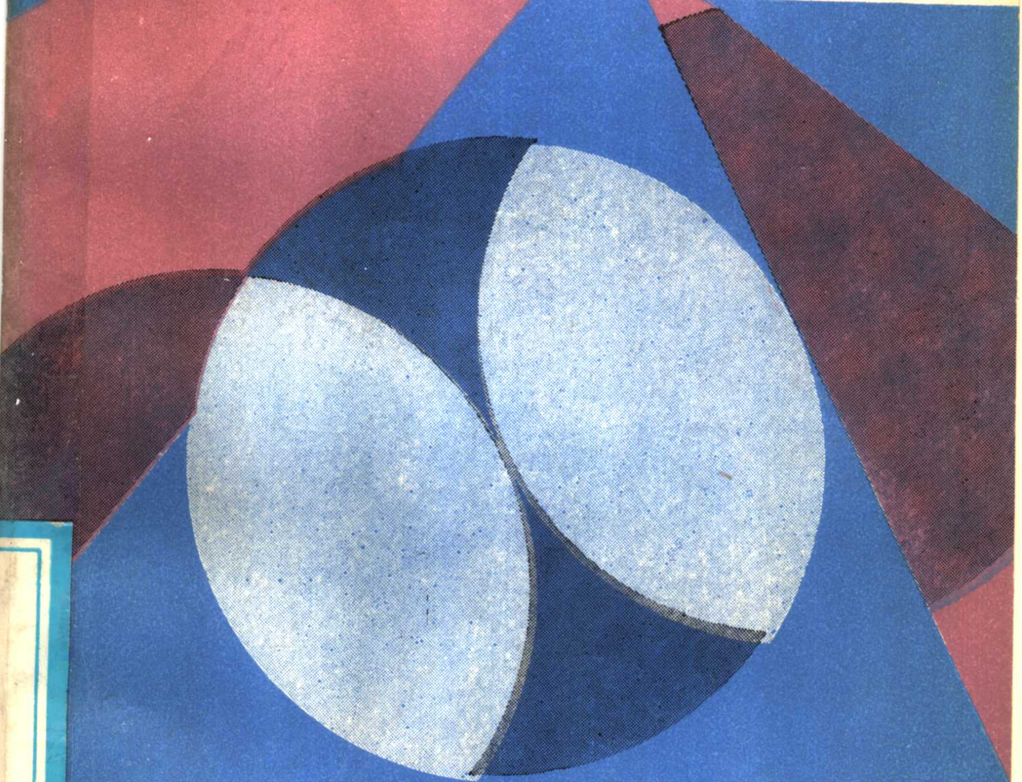
ZhXShX

中学数学丛书

冯家柱

有理数与整式



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

有理数与整式

冯　家　柱

湖　北　教　育　出　版　社

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》。本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

有 理 数 与 整 式

冯家柱　孙惠芝

●

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北教育出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 6.5印张 1插页 148,000字

1986年6月第1版 1986年6月第1次印刷

印数：1—4,300

统一书号：7306·279　定价：1.00元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

第一章　有理数

在自然数集中，加法、乘法运算总能施行，而乘法的逆运算——除法并不总能施行；引进了分数后，就解决了这个矛盾．恩格斯指出："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得出来的．"（《反杜林论》）在小学算术里，学过自然数、零和分数的概念及它们的大小比较、运算法则等，这都是从实践中产生和发展的，并在实践中有广泛的应用．

随着科学的发展，数的概念曾不断地扩充，例如为了表示具有相反意义的量及使加法的逆运算——减法永远能施行，就需要引进新数，扩充自然数集为整数集．数的概念的扩充更深刻地揭示了数的运算的本质及其规律．

在这一章，我们将在自然数、零和正分数的基础上引进负数，把数集扩充为有理数集，并研究有关的概念，运算法则和性质，使我们对于数的认识加深一步，为以后进一步的学习打下扎实的基础．

通过这一章的学习，我们会初步明白数系的每一次扩充，既是为解决数学与其应用的矛盾，为自然数不能表示某些均分的结果或测量的结果；也是由于数学本身内部的矛盾运动，特别是为解决"逆运算"不能总施行和方程无解的矛盾．这两者往往是很协调一致的，有时也有个先后之别．旧数集扩充到新数集应遵循：新数集能解决旧数集不能解决的某些矛盾．为此就得增添新的元素，使旧数集是新数集的真子集（集 A 中所有的数，都被包含在集 B 中，而集 B 中所有的数，却不能都被包含

在集 A 中，称集 A 是集 B 的真子集.）同时新数集里定义的一些性质、关系和运算方法与旧数集中定义的性质、关系和运算方法无矛盾，且旧数集中的主要性质仍然成立.

§1. 有理数的概念

（一）具有相反意义的量

在实践中，常遇到一些意义完全相反的量.

例如：某学校上学期毕业了学生 623 人，这学期招收进来了新生 596 人；某天商店里买进饼干 120 斤，卖出 36 斤等.

这些问题中的“毕业出去”与“招收进来”；“买进”与“卖出”等都表示完全相反的意义.

应注意，要识别这些相反的意义，得首先确定一个“基准”. 如上例中它们的“基准”分别是“学生的不出不进”，“饼干的不买不卖”等.

又例如：要比较武汉与外地的温度，如果某天武汉是 34 度（本书中温度单位都是摄氏），北京是28度，这时武汉的温度比北京高 $34-28=6$（度）. 一般把这个相差的温度叫温差. 这时如果广州是 36 度，要计算武汉与广州的温差 $34-36=?$ 用自然数、零或正分数就无法表示，怎么办？从实际情况看应有 34 度比 28 度高 6 度；34 度比 36 度低 2 度. 高与低是意义相反的.

还要注意并不是所有的量都具有相反意义，如做数学作业用了 40 分钟，书架上有 120 本书等，这些量都不具有相反意义，它们只需用算术数来表示.

（二）正数和负数、数零、相反数

1．正数和负数

从历史上看，我国在两千年前就有人提出了正负数，是世界上使用负数最早的国家，在《九章算术》第八章方程里提出了“正负术”，完整地叙述了正负数的加减运算法则，其中说到的加法法则是“异名相除，同名相益……”减法法则是“同名相除，异名相益……”（相除或相益分别指绝对值相减或相加）．国外最早引入负数的是印度的布拉默克塔，他于公元628年左右用正数表示财产，负数表示欠债；并提出了负数的四则运算．经过了漫长的历史进程，负数才逐渐被人们认识、理解和接受．

怎样把一对相反意义的数量用数表示出来呢？只用算术数①是无法解决的，它只能表示量的大小，不能同时表示量的相反意义，必须扩充数集，引入新数，明确表示出具有相反意义的量．可以用算术数（除零外）前面放上“+”（读作“正”）号或直接用算术数（除零外）即正号可以省略不写，表示的就叫正数．表示与正数表示的量相反意义的量的新数，就在算术数（除零外）前面加“-”（读作“负”）号表示，就叫负数．

我们就把一种意义的量规定为正，而把与之有相反意义的量规定为负．如将向东方向规定为正，则向西方向就规定为负了．如向东3里就记作+3里或3里，向西3里就记作-3里．当然，在具有相反意义的两种量中，究竟规定哪一种意义为正的，并不是绝对的．如在刚才的例中我们也可以规定向西3里

---

① 为了叙述的方便，在这本小册子中把小学中学过的数称为算术数。

为 + 3 里，向东 3 里为 - 3 里. 总之，把一种意义规定为正以后，另一种与它相反的意义就必须规定为负，决不能同时规定为正(或负). 但是，在处理实际问题中，所作的规定应合于习惯使用方便.

表示正数与负数的记号"+"与"-"称为数的性质符号，它们虽然形式上与加减号一样，但这并不是指的运算的意思. 数的正负性质符号和数的加减运算符号能否统一起来呢?这一点，学习了"有理数的加减法"后就会清楚的.

例 1 要在一块钢材上钻一内径为 15 毫米的孔，规定加工后内径的最大尺寸不能比 15 毫米大 0.02 毫米，最小尺寸不能比 15 毫米小 0.01 毫米，试用正负数表示所允许的偏差.

解 以 15 毫米作为标准，比 15 毫米大多少毫米和小多少毫米是相反意义的量，可用正负数表示如下：

大 0.02 毫米记作 + 0.02 毫米，

小 0.01 毫米记作 - 0.01 毫米.

在图纸上一般用 $\phi 15^{+0.02}_{-0.01}$ 来表示，这里右上角数字 + 0.02 叫上偏差，右下角数字 - 0.01 叫下偏差(单位都是毫米).

2. 零

在定义正负数时，往往提到"除零外"，我们规定数零既不是正数，也不是负数，这样的数是唯一的"中性数"，它是正数和负数的"分界数". 数零表示"数量没有"和"基准"，其中表示"数量没有"是明显的，而怎样表示"基准"呢? 例如：0 度不是表示没有温度，而是我们规定表示在标准大气压下纯水结成冰时的一个确定的温度. 它常常作为温度取正、负数值的基准.

3. 相反数

正数和负数是现实世界中具有相反意义的量在数学上的反映. 由具有相反意义的量引进负数以后，对任一个数，总可以

找出与它仅符号相反的数来，如 -5 与 $+5$，$+0.12$ 与 -0.12，$-7\frac{1}{8}$ 与 $+7\frac{1}{8}$ 等分别是一对仅符号不同的数. 象这样仅符号不同的两个数，叫做互为**相反数**. -5 与 5 互为相反数，可以认为 -5 是 5 的相反数；5 也是 -5 的相反数. 应特别注意，这里指的是仅符号不同，如 -5 与 3 就不是相反数了. 我们还规定，零的相反数就是零.

对任一正数 a，$-a$ 就是 a 的相反数，即一个正数前面添上一个"$-$"号，就变成了它的相反数. 而对任一负数 $-b$，b 是 $-b$ 的相反数；显然一个负数前面添上一个"$-$"号，也变成它的相反数，即 $-(-b)=b$. 故一般地，我们可以用 $-a$（不一定是负数）唯一地表示任一数 a（不一定是正数）的相反数. 如 $-(+5)$ 表示 $+5$ 的相反数，$-(-4)$ 表示 -4 的相反数，即 4 表示 -4 的相反数. 这里"$-$"号可看作是表示相反数的符号.

（三）有理数

引进负数后，扩大了数的范围，算术数就是指正整数（自然数）、零、正分数，增添的新数就叫做负整数和负分数，正整数和正分数称为**正有理数**；负整数和负分数称为**负有理数**. 正有理数、负有理数和零统称为**有理数**.

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数.}\end{cases}\end{cases}$$

我们还定义正整数、零、负整数为**整数**，正分数、负分数为**分数**，则整数和分数统称为**有理数**.

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

数的扩展过程为：自然数集 $\xrightarrow{\text{(添零)}}$ 扩大自然数集① $\xrightarrow{\text{(添分数)}}$ 算术数集 $\xrightarrow{\text{(添负数)}}$ 有理数集.

全体正整数（自然数）组成自然数集，记为集 N；全体整数组成整数集，记为集 Z；全体有理数组成有理数集，记为集 Q，集 N 中所有的数都被包含在集 Z 中，而集 Z 中所有的数又被包含在集 Q 中，这种关系可表示为 $N\subseteq Z\subseteq Q$，读作“集 N 被包含在集 Z 中；集 Z 又被包含在集 Q 中”．而集 Z 中所有数不都被包含在集 N 中，集 Q 中所有数又不都被包含在集合 Z 中，知集 N 是集 Z 的真子集；集 Z 是集 Q 的真子集，记为 $N\subset Z\subset Q$，图示为

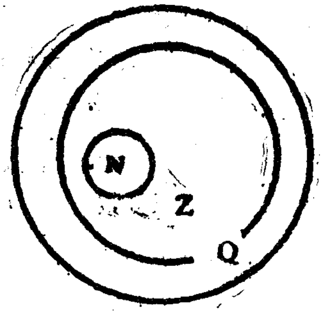


图 1.1

① 为叙述简便，姑且用此术语。

自然数集对加、乘运算永远能施行，整数集对加、减、乘法运算永远能施行，有理数集对加、减、乘、除(零不作除数)、乘方运算都永远能施行．我们还将会看到，为了对加、减、乘、除、乘方、开方运算都永远能施行，还要不断扩充数集、引进无理数、虚数，建立实数集、复数集．

任何有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式(整数可认为是小数点后面全为零的小数)；反过来，任何有限小数或者无限循环小数都是有理数，它们都可写成分数（或整数形式）．①

（四）数轴

1．数轴

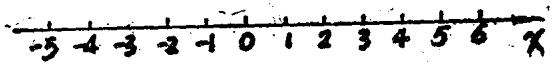
温度计从零度开始沿直线向上方向表示零上温度，向下方向表示零下温度，每一刻度表示一度，向上逐渐升上去，向下逐渐降下来．由此可知，相反意义的量可以用一条直线上的刻度来表示．那么有理数也就可以用直线上的点来表示．

画一条直线(一般是水平的直线，也可以是竖直的直线)．在这条直线上任取一点O，称为原点，用这点表示零；规定这条直线的一个方向为正方向（一般对水平的直线指从左到右的方向；对竖直的直线指从下到上的方向)，并用箭头来表示，那么相反的方向就是负方向；再任意取一条线段作为长度单位(由具体需要选取长度单位)．

象这样规定了原点，正方向和长度单位的直线叫**数轴**．原点、正方向和长度单位是数轴的三要素，缺一不可．

---

① 学过数列和极限以后，利用递缩无穷等比数列各项的和的公式，就可完成这一转化。



长度单位 ⊢⊣

图 1.2

任何一个有理数都可用数轴上一个确定的点表示出来：任一正数 a，用原点右边距离原点 a 个单位的点 A 来表示；任一负数 $-b$，用原点左边距离原点 b 个单位的点 B 来表示；数零用原点O来表示.

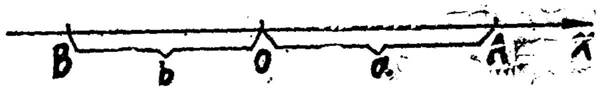


图 1.3

在数轴上，表示一个数的点，叫做这个数的对应点，如 A、B、O分别是数 a、$-b$、0 的对应点. 有时也可以说成点 a、点 $-b$、点 0.

例 2 把下列各数及它们的相反数都用数轴上的点表示出来，并按它们在数轴上从左到右的顺序排列：$4\frac{1}{2}$，-1.5，0，$-(-6)$.

解 所给各数的相反数分别是 $-4\frac{1}{2}$，1.5，0，-6. 把它们分别用数轴上的点表示为

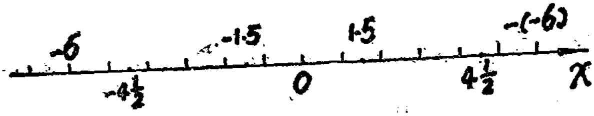


图 1.4

它们在数轴上从左到右顺序是：

$$-6,\ -4\frac{1}{2},\ -1.5,\ 0,\ 1.5,\ 4\frac{1}{2},\ -(-6).$$

从上例可知利用数轴可以揭示数与形之间的内在联系．正数与负数的对立，就反映在它们的对应点在原点的两边．互为相反的一对数，在数轴上总是表示在原点的两边，且到原点距离相等的一对点，即它们是关于原点对称的．而零与它的相反数都用原点表示．

必须注意：每一有理数都有数轴上唯一确定的点与它对应；但是反过来不成立，数轴上每一点并不是都有有理数与它对应，以后我们将会看到数轴上还有的点不表示有理数．

2．数轴上原点的移动

为了在数轴上找出表示 105、102、107 三个数的点 A、B、C，因它们离开原点距离很远，就得将数轴画得很长．分析这三个数有共同点：在 100 的附近．这时能否将原点 O 移到点 100 处作为新数轴原点 O' 呢？

由 $105=100+5$，$102=100+2$，$107=100+7$，可知在新数轴上画出表示 5、2、7 三个数的点 A'，B'，C'，即为旧数轴所要求的点 A，B，C．

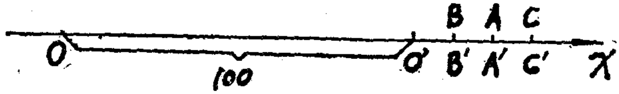


图 1.5

将旧数轴的原点 O 沿数轴移动 a 个单位到 O' 点，O' 点就是新数轴的原点．新数轴保持旧数轴的正方向和长度单位．设 P 是数轴上任一点，它在旧数轴上表示数 x，在新数轴上表示

数 x'，那么它们有如下关系：$x=a+x'$.

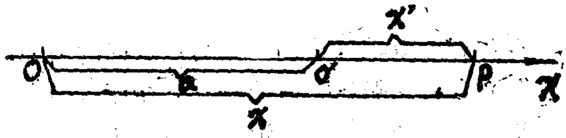


图 1.6

3. **数轴上的有向线段**

温度计上水银柱上升 5 个单位或下降 5 个单位，表示温度上升 5 度或下降 5 度，即温度的变化是 $+5$ 度或 -5 度.

能否用数轴上点的移动情况来表示有理数呢？如图 1·7 中，一个点从 A 移到 B，因它是向右移动 $a(a>0)$ 个单位，可以表示 $+a$，一个点从 C 移到 D，它向左移动 $b(b>0)$ 个单位，可以表示 $-b$.

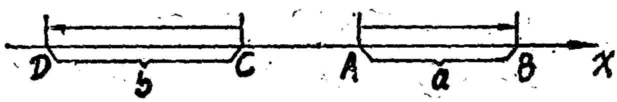


图 1.7

当一个点从 A(起点）移动到 B（终点），在数轴上就确定了一个有向线段，记作 $\overrightarrow{AB}$. 从起点到终点的方向，叫做这个**有向线段的方向**.

数轴上有向线段的方向，与数轴的方向相同时，规定为正，相反时，规定为负．如图 1.7 中，有向线段 $\overrightarrow{CD}$ 的方向是负的，长度是 b 单位，它就表示 $-b$. 数轴上有向线段所表示的数，叫做**有向线段的值**.

故有理数也可用数轴上的有向线段来表示.

有向线段$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是不同的，它们长度相同，方向相反.

决定有向线段的要素是方向和长度，与起点在什么位置无关. 如果两个有向线段的方向相同，长度相等，我们就可沿着数轴把其中一个有向线段的起点移动到另一个的起点处，这时它们的终点一定重合. 我们认为这两个有向线段是相同的. 所以数轴上的有向线段可以自由移动，而我们往往是将任一有向线段的起点移到原点.

（五）绝对值

实际中存在有些量只需知道它的大小，而不管它的方向. 如学生甲住在学校东边离学校 5 里的地方，记作 +5 里，学生乙住在学校西边离学校 7 里的地方，记作 −7 里. 如果我们只问哪个学生离学校远些，而不管它们家在学校的哪边，那么我们从学生甲的家距离学校 5 里，学生乙的家距离学校 7 里，知学生乙的家离学校较远些.

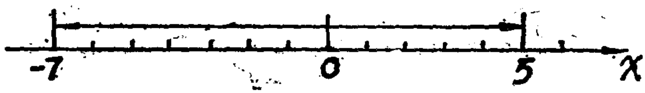


图 1.8

如果只要表达点 A 离开原点的距离，即线段 OA 的长度，而不需考虑这点在原点的左边还是右边，就可以用算术数来表示，即用非负数来表示. 如表示 +5 的点离开原点的距离是它本身 5，表示 −7 的点离开原点的距离是 7，它正是 −7 的相反数.