ 处

$$\frac{1}{R} \frac{\partial G^+}{\partial \sigma} + \frac{1}{C_p} G^+ = -Q_3 \quad (43)$$

所以,(42),(43)是混合型边界条件。求解时,上二式右端应当是已知的,故 φ^+ 也应由全球(或半球模式)模式提供。

求得了 G^+ 后,从(34),(35)式可以求得 U^+ 和 V^+ , 并从而求得 D^+ 。对(37)式作从 1 到 σ_1 的垂直积分可以求得 P^+ ; 从方程(38)可以求得 T' 。

3、不插值方案

从上面的工作可以看出,尽管半隐式半拉格朗日方法可以取较长的时间步长,以致比一般显式的长到近十倍。可是,每步在计算路径、插值、解 3 维 Helmholtz 方程等上花费的时间很多,而且,由于插值带来的平滑作用也会使预报质量多少受到影响。这就降低了这法的优越性。为了消除插值,Ritchie(1986)提出了一个不用插值的方案。现简述如下。

考虑方程

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = R(x, t) \quad (44)$$

其中 u 是基本气流, 设为常数, 因

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\hat{P}d}{2\Delta t} \frac{\partial F}{\partial x} = -u' \frac{\partial F}{\partial x} + R(x, t) \quad (45)$$

写成离散形式, 则有

$$\frac{F(x_i, t + \Delta t) - F(x_i - \hat{P}d, t - \Delta t)}{2\Delta t} = (R - u' \frac{\partial F}{\partial x}) |_{(x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, t)} \quad (46)$$

其中 \hat{P} 是最接近 $2u\Delta t$ 的整数值, $u' = u - \frac{\hat{P}d}{2\Delta t}$.

从上式容易看出, $(x_i - \hat{P}d, t - \Delta t)$ 在网格点上, 在点 $(x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, t)$ 的 $R - u' \frac{\partial F}{\partial x}$ 也可以通过在网格点上的物理量进行计算。注意这时须 \hat{P} 为偶数, 如 \hat{P} 为奇数, 我们不妨用近似值, 如邻近两网格点值的算术平均来代替等。因为 $\hat{P}d$ 很近似于 $2u\Delta t$, $u' \ll u$, 方程(46)近似于方程(44)。上述算法仍应当认为是半拉格朗日法。

不插值方案可以应用于原始方程(9)~(11)。以浅水波方程为例。

$$\hat{P} = \text{NINT} \left[\frac{2\Delta t}{d} (m^2 U) \left(x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, y_i - \frac{\hat{Q}d}{2}, t \right) \right] \quad (47)$$

$$\hat{Q} = \text{NINT} \left[\frac{2\Delta t}{d} (m^2 V) \left(x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, y_i - \frac{\hat{Q}d}{2}, t \right) \right] \quad (48)$$

其中 NINT 表示最接近的整数。注意, (47), (48) 表示取整数的位移的隐式关系, 可以用迭代法求解。

求得 \hat{P} 和 \hat{Q} 后, 浅水波方程组(9)~(11) 或为

$$\begin{aligned} & (U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t)(x_i, y_i, t + \Delta t) \\ &= (U - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t)(x_i - \hat{P}d, y_i - \hat{Q}d, t - \Delta t) \\ & \quad + 2\Delta t [fV - K \frac{\partial s}{\partial x} (U' \frac{\partial U}{\partial x} + V' \frac{\partial U}{\partial y})] (x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, y_i - \frac{\hat{Q}d}{2}, t), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & (V + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t)(x_i, y_i, t + \Delta t) \\ &= (V - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t)(x_i - \hat{P}d, y_i - \hat{Q}d, t - \Delta t) \\ & \quad + 2\Delta t [-fU - K \frac{\partial s}{\partial x} (U' \frac{\partial V}{\partial x} + V' \frac{\partial V}{\partial y})] (x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, y_i - \frac{\hat{Q}d}{2}, t), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & (\varphi_r + \varphi_0 D \Delta t)(x_i, y_i, t + \Delta t) \\ &= (\varphi_r + \varphi_0 D \Delta t)(x_i - \hat{P}d, y_i - \hat{Q}d, t - \Delta t) \\ & \quad + 2\Delta t [-(\varphi_r - \varphi_0) D - (U' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V' \frac{\partial \varphi}{\partial y})] (x_i - \frac{\hat{P}d}{2}, y_i - \frac{\hat{Q}d}{2}, t), \end{aligned} \quad (51)$$

令

$$(U + \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x})(x_i, y_j, t + \Delta t) = Q_1, \quad (52)$$

$$(V + \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial y})(x_i, y_j, t + \Delta t) = Q_2, \quad (53)$$

$$(\varphi_T + \Delta t_0 D)(x_i, y_j, t + \Delta t) = Q_3, \quad (54)$$

并消去 U, V 和 D , 我们可以得到 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_T}{\partial y^2} - \frac{1}{\Delta t^2 \varphi_0 S} \varphi_T = \frac{1}{\Delta t} (\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2}) - \frac{Q_3}{\Delta t^2 \varphi_0 S},$$

这里 Q_1, Q_2, Q_3 各是(49), (50), (51)式的右端项。

在一定边界条件下求得 Helmholtz 方程(55)的解 $\varphi_T(x_i, y_j, t + \Delta t)$ 后, 再通过(52)和(53)式, 可以求得 $U(x_i, y_j, t + \Delta t)$ 和 $V(x_i, y_j, t + \Delta t)$ 的解。

现在, 我们来分析不插值方案引起的波速变化。取

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{1}{2d} [F(x_i - \frac{pd}{z} + d, t) - F(x_i - \frac{pd}{z} - d, t)], & \text{当 } p = \text{偶数} \\ \frac{1}{d} [F(x_i - \frac{pd}{z} + \frac{d}{2}, t) - F(x_i - \frac{pd}{z} - \frac{d}{2}, t)], & \text{当 } p = \text{奇数} \end{cases}$$

我们可以在 $R(x, t) \equiv 0$ 时, 考虑方程(44)。设其有

$$F = Ae^{h(x-ct)} \quad (56)$$

形式的解, 则可以得到波速 \tilde{C} 的表达式

$$\tilde{C} = \begin{cases} \frac{pd}{2\Delta t} + \frac{1}{k\Delta t} \sin^{-1}(\frac{u'\Delta t}{d} \sin kd), & \text{当 } p = \text{偶数} \\ \frac{pd}{2\Delta t} + \frac{1}{k\Delta t} \sin^{-1}(2 \frac{u'\Delta t}{d} \sin kd), & \text{当 } p = \text{奇数} \end{cases} \quad (57)$$

如 kd 很小, 可用如下近似式代替上式, 即

$$\tilde{C} = \begin{cases} u - u' [1 - (\frac{u'\Delta t}{d})^2] \frac{(kd)^2}{6}, & \text{当 } p = \text{偶数} \\ u - u' [\frac{1}{4} - (\frac{u'\Delta t}{d})^2] \frac{(kd)^2}{6}, & \text{当 } p = \text{奇数} \end{cases} \quad (58)$$

根据 p 的定义, 易见

$$\left| \frac{u'\Delta t}{d} \right| \leq \frac{1}{4}$$

故(58)式右端方括号中的量总为正。当 $u' > 0$ 时, \tilde{C} 总比准确解的为小; 当 $u' < 0$ 时, \tilde{C} 总比准确解的为大。但是, 这样引起的波速误差并不严重。比如, 当 $p = \text{偶数}$ 时, 用(57)式计算波长为 $2d$ 到 $6d$ 的波, 用(58)式, 计算较长的波, 把其和用蛙跃格式的结果进行比较, 可以得到表 1。从表中可以看出, 对于较长的波(如波长在 $8d$ 以上), 波速比 \tilde{C}/c 相差不大, 但对于短波, 则不插值方案明显优于蛙跃格式, 即使对于 2 倍格距的波, 不插值方案仍有一定的精度。

表 1 不插值方案和蛙跃格式的波速比 \tilde{C}/C

波长(d)		2	4	6	8	10
不插值方案		0.75	0.91	0.99	0.98	0.99
蛙跃	u=0.2	0.00	0.64	0.83	0.90	0.93
格式	u=0.4	0.00	0.66	0.84	0.91	0.94

注: C 是准确解的波速

不过, 尽管 Ritchie 的不插值方案有如上所述的许多优点, 但由于对 P 为奇或偶数的不同所取的 $\partial F/\partial x$ 的近似式不一致, 会使 $-U' \partial U/\partial x$ 等的计算所引起的截断误差分布不连续, 从而引起计算波, 这是不可不注意的。

4. 二时间层格式

上面都是用三个时间层的格式。最近几年 McDonald (1986) 等还发展了二时间层格式, 可以大量减少运算和存储量。

如取

$$\frac{dF}{dt} \approx \frac{1}{\Delta t} [F(x, y, t + \Delta t) - F(x - \Delta x, y - \Delta y, t)]$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2} [f(x, y, t + \Delta t) + F(x - \Delta x, y - \Delta y, t)]$$

而位移 $\Delta x, \Delta y$ 各表示为

$$\Delta x = \Delta t s(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}) U(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}),$$

$$\Delta y = \Delta t s(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}) V(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}),$$

则前面的浅水模式和多层原始方程模式都可以改成二时间层格式。这里

$$U(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}),$$

$$\approx \frac{3}{2} U(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t) - \frac{1}{2} U(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t - \Delta t)$$

$$V(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}),$$

$$\approx \frac{3}{2} V(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t) - \frac{1}{2} V(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, t - \Delta t)$$

用 Taylor 级数展开, 可以证明, 上两式的截断误差各是 $O(\Delta t^2)$ 。

3.2 分解半拉格朗日方法

分解算法是数值天气预报中常用的方法之一。但它不论在数学上和物理上都还存在着一些缺陷。在数学上如果用二时间层格式, 则时间截断误差为 1 阶, 如采用三时间层格式, 则有差分格式和微分方程不相容的可能。同时, 在物理上由于把适应过程和平流过程截然分开, 使二者相互依存, 转换的作用不能得到较好的考虑。1983 年 Tatsumi 提出了可以同时考虑这两种过程的方法; 以后, Purser 和 Leslie (1991) 又把这种思想和半拉格朗日

法相结合,提出了所谓的分解半拉格朗日法。下面是他们提出的浅水方程的方案^①。

1、方程的分解

不考虑地形,描写适应过程和平流过程的方程可分别写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = fV - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (59)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -fU - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (60)$$

$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial t} = -D \quad (61)$$

和

$$\frac{dU}{dt} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{d \ln \varphi}{dt} = 0 \quad (64)$$

于是,分解半拉格朗日法可写为如下两种形式:

1、方法一

令适应阶段和平流阶段的时间步长各为 δt 和 Δt , $\delta t = \Delta t/M$, M 是一大于 1 的正整数。

在适应阶段

采用向前向后格式,即

$$U^{i,m} = U^{i,m-1} + \delta t \left(fV - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{i,m-1} \quad (65)$$

$$V^{i,m} = V^{i,m-1} - \delta t \left(fU - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{i,m-1} \quad (66)$$

$$\ln \varphi^{i,m} = \ln \varphi^{i,m-1} - \delta t D^{i,m} \quad (67)$$

$$m = 1, \dots, M$$

在平流阶段

采用半拉格朗日法,即

$$U^{i+1,0} = U^{i,M} + F_u^{i+1} \quad (68)$$

$$V^{i+1,0} = V^{i,M} + F_v^{i+1} \quad (69)$$

$$\ln \varphi^{i+1,0} = \ln \varphi^{i,M} + F_\varphi^{i+1} \quad (70)$$

其中

$$F^{i+1} = \psi_x^{i,m} - \psi_x^{i,m} \quad (71)$$

F 表示 F_u, F_v 或 F_φ ; ψ 表示 U, V 或 $\ln \varphi$ 。

2、方法二

$$\text{在适应阶段 } U^{i,m} = U^{i,m-1} + \delta t \left(fV - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{i,m-1} + \frac{1}{M} F_u^{i+1} \quad (72)$$

^① 为清楚起见,编者对他们的方法作了补充,并稍加修改。

$$V^{n,m} = V^{n,m-1} - \delta t (fU + \frac{\partial \varphi}{\partial y})^{n,m-1} + \frac{1}{M} F_v^n, \quad (73)$$

$$\ln \varphi^{n,m} = \ln \varphi^{n,m-1} - \delta t D^{n,m} + \frac{1}{M} F_p^n, \quad (74)$$

在平流阶段

$$U^{n+1,0} = U^{n,m} + F_u^{n+1} - F_u^n \quad (75)$$

$$V^{n+1,0} = V^{n,m} + F_v^{n+1} - F_v^n \quad (76)$$

$$\ln \varphi^{n+1,0} = \ln \varphi^{n,m} + F_p^{n+1} - F_p^n \quad (77)$$

根据 Purser 等的试验,他们认为:方法二比方法一好,好处有三:

- (1)、用以实际资料作基础的,以高分辨率模式的 100 个预报个例为对照,作的比较试验表明,方法二的计算结果均方根误差比方法一为小;
- (2)、在预报期中方法一因分解引起的噪音在方法二中大为减小;
- (3)、在资料同化中因分解算法产生的初始化问题大为削弱。

四、全球预报

4.1 计算中出现的问题

半拉格朗日法原则上可以直接应用于全球预报。但是,由于地球的球性和极点的奇异性,计算时遇到了在直角坐标中未曾遇到过的困难,须要进行特殊处理。现叙述如下。

1. 极地附近严重的预报误差

Ritchie(1988)曾用半隐式半拉格朗日全球浅水方程进行过预报试验。他发现,在极地附近往往有较大的预报误差,后来,McDonald 和 Bates(1989)也得到类似结论。1990年 Deharnais 和 Robert 用球面区域浅水模式进行 5 天积分并进行分析,再一次证实了这个问题并指出了问题的严重性。根据计算结果,他们发现在极地附近有强烈的计算波存在。尽管他们引用了抑制高频重力波的非线性正规化初始化措施并采用时间过滤技术,但计算波仍随时间增强,且相对涡度的符号变化极快(图 2)。显然,这是和实况不符的,也是和浅水模式的性质不符的。

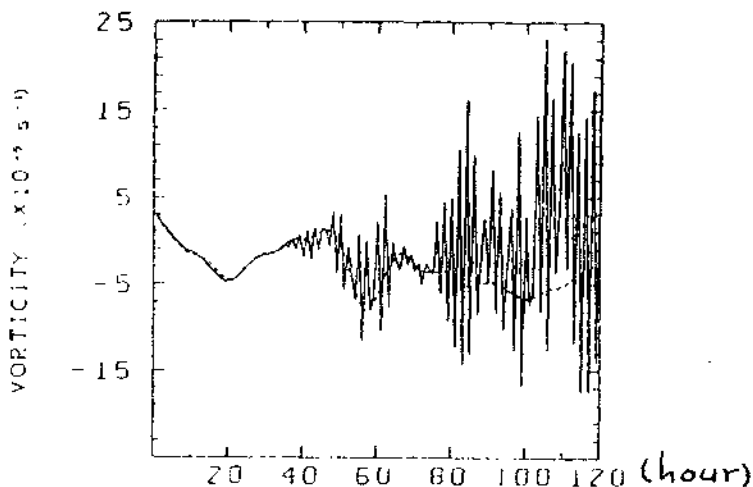


图2 在北极圈内某点相对温度随时间的变化

经过分析,他们认为:这种现象是由于在极地附近纬圈曲率很大,用瞬时切纬圈的纬向风分量沿纬圈计算纬向位移,在较长时间步长内,计算的会和实际的有较大的偏差造成的。因此,在高纬地区,对于位移计算,须采用另外的办法。

2. 极点的风的处理

众所周知,在极点处风没有定义,在用欧拉法积分全球模式或包含极点在内的有限区域模式时一般都要进行特殊处理,在用半拉格朗日法时也不例外。对此,已有一些文献提出过解决办法。现在我们举两个作为参考。

(1)、定义

$$(U, V) = (u, v) \cos \varphi \quad (78)$$

以代替实际风分量,和很多谱模式的做法一样。不过,由于计算中经常要估计位移,用 U, V 作预报变量比用 ζ, D 来得方便。因而,预报方程也应作适当的变化。

(2)、设极点的邻域内风为常量,域内某一点的风的分量可以写作

$$u_p = V_0 \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (79)$$

$$v_p = V_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \quad (80)$$

其中 V_0 是风的大小, λ_0 是当风向(指向极地)和经线一致时观测站所在的经度。

如果这样的风不只一个,则可以取其空间平均或其最接近极地的一个。

不过,在极地附近地区,计算曲率项会遇到困难,这可以用旋转坐标的方法,使计算在新坐标中进行而获得解决(见 4.4 节)。

4.2 预报方程

考虑定义(78)用得比较广泛,我们就采用它们作为预报方程的预报变量。

在没有地形起伏的情况下,考虑地球的球性浅水方程可以表示为

$$\frac{dU}{dt} = fV - \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (81)$$

$$\frac{dV}{dt} = fU - \frac{1 - \mu^2}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{2\mu}{a} K \quad (82)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi D \quad (83)$$

其中

$$\mu = \sin \varphi, K = (U^2 + V^2) / 2(1 - \mu^2)$$

$$D = \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \left[\frac{\partial U}{\partial \lambda} + (1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right]$$

如果把上方程组用在有限区域,作变换

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

并令 $m = \sec \varphi$, 在不对气压梯度力项,散度项进行时间平均处理时,所得到的方程组和在地图投影直角坐标中的方程组(9)–(11)在形式上完全一样。

4.3 离散化的预报方程和位移公式

方程(81)–(83)时间离散后成为

$$(U + \frac{1}{a}\varphi_0^+)^+ = P_0 + 2\Delta \text{tr}_0 \quad (84)$$

$$(V + \frac{1-\mu^2}{a}\varphi_0^+)^+ = P_v + 2\Delta \text{tr}_v \quad (85)$$

$$(\varphi' + \varphi_0 D \Delta t)^+ = P_\varphi + 2\Delta \text{tr}_\varphi \quad (86)$$

消去 U^+, V^+, D^+ , 可以得到 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 - \frac{a^2}{\varphi_0 \Delta t^2})\varphi^+ = \frac{a^2}{\varphi_0 \Delta t^2} H \quad (87)$$

其中

$$P_u = (U - \frac{1}{a}\varphi_0^+)^-, P_v = (V - \frac{1-\mu^2}{a}\varphi_0^+)^-, P_\varphi = (\varphi' - \varphi_0 D \Delta t)^-,$$

$$r_u = fV^0, r_v = -(fU + \frac{2\mu}{a}K)^0, r_\varphi = -(\varphi' D)^0$$

$$H = H^1 + H^2$$

$$H_1 = -P_u + \frac{\varphi_0 \Delta t}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial P_u}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_v}{\partial \mu} \right),$$

$$H_2 = -r_\varphi + \frac{\varphi_0 \Delta t}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial r_u}{\partial \lambda} + \frac{\partial r_v}{\partial \mu} \right),$$

$\varphi' = \varphi - \varphi_0$, φ_0 是 φ 的平均。

至于位移 $\Delta\lambda, \Delta\varphi$, 则可以用迭代公式

$$\Delta\lambda^{n+1} = \frac{\Delta t}{a \cos \varphi^n} u \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda^n}{2}, \varphi - \frac{\Delta\varphi^n}{2}, t \right) \quad (88)$$

和

$$\Delta\varphi^{n+1} = \frac{\Delta t}{a} v \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda^n}{2}, \varphi - \frac{\Delta\varphi^n}{2}, t \right) \quad (89)$$

求解。其中 n 表示迭代次数。

不过, 由于前面所提到理由, 公式(88)和(89)不能直接在高纬地区应用, 须进行专门处理。在下节中我们将讨论这个问题。

4.4 在高纬地区位移的计算

前面讲过, 在高纬, 特别是极点附近地区, 由于纬圈曲率很大, 用一般位移公式计算位移会出现较大的误差。为此 Ritchie(1988), Cote(1988), McDonald 和 Bates(1989)都提出过解决这一问题的方法。下面我们就 McDonald 等的方法进行叙述, 作为读者的参考; 也可以从参考文献查阅其他作者的方法。

McDonald 和 Bates 的主要思想是: 通过旋转坐标把气块位置转换到新坐标中纬圈曲率较小的低纬度地区, 从而, 可以利用公式(88), (89)较精确地算出位移 $\Delta\lambda, \Delta\varphi$ 。其具体办法是:

设高纬地区某一网格点 C 的坐标是 (λ_1, φ_1) 。如有一旋转坐标 (λ', φ') 使 C 点位于 $\lambda' = 0, \varphi' = 0$ 处且单位矢量 \vec{i}', \vec{j}' 和原坐标系的单位矢量 \vec{i}, \vec{j} 重合。根据附录一中(A14), (A15)式可以看出, 要满足上述要求须

$$\lambda_0 = \lambda_1 \quad (90)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad (91)$$