组合数学引论

ZUHE SHUXUE YINLUN

杨胜良 编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

组合数学引论

杨胜良 编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

组合数学引论/杨胜良编著.—兰州:兰州大学出版社,2006.1

ISBN 7-311-02734-9

Ⅰ.组… Ⅱ.杨… Ⅲ.组合数学—高等学校—教材 Ⅳ.O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第007577号

组合数学引论

杨胜良 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路222号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州德辉印刷有限责任公司印刷

开本:787×1092 1/16 印张:13.75

2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷

字数:222千字 印数:1~1000册

ISBN7-311-02734-9/O·188 定价:22.00元

前　言

组合数学主要研究在一定条件下一组离散对象的安排的存在问题、计数问题、构造问题以及优化问题. 例如, 著名的 ménages 问题是: n 对夫妻围一个圆桌就坐, 要求男女相间, 夫妻不相邻, 问有多少种安排就坐的方式? 首先我们要考虑安排的存在问题, 可以看出当 $n=2$ 时这样的安排是不存在的, 当 $n=3$ 时这样的安排是存在的而且可以具体构造出一种符合要求的安排 $(a_1b_3a_2b_1a_3b_2)$, 这里 a_i 与 b_i 是一对夫妻 $(i=1,\ 2,\ 3)$, 用环形排列 $(a_1b_3a_2b_1a_3b_2)$ 表示一种安排就坐的方式. 存在性问题解决以后, 我们主要关心的是计数问题, 即这样的安排有多少? 然后再解决构造问题, 即把这样的安排一一列出来. 当存在评价标准时, 怎样找出最佳的安排, 这就是优化问题. 简而言之, 组合数学是研究离散对象关系结构的量化模式的一门学科.

组合数学是一门既古老而又年轻的数学分支, 它所研究的许多问题都有很深的历史渊源, 历史上许多著名的数学家如欧拉、高斯等都对组合数学的发展作出过杰出的贡献. 组合数学也是与人们的日常生活最接近的一门科学, 许多组合问题最初都以游戏形式出现, 例如幻方问题, 七桥问题, 三十六名军官问题, 考克曼女学生问题等. 相传在大禹治水的时候, 在洛水中曾出现过一只神龟, 它的脊背上有一个由花纹组成的 3 阶数字矩阵, 其中隐含着治水的秘密. 这个数字矩阵被人们称之为“洛书”, 现在已被公认为组合数学最早的起源. 我国古代在组合数学方面曾取得过重要的成就.

上世纪中叶电子计算机出现以后, 组合数学得到了迅速的发展. 计算机科学实际上是算法的科学, 计算机处理的数据是离散对象, 而研究离散对象的科学正是组合数学. 计算机之所以能处理各种复杂的问题, 是因为人们为它编写了程序, 而程序的核心是算法, 在大多数情况下, 计算机的算法是针对离散数据的. 所以, 组合数学在软件技术中有重要的应用价值, 甚至有人认为组合数学是计算机软件产业的基础. 组合数学不仅在基础数学研究中具有极其重要的地位, 而且在计算机科学、编码和密码学、物理学、化学、生物学中都有重要的应用. 因此, 组合数学是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业以及计算机科学专业的一门重要的专业基础课.

本书以计数组合问题为重点，介绍组合数学的基本原理和方法．全书共分八章：排列与组合，容斥原理，鸽笼原理，递推关系与生成函数，Stirling 数，整数的分拆，Pólya 计数理论，组合设计．取材的侧重点在于既要介绍组合数学的一般理论又要引导读者掌握建立离散数学模型解决实际问题的方法．每章后配备了一定量的习题，供读者练习和自学．习题是本书的一个重要组成部分．要切实掌握组合数学的理论和方法达到灵活运用的程度，以至有所创新，必须要做一定量的习题．组合数学的许多习题都是构造性的，一个问题的答案往往需要列出几种可能的构造，有时可以通过编写程序来完成．

本书是作者总结多年来给数学与应用数学专业、信息与计算科学专业和计算机专业高年级本科生和研究生授课的经验，在原有讲义的基础上反复修改整理而成的．

在本书的编写过程中，得到了许多老师、同事和学生的支持和帮助，在此谨致谢意．

由于作者水平有限，书中难免有错误或不妥之处，恳请读者批评指正．

杨胜良

2005 年 6 月

目 录

第一章 排列与组合

组合数学研究的主要问题是有限个事物在给定条件下如何进行安排或配置的问题. 本书主要介绍组合数学中最常用的一些计数原理、计数方法和计数公式. 本章先介绍计数的基本原则 – 加法原理、乘法原理和相等原理, 然后讨论排列与组合的计数问题以及重复排列与重复组合的计数问题. 二项式系数也是本章的一个重点内容. 由于二项式系数在很多计数问题中反复出现, 它的性质和有关恒等式尤为重要. 在本章的最后, 我们讨论排列与组合的构造问题.

虽然排列与组合的概念为大部分人所熟悉, 但即使看似颇为简单的一些问题在解决过程中往往会遇到很多困难. 为了学好数学必须要做一定量的数学题. 学习组合数学更应该尝试解决大量的问题.

§ 1.1 计数的基本原则

§ 1.1.1 集合的基本概念

我们回顾集合的有关概念, 同时引入常用的符号. 所谓集合是指具有特定性质的事物的全体. 通常用 $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ 分别表示自然数集, 整数集, 实数集以及复数集. 若 X 是一个集合, x 是它的一个元素, 则称 x 属于 X, 记作 $x \in X$. 如果 Y 是 X 中具有性质 $\mathcal{P}$ 的所有元素组成的子集, 则 Y 记作 $Y = \{x|x \in X, \mathcal{P}\}$. 若 Y 的元素 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 可以列出, 则 Y 也记作 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 设 X 是有限集合, 用 $|X|$ 表示 X 所含元素的个数. $P(X)$ 表示 X 的幂集, 即 X 的所有子集组成的集合. 若 A 是 X 的子集, 则既可以记作 $A \subseteq X$, 又可以记作 $A \in P(X)$. 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 Φ. 空集是任何集合的子集合. 对任意的 $A, B \subseteq X$, 有下列的并、交、差运算:

并: $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$,

交: $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$,

差: $A - B = \{x|x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$.

而 A 的补集为 $\overline{A} = X - A$. 显然 $A - B = A \cap \overline{B}$.

§ 1.1.2 集合的划分与加法原理

如果集合 X 的非空子集 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n,$$

$$X_i \cap X_j = \Phi\,(i \neq j).$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个划分.

加法原理 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是集合 X 的一个划分，则

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots |X_n|.$$

在应用加法原理时，我们要把问题分成互相排斥的若干情形，而这些情形包含了所有的可能.

例 1 在 5 位二进制数中，至少有连续 3 位是 1 的有多少？

解 把所有满足要求的 5 位二进制数分成以下 3 类：

(a) 恰有连续 3 位是 1 的有 5 个：

00111, 10111, 11100, 11101, 01110.

(b) 恰有连续 4 位是 1 的有 2 个：

01111, 11110.

(c) 恰有连续 5 位是 1 的有 1 个：

11111.

由加法原理，共有 $5 + 2 + 1 = 8$ 个满足要求的 5 位二进制数.

加法原理也可以叙述为：如果有 n 种方法能够从一组事物中选择一个，有 m 种方法能够从另一组事物中选择一个，则从这两组事物中选择一个的方法共有 $n + m$ 种. 这种形式的加法原理可以推广到多于两组事物的情形.

例 2 设学校提供了 4 门理科选修课和 3 门文科选修课. 若一个学生只选择一门选修课，则共有 $4 + 3 = 7$ 种不同的选择方法.

§ 1.1.3 集合的积与乘法原理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为给定的 n 个集合，则积 $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是所有 n 元有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合，即

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\},$$

也常用 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 表示积. 若 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, 则积也

用 X^n 表示.

乘法原理 设 $X = X_1 \times X_2$, 则有 $|X| = |X_1| \times |X_2|$.

推论 设 $X = X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$, 则有 $|X| = |X_1| \times |X_2| \times \cdots \times |X_n|$.

乘法原理也可以叙述为：如果完成一项任务有两个独立的步骤，完成第一个步骤有 m 种不同的方法，完成第二个步骤有 n 种不同的方法，则完成这项任务共有 mn 种不同的方法. 这种形式的乘法原理可以推广到多于两个步骤的情形.

例 3 一个粉笔厂生产的粉笔有 2 种不同的长度，7 种不同的颜色，3 种不同的直径. 那么，这个粉笔厂生产的粉笔有多少种不同的种类？

解 选择一支粉笔可以分为 3 个独立的步骤：选择长度，选择颜色，选择直径. 由乘法原理，共有 $2 \times 7 \times 3 = 42$ 种不同的种类.

例 4 设整数 a 的素因子分解为 $a = 3^4 \times 5^3 \times 11^7 \times 13^9$, 求 a 的正整数因子的个数.

解 a 的正整数因子都有 $3^i \times 5^j \times 11^k \times 13^l$ 的形式，其中 $0 \le i \le 4$, $0 \le j \le 3$, $0 \le k \le 7$, $0 \le l \le 9$. 所以，i 有 5 种选择，j 有 4 种选择，k 有 8 种选择，l 有 10 种选择. 由乘法原理，因子总共有 $5 \times 4 \times 8 \times 10 = 1600$ 个.

§ 1.1.4 映射与一一对应

设 M, N 是任意集合，M 到 N 的映射 f 是集合 $M \times N$ 的满足以下条件一个子集合：对任意 $x \in M$, 有且仅有一个 $y \in N$, 使得 $(x, y) \in f$. 若 f 是 M 到 N 的映射，记作 $f: M \longrightarrow N$；若 $x \in M, y \in N, (x, y) \in f$, 则称 y 是 x 在 f 下的像，记作 $y = f(x)$. 若对任意的 $x_1, x_2 \in M$, 当时 $x_1 \neq x_2$, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是单映射；若对任意的 $y \in N$, 至少存在一个 $x \in M$, 使得 $y = f(x)$ 则称 f 称是满映射. 若 f 既是单映射又是满映射，则称之为双射或一一对应. 用 N^M 表示集合 M 到集合 N 的所有映射 f 的集合. 若 M, N 是有限集合，$|M| = m$, $|N| = n$, $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, 则 M 到 N 的映射 f 可以表示为：

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_{m-1}) & f(x_m) \end{pmatrix}.$$

相等原理 设 M, N 是有限集合，若存在 M 到 N 的一一映射，则 $|M| = |N|$.

定理 1.1.1 设 M, N 是有限集合，则 $|N^M| = |N|^{|M|}$.

证明 设 $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. 构造映射 $\phi: N^M \longrightarrow N^m$ 如下，

$$\phi(f) = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{m-1}), f(x_m)).$$

显然 ϕ 是 N^M 到 N^m 的一一对应. 根据相等原理，我们有 $|N^M| = |N^m|$. 由乘法原理， $|N^m| = |N|^m$. 所以， $|N^M| = |N|^{|M|}$.

定理 1.1.2 设 M 是有限集合，$P(M)$ 表示 M 的幂集，则 $|P(M)| = 2^{|M|}$.

证明 设 $N = \{0, 1\}$, 对 M 的任意子集 A, 令

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in A, \\ 0, & 若\ x \notin A, \end{cases}$$

则 f_A 是 M 到 N 的一个映射. 可以看出 $\varphi: A \longrightarrow f_A$ 是 $P(M)$ 到 N^M 的一一映射. 从而， $|P(M)| = |N^M|$. 由定理 1.1.1 得， $|N^M| = |N|^{|M|} = 2^{|M|}$. 所以， $|P(M)| = 2^{|M|}$.

组合数学在研究计数问题时，为了计算集合 M 的基数，通常在集合 M 与某个已知其基数的集合 N 之间建立一个一一对应，这样 $|M| = |N|$. 这种计数的方法我们在后面经常用到，通常也叫做双射法.

例 5 设 N 是 n 个元素的集合， E 是 N 的含有偶数个元素的所有子集组成的集合；F 是 N 的含有奇数个元素的所有子集组成的集合. 我们可以取定一个元素 $x \in N$, 在 E 和 F 之间建立一个一一映射 f：

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & 若\ x \notin A, \\ A - \{x\}, & 若\ x \in A. \end{cases}$$

所以， $|E| = |F| = \dfrac{1}{2}|P(N)| = 2^{n-1}$.

§ 1.2 排列

§ 1.2.1 n 元集合的 k 排列

定义 设 N 是 n 元集， $1 \le k \le n$, N 的 k 个互不相同的元素组成的序列 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 叫做 N 的一个 k 排列. N 的 n 排列叫做全排列. 一般用 $P(n, k)$ 表示 n 元集合的 k 排列的个数.

例如，设 $S=\{a,b,c\}$，则 ab,ac,ba,bc,ca,cb 是 S 的所有 2 排列，所以 $P(3,2)=6$. abc,acb,bac,bca,cab,cba 是 S 的所有全排列，所以 $P(3,3)=6$.

从映射的观点看，N 的一个 k 排列就是 k 元集合 $\{1,2,\cdots k\}$ 到 N 的一个单映射，而 N 的一个全排列就是 n 元集合 $\{1,2,\cdots n\}$ 到 N 的一个单映射.

定理 1.2.1 设 n, k $(1\le k\le n)$ 都是正整数，则 n 元集合的 k 排列的个数是 $P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

证明 要构造 n 元集合的一个 k 排列 $a_1a_2\cdots a_k$，我们可以在 n 个元素中任取一个作为第一项 a_1，第一项有 n 种取法；取定第一项后，第二项 a_2 可以在剩下的 $n-1$ 个元素中任意选取，第二项有 $n-1$ 种取法；$\cdots$，前 $k-1$ 个元素取定后，第 k 项 a_k 有 $n-k+1$ 种取法. 由乘法原理知 $P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

推论 1.2.2 n 元集合的全排列的个数是 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$.

我们引入记号 $(n)_k$:

$$(n)_k=\begin{cases}1, & 若\ k=0,\\ n(n-1)\cdots(n-k+1), & 若\ k\ge1.\end{cases}$$

$(n)_k$ 叫做 n 的 k 降阶乘，显然 $(n)_n=n!$，当 $k>n$ 时，$(n)_k=0$. 这样 n 元集合的 k 排列的个数为 $(n)_k$. 显然，$(n)_k=n!/(n-k)!$.

	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

图 1.2.1

例 1 “15 迷阵”由 15 个可滑动的方块组成，15 个方块分别标有数字 1 到 15 并摆放在如图 1.2.1 所示的 4×4 方框内. 该迷阵的难题是滑动各方块使图从初始位置变到任意指定的位置. 这里位置是方框内的这 15 个标有数字的方块的一种摆放方法，其中一块是空的. 该迷阵中位置的总数是

多少？

一个位置就是将数字 $1,2,\cdots,15$ 填入 4×4 网格的 16 个方块并留出一个空白方块，因此又相当于将 $1,2,\cdots,15,16$ 填入 16 个方块. 因此，迷阵中位置的总数是 $16!$ 个.

将数字 $1,2,\cdots,15$ 填入 6×6 网格的 15 个方块并留出 21 个空白方块的方法总数是多少？对于将数字 $1,2,\cdots,15$ 填入 6×6 网格的 15 个方块的一种填入方式，我们首先填入标有 1 的方块，其次填入标有 2 的方块，等等，这样就得到 36 个方块的 15 排列. 所以，填入方法的总数是 $P(36,15)=36!/21!$ 个.

例 2 由数字 $1,2,\cdots,9$ 组成的没有重复数字的二位数有多少个？

解 由数字 $1,2,\cdots,9$ 组成的没有重复数字的一个二位数相当于数码 $1,2,\cdots,9$ 的一个 2 排列. 所以，这样的二位数有 $P(9,2)=9\times 8=72$ 个. 事实上，十位上为 1 的这样的二位数有 $12,13,\cdots,19$，共 8 个；十位上为 2 的这样的二位数也有 8 个，即 $21,23,24,\cdots,29$；$\cdots$；十位上为 9 的这样的二位数也有 8 个. 由加法原理，这样的二位数有 $8+8+\cdots+8=9\times 8=72$ 个.

例 3 在 26 个字母的全排列中，a 和 b 之间恰好有 7 个字母的排列有多少个？

解 以 a 开头 b 结尾中间有 7 个字母的排列有 $P(24,7)$ 个；同样，以 b 开头 a 结尾中间有 7 个字母的排列也有 $P(24,7)$ 个. 所以，以 a,b 为端点中间有 7 个字母的排列有 $2P(24,7)$ 个. 把一个这样的排列看作整体再与剩余的 17 个字母进行全排列，就得到 $18!$ 个所求的排列. 由乘法原理，所求的排列数是 $2P(24,7)\times 18!=36\times 24!$.

§ 1.2.2 圆排列

上面讨论的排列是线性排列，即我们把元素看作是排成一条直线. 如果不把元素排成一条直线而是排成一圆，那么排列的数目就要减少. 例如，设有 6 个孩子沿着一个圆圈行走，他们能够形成多少个不同的圆？我们看到，将 6 个线性排列 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345 中的每一个排列首尾相连都得到同一个圆排列，而将这个圆排列从两个元素之间的缝隙处断开，把圆周上的元素按照反时针方向的次序排成一行，我们就得到 1 个线性排列. 分别从 6 个缝隙处断开，就得到上面的 6 个线性排列. 因此，1 个圆排列对应 6 个线性排列，6 个孩子能够形成 $6!/6=5!$ 个

不同的圆. 一般情况下，我们有

定理 1.2.3 n 元集合的 r 圆排列的个数为:

$$\frac{1}{r}P(n,r)=\frac{n!}{r(n-r)!},$$

特别地， n 个元素的圆排列的个数为 $(n-1)!$.

例 4 将 12 个图案贴在钟表的 12 个整点刻度上，共有 11! 种不同的方法.

例 5 10 个人要围着一个圆桌而坐，其中有两个人不愿彼此相邻，共有多少种不同的坐法？

10 个人围着一个圆桌而坐，共有 9! 种不同的坐法. 10 个人围着一个圆桌而坐，若其中有两个人总是彼此相邻，共有 $2\times 8!$ 种不同的坐法，这是因为，我们可以把这 2 个人在安排座位时看作一个整体， 9 个人围着一个圆桌而坐，共有 8! 种不同的坐法. 而这 2 个人入座时又有 2 种不同的坐法. 所以， 10 个人要围着一个圆桌而坐，其中有两个人总不彼此相邻，共有 $9!-2\times 8!=7\times 8!$ 种不同的坐法.

例 6 (i) 10 个男孩和 5 个女孩站成一排，如果没有两个女孩相邻，有多少种不同的排法？

(ii) 10 个男孩和 5 个女孩站成一个圆圈，如果没有两个女孩相邻，有多少种不同的排法？

解 (i) 10 个男孩站成一排，共有 10! 种不同的排法；在一个这样的排列中，有 11 个位置可供每个女孩选择，总共有 $P(11,5)$ 种方法将 5 个女孩插入 11 个位置. 根据乘法原理，所求的排法总数为

$$10!\times P(11,5)=\frac{10!\times 11!}{6!}.$$

(ii) 10 个男孩站成一个圆圈，共有 9! 种不同的排法；在一个这样的圆排列中，有 10 个位置可供每个女孩选择，总共有 $P(10,5)$ 种方法将 5 个女孩插入 10 个位置. 根据乘法原理，所求的排法总数为

$$9!\times P(10,5)=\frac{9!\times 10!}{5!}.$$

§ 1.2.3 多重集合的排列

定义 由 n_1 个 a_1, n_2 个 $a_2, \cdots, n_k$ 个 a_k 组成的集合记为

$$M=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ \cdots,\ n_k\cdot a_k\}$$

叫做多重集合，也称是 n 多重集，其中 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$.

例如 $M=\{3\cdot a,\ 2\cdot b,\ 4\cdot c\}$ 是一个 9 多重集，$aabbc$ 是 M 的一个 5 排列，$aabbccc$ 是 M 的一个 7 排列. 一般地，n 多重集合 M 的 r 排列就是从 M 中选出的 r 个元素的序列.

定理 1.2.4 多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_k\}$ 的 r 排列的个数为 k^r.

证明 设 $R=\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$, $K=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$. 若 $x_1x_2\cdots x_r$ 是多重集合 M 的一个 r 排列，令 $f(i)=x_i$, $i=1,2,\cdots,r$. 则 f 是 R 到 K 的一个映射. 可以看出，这样的对应是多重集合 M 的 r 排列的集合到集合 K^R 的一一对应. 由定理 1.1.1 即得所证结论.

定理 1.2.5 多重集合 $M=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ \cdots,\ n_k\cdot a_k\}$ 的全排列的个数是

$$\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

证明 设 M 的全排列的个数是 m. 用 M' 表示把 M 中的 n_i 个 a_i 换成 n_i 个相异元 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 所得集合，$i=1,2,\cdots,k$, 则 M' 的全排列的个数是 $(n_1+n_2+\cdots+n_k)!$. 构造 M' 的全排列可分成两个步骤：先构造 M 的全排列；然后把 n_i 个 a_i 换成 n_i 个相异元 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}$, $i=1,2,\cdots,k$. 完成第一个步骤有 m 种方法，完成第二个步骤有 $n_1!n_2!\cdots n_k!$ 种方法，由乘法原理，构造 M' 的全排列的方法有 $m\cdot n_1!n_2!\cdots n_k!$ 种，从而 $(n_1+n_2+\cdots+n_k)!=m\cdot n_1!n_2!\cdots n_k!$, 所以

$$m=\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

例 7 $(x+y+z)^4$ 的展开式中共有多少项？其中 xy^2z 的系数是多少？

解 因为 $(x+y+z)^4=(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$ 为四个因子的积，所以 $(x+y+z)^4$ 的展开式中的一般项为 $x_1x_2x_3x_4$, 其中 x_i 取自第 i 个因子 $(x+y+z)$ 的某个项，$i=1,2,3,4$. 因而 $(x+y+z)^4$ 的展开式中的一项对应多重集合 $\{\infty\cdot x,\ \infty\cdot y,\ \infty\cdot z\}$ 的一个 4 排列，显然，这个对应是一一对应. 这样我们得到，$(x+y+z)^4$ 的展开式中共有 3^4 项. 其中等于 xy^2z 的项对应多重集合 $M=\{1\cdot x,\ 2\cdot y,\ 1\cdot z\}$ 的所有全排列，这样的全排列的个数为

$$\frac{(1+2+1)!}{1!2!1!}=12.$$

这 12 个排列为： $xyyz, xyzy, xzyy, zyyx, zyxy, zxyy, yyxz, yyzx, yxyz, yzyx, yxzy, yzxy$. 所以 $(x+y+z)^4$ 的展开式中 xy^2z 的系数是 12.

例 8 在 8×8 的棋盘上摆放 8 个车，使它们不能相互攻击，如下面的图 1.2.2 所示，共有多少种不同的摆放方案？（由于车在棋盘上只能走直线，所以一种可行的摆放方案相当于在 8×8 的棋盘上选取 8 个不同行且不同列的方格）

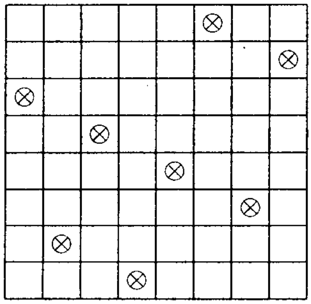

图 1.2.2

解 我们给棋盘上每个方块一对坐标 (i,j), 其中 i 表示方块的行数，j 表示方块的列数. 在 8×8 的棋盘上摆放 8 个车，它们不能相互攻击，每行必然恰好有一个车，因此，这 8 个车必然占据 8 个方块而且具有坐标：$(1,j_1)$, $(2,j_2)$, $\cdots$, $(8,j_8)$. 由于每列上恰好有一个车，这使得数 j_1, j_2, $\cdots$, j_8 中没有两个是相等的. 也就是说 $j_1j_2\cdots j_8$ 必须是 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的一个全排列. 反过来，如果 $j_1j_2\cdots j_8$ 是 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的一个全排列，那么将 8 个车摆放在坐标为 $(1,j_1)$, $(2,j_2)$, $\cdots$, $(8,j_8)$ 的方块上，它们就不能相互攻击. 因此，在 8×8 的棋盘上摆放 8 个不能相互攻击的车的方案与集合 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的全排列之间有一个一一对应. 这样，我们得到在 8×8 的棋盘上摆放 8 个不能相互攻击的车的方案数为 $8!$.

在上面的例题中，我们实际上间接假设这些车彼此没有什么区别. 现在假设这 8 个车有 8 种不同的颜色，那么在确定了 8 个车摆放的 8 个方块后 (有 $8!$ 种可能), 我们还要决定在每个所占据的方块上的车是什么颜色？观察从第 1 行到第 8 行的车时我们看到 8 种颜色的一个排列. 因此决定了 8 个车摆放的 8 个方块后 (有 $8!$ 种可能) 就必须决定 8 种颜色的排列 (也有 $8!$ 种可能). 于是，在 8×8 的棋盘上摆放 8 个具有不同颜色的不能相互攻击的车的方案数为 $8!8!$.

现在假设有 1 个红车 3 个蓝车 4 个黄车. 这时当我们观察从第 1 行到