

弹性力学

(修订版)

TANXING LIXUE
XIUDINGBAN

程昌钧 朱媛媛 编著

• 上海大学出版社 •
SHANGHAI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/程昌钧,朱媛媛编著. —修订本. —上海:
上海大学出版社, 2005. 9

ISBN 7-81058-819-2

I. 弹... II. ①程... ②朱... III. 弹性力学—
高等学校—教材 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097060 号

责任编辑 王悦生

封面设计 孙 敏

弹性力学(修订版)

程昌钧 朱媛媛 编著

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

上海第二教育学院印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 17.25 字数 458 千

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—2 100 册

ISBN 7-81058-819-2/O·028 定价: 29.80 元

内 容 简 介

本书系统全面地介绍了弹性力学的基本理论、基本原理、基本方法及其应用,全书共分为十一章。在前五章中全面地论述了弹性力学的基本概念、边值问题的提法以及一些基本定理;第六章至第八章详细讨论了弹性力学平面问题、柱体的扭转与弯曲问题以及空间问题的求解;第九章系统介绍了弹性力学的变分原理及其应用;第十章论述了平面弹性力学问题的复变函数方法;第十一章介绍了线性热弹性理论及其应用。本书在各章的开头都简洁地介绍了有关内容的发展;同时在各章之后附有结束语、习题及答案;对相关内容的发展及一些难点和概念上容易混淆之处给出了相应的注释。

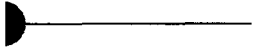
本书可作为理工科力学系本科生、研究生以及相关专业研究生弹性力学课程的教材,同时也可作为相近专业的学生、教师和工程技术人员的教学用书及参考书。

修订版前言

这本弹性力学教材自1995年11月由兰州大学出版社出版以来已经10年了,其间于1996年5月重新印刷过一次。10年来,我和我的同事及学生们对弹性力学的教材和教学仍然充满了极大的热情和关注。自本人于1996年调入上海大学之后,仍然每年孜孜不倦地为本科生和研究生讲授弹性力学课程,使用的教材也是1996年重印的《弹性力学》,而每次的讲授又都积累了新的经验和体会。同时在这个过程中,本书及以此为基础的课程建设和教学质量均得到同行的认可,1996年“弹性力学课程”获得兰州大学主干课程优秀教学质量一等奖,1997年“弹性力学教材”分别获得上海大学优秀教材特等奖和上海市高校优秀教材一等奖,1998年“弹性力学课程建设与试题库”作为上海市教育委员会世界银行贷款资助项目得到上海市教育委员会和上海大学的资助,于2000年初通过专家验收,并于2002年获得上海市高校优秀教学成果二等奖。

两年多前,已经很难从书店和兰州大学出版社买到这本弹性力学教材了,终于下决心对这本书进行修订,并出版修订版。在这个修订版中主要修订的内容有:(1)对几乎所有的公式、习题和图表都进行了重新推导和检查,并对其中的印刷错误和笔误给予了更正;(2)对一些章节的内容、概念和公式的推导进行了改写,使其更清晰、更简洁、更精练;(3)用增加注释的形式对一些重要的理论性内容和最新进展给出了说明,使其更富新意;(4)增加了附录——张量的简单运算规则,同时也增加了一些习题,特别是研究型的习题。

在修订过程中,得到了上海大学力学系陈立群、杨骁教授、张能



辉、李晶晶博士的帮助,其中也积累了他们的教学经验,在此表示衷心的感谢。上海师范大学朱媛媛博士在学习和工作中反复地读过这本书,特别是她在留学日本期间曾经按照本书的基本内容先后两次为日本研究生进行过弹性力学的讲解和辅导,收到了很好的效果。在这次修订过程中,她又认真地推导了书中的大量公式,指出了其中的一些错误和不足,提出了修改意见,还对一些内容进行了初步的改写,累计约10万字。

本书的出版得到上海市重点学科建设项目(Y0103)和上海大学教材建设基金的资助,在此表示最诚挚的感谢!

借此机会,仍要感谢太原理工大学杨桂通教授,同济大学吴家龙、方如华、张若京教授,上海大学叶志明教授等对弹性力学教材和相关项目的大力支持,感谢他们所提出的宝贵意见和建议。

笔者也要诚恳地感谢上海大学的领导,教务处和上海市应用数学和力学研究所对弹性力学教材和课程的关注与支持,感谢上海大学出版社在出版这本修订版过程中所给予的大力支持。

程昌钧

2005年3月24日,上海

第一版重印前言

本书于去年 11 月正式出版以来,不到半年的时间已销售上千册,目前仍在不断的征订之中。本书得到广大读者的如此厚爱,使作者深受感动并倍加感激!

为了了解本书的使用效果,作者于 1995 年下半年专门为兰州大学力学系本科生及相关专业的研究生再次系统和完整地讲授了弹性力学,实践表明:本书无论对教和学都是一本较好的教材。由于框架清晰、结构合理、观点明确、论证严谨、实际背景强,集科学性、逻辑性和先进性为一体等特点,本书为教师的备课和讲授提供了良好的条件,虽然只有 90 学时的课时(包括习题课)亦能轻松自如地讲完该书的基本内容。对学生而言,由于手中有一本适当的教材,提高了他们课堂的听课效率,不仅使他们能更好更全面地掌握和理解弹性力学的内容和方法,达到教学大纲的要求;同时亦使他们开阔了视野,提高了学习兴趣和积极性。

作者于 1996 年初对本教材的使用情况进行了一次书面调查。填表者有本校和兄弟院校力学专业的教师、本科生、相关专业的研究生和青年教师。50 多份的调查表中不同层次的读者从各个不同的角度和方面对本书都作了充分的肯定。他们普遍认为这是一本具有鲜明特色和独到之处的好书,其最大的优点是适合于不同层次、不同专业的读者,使他们从书中都能学到各自所需的东西并受到启迪。借此机会,本人对读者对本书的高度评价和赞赏表示衷心感谢!

最后,借本书重印之际,本人已订正原书中的一些印刷错误。希望本书能得到更多读者的喜爱,并衷心欢迎大家批评指正!

程昌钧

1996 年 3 月兰州

第一版前言

本人自 60 年代以来,已讲授过弹性力学达 10 次之多,虽然曾四处寻找适合理科力学专业的理想弹性力学教材,但由于种种原因,总也未能如愿。因此,多年以来,本人便打算编写一本既适合理科力学专业特点的弹性力学教材,又适合于其他相近专业的教学参考书。于是,从本人为 77 届力学专业本科生讲授弹性力学开始,便系统地编写了弹性力学的讲稿,以后每讲授一次便进行一次修改。尽管多次教学实践都证明,弹性力学的教学效果良好,然而,要写成一本有特色的教材却是非常之不容易。本书是根据本人多年的教学实践积累起来的有关资料,总结编写而成的。同时,在编写过程中也参考了一些其他的弹性力学教材和有关专著,使本人从中吸取了丰富的养分,受到了很大的启迪。

由于弹性力学是固体力学的基础,而且是力学专业的主干基础课,因此,本书着重系统阐述弹性力学的基本概念、基本理论、基本方法及其应用;同时,也尽可能介绍一些有关的近代理论成果和应用成果,使本书具有一定的先进性。为了便于学生更好地理解和掌握弹性力学的基本概念和内容,本书没有采用张量分析,但在某些章节仍自然地采用了张量的简洁记号。在本书的编写过程中,力图做到背景明确、概念清晰、数学推导严谨,以便使本书能适合理科力学专业的特点。

根据本人多年的教学实践,深知学生在学习本课中存在的困难以及概念上容易混淆与含糊之处,这些都在编写本书的过程中进行了强调。它们既被包含在所举例题的说明之中,亦被包含在大量的注释之中。希望这有助于读者对弹性力学的深入理解。

需要说明的是,兰州大学对本科生和研究生教材(尤其是主干课教材)的建设是很重视的。虽然学校教学经费紧张,但每年仍设立专项基金以资助有关教材的出版。弹性力学作为学校重点教材已先后

两次被列入出版规划,只因本人时间不允许,今日才得以完稿。这里,谨向兰州大学对本书的出版所给予的重视和关心表示衷心感谢!

本人还要特别感谢太原工业大学校长杨桂通教授。杨先生在百忙之中全面、认真地审阅了弹性力学的原稿,并提出了宝贵的意见,给本人以极大的鼓励!

兰州大学出版社为弹性力学的出版给予了极大的支持,这里,亦表示诚挚的谢意!

由于时间、本人水平等原因所限,本书完稿之后仍觉得有些不尽如人意,缺点、不妥之处亦在所难免,恳望读者批评指正。

程昌钧

1994年9月于兰州

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 弹性力学概述	1
1.2 弹性力学的基本假设和基本规律	3
1.3 弹性力学的研究方法	5
1.4 弹性力学的发展梗概	7
第二章 应力分析	9
2.1 外力和内力	9
2.1.1 外部体载荷	10
2.1.2 外部面载荷	10
2.1.3 内部载荷	11
2.2 应力张量及其性质	12
2.2.1 应力矢量、应力张量与一点的应力状态	12
2.2.2 坐标变换下应力分量的变换公式	16
2.2.3 主应力、应力主方向与应力张量的不变量	20
2.2.4 最大切应力和正应力的极值	23
2.3 平衡(运动)微分方程与力的边界条件	26

2.4 正交曲线坐标系中的应力张量和平衡微分方程	31
2.4.1 柱坐标系中的公式	31
2.4.2 球坐标系中的公式	32
2.5 结束语	34
习题	35
 第三章 应变分析	 39
3.1 位移和变形	40
3.2 应变张量和转动张量	42
3.3 任意点邻域内的无限小变形	48
3.3.1 任意方向上微元线段的伸长度	48
3.3.2 任意两个方向上微元线段间夹角的变化	50
3.4 应变张量的一些性质	52
3.4.1 坐标变换下应变分量的变换公式	52
3.4.2 主应变、应变主方向与应变张量的不变量	56
3.5 变形协调条件或相容性条件	59
3.6 多连通域与位移单值性条件	66
3.7 正交曲线坐标系中的有关公式	70
3.7.1 圆柱坐标系中的公式	71
3.7.2 球坐标系中的公式	72
3.8 有限变形理论简介	75
习题	83
 第四章 弹性材料的本构关系	 87
4.1 热力学基本定律与应变能密度	88
4.2 各向异性弹性材料的本构关系与广义胡克定律	92
4.3 具有弹性对称面的弹性材料的本构关系	96
4.3.1 具有一个弹性对称面的材料	96

4.3.2 具有三个弹性对称面的材料与正交各向异性弹性材料	97
4.3.3 各向同性面与横向各向同性弹性材料	98
4.3.4 完全弹性对称与各向同性弹性材料	99
4.4 各向同性弹性材料的弹性常数	102
4.5 各向同性弹性材料的应变能密度	107
4.6 结束语	109
习题	110
第五章 线性弹性力学的边值问题与基本定理	112
5.1 线性弹性力学的基本方程和边界条件	112
5.2 弹性力学边值问题的位移解法与拉梅方程	117
5.3 弹性力学边值问题的应力解法与应力形式的变形协调方程	120
5.4 线性弹性力学边值问题解的叠加原理	125
5.5 应变能定理	127
5.6 线性弹性力学边值问题解的唯一性定理	128
5.7 功的互等定理——贝蒂互换定理	131
5.8 圣维南原理——力作用的局部性原理	135
5.9 某些简单弹性力学问题的解	139
5.9.1 长方体在均匀压力作用下的变形	139
5.9.2 柱体的均匀拉伸	143
5.9.3 柱体在自重作用下的变形	144
习题	147
第六章 弹性力学平面问题的解	152
6.1 弹性力学平面问题的边值问题	153
6.1.1 平面应力问题	153

6.1.2	平面应变问题	154
6.1.3	平面问题的基本方程和边界条件	155
6.1.4	平面弹性力学基本边值问题的提法	158
6.2	平面弹性力学基本边值问题的解法	159
6.2.1	位移解法	159
6.2.2	应力解法	160
6.2.3	混合解法	161
6.3	应力函数及其物理意义	162
6.3.1	单连通域中的应力函数及其物理意义	162
6.3.2	多连通域中的应力函数及其单值性条件	166
6.4	位移的积分表达式与位移单值性条件	172
6.4.1	单连通域中位移的积分表达式	172
6.4.2	多连通域中的位移单值性条件	175
6.5	基本边值问题的应力函数表示	176
6.6	多项式应力函数及其应用	180
6.6.1	具有矩形域的简单弹性力学问题	180
6.6.2	多项式应力函数求解悬臂梁的弯曲问题	183
6.6.3	简支梁受均布载荷作用时的解	187
6.7	极坐标系中平面弹性力学问题的基本方程	190
6.7.1	极坐标系中的平衡微分方程	190
6.7.2	极坐标系中的几何方程和本构方程	192
6.7.3	极坐标系中的应力函数与变形协调方程	193
6.8	轴对称问题的通解及其应用	197
6.8.1	轴对称问题的应力函数及其通解	197
6.8.2	内外受压的厚壁圆筒	199
6.9	曲梁的弯曲问题	201
6.9.1	曲梁的纯弯曲	201
6.9.2	曲梁的一般弯曲	204

6.10 圆孔附近的应力集中	206
6.11 半无限楔形体与半无限平面问题	211
6.11.1 半无限楔形体顶端受集中力的作用	212
6.11.2 半无限楔形体受其他力的作用	214
6.11.3 半无限平面边界受集中力的作用	216
6.12 结束语	219
习题	220
第七章 柱体的扭转与弯曲——圣维南问题	227
7.1 圣维南问题	228
7.2 柱体扭转问题的位移解法、扭曲函数与共轭函数	230
7.3 柱体扭转问题的应力解法与应力函数	236
7.4 椭圆截面柱体的扭转	241
7.5 带半圆槽的圆柱体的扭转	244
7.6 等边三角形截面柱体的扭转	247
7.7 矩形截面柱体的扭转	249
7.8 扭转问题的复变函数方法	254
7.9 扭转柱体的薄膜比拟方法	262
7.10 薄壁杆件的自由扭转	265
7.10.1 开口薄壁杆件的自由扭转	265
7.10.2 闭口薄壁杆件的自由扭转	267
7.11 柱体在端部剪力作用下的弯曲	271
7.11.1 边值问题的建立	272
7.11.2 应力函数解法	275
7.12 椭圆截面柱体的弯曲	278
7.13 结束语	281
习题	282

第八章 弹性力学空间问题的解	286
8.1 拉梅方程的特解	287
8.2 巴博考维奇-纽勃通解	293
8.3 波西涅斯克-伽辽金通解	297
8.4 拉梅位移势函数及其应用	300
8.5 半无限弹性体边界面上受集中力作用的解	304
8.6 半无限弹性体边界面上受分布力作用的解	311
8.7 两个弹性球体的接触问题	317
8.8 空间问题的应力解法与应力函数	322
8.9 空间轴对称问题的应力解法	325
8.10 回转体在匀速转动时的应力	330
8.11 结束语	333
习题	334
第九章 弹性力学的变分原理及其应用	337
9.1 变分法的若干基本概念和预备定理	338
9.1.1 泛函与泛函的变分	339
9.1.2 泛函的极值	342
9.1.3 欧拉方程与自然边界条件	343
9.2 弹性力学中有关变分原理的若干基本概念	347
9.3 广义虚功原理——高斯积分恒等式	352
9.3.1 广义虚位移原理	353
9.3.2 虚位移原理	354
9.3.3 虚应力原理	356
9.4 最小总势能原理与力的平衡条件	358
9.5 最小总余能原理与几何连续性条件	362
9.6 广义变分原理	366

9.6.1 两类变量的变分原理与赫林格-瑞斯纳广义变分原理	366
9.6.2 三类变量的变分原理——胡-龔津广义变分原理	369
9.7 变分原理的应用	372
9.7.1 梁的平衡微分方程和端部力的条件	373
9.7.2 扭曲函数满足的微分方程和边界条件	375
9.7.3 扭转问题应力函数满足的微分方程与位移单值性条件	377
9.8 最小总余能原理对于开孔平面问题的应用	381
9.9 基于变分原理的近似解法	395
9.9.1 里兹方法	395
9.9.2 伽辽金方法	402
习题	404
第十章 弹性力学平面问题的复变函数解法	408
10.1 弹性力学平面问题的复函数表示	409
10.1.1 应力函数的复函数表示	409
10.1.2 应力分量的复函数表示	411
10.1.3 位移分量的复函数表示	412
10.1.4 应力主矢量和主矩的复函数表示	414
10.2 各个复函数的确定程度	416
10.3 有限多连通域内复应力函数的表达式	420
10.4 无限大域的情形	423
10.5 化弹性力学平面问题为复变函数论问题	429
10.6 复应力函数的幂级数解	433
10.7 保角映射与曲线坐标	436
10.8 圆域问题的解	443

10.9 椭圆孔口问题	449
10.10 结束语	462
习题	463
第十一章 线性各向同性热弹性理论及其应用	467
11.1 线性热弹性理论的基本方程	468
11.1.1 空间热弹性理论的基本方程	469
11.1.2 平面热弹性理论的基本方程	473
11.1.3 杜哈梅相似定理	476
11.2 热弹性位移势及其应用	478
11.2.1 三维热弹性问题的位移势	478
11.2.2 二维热弹性问题的位移势	480
11.2.3 热弹性位移势的应用	484
11.3 平面热弹性问题的应力函数及其应用	490
11.3.1 用热应力函数表示的边值问题	490
11.3.2 圆筒或圆环在非对称变温分布下的热应力	496
11.4 不产生热应力的平面温度场	504
11.5 轴对称变温分布下的二维热应力的位移解法	507
11.6 圆球体球对称热应力的位移解法	511
11.7 结束语	514
习题	515
附录 张量的一些简单记号与运算规则	518
参考文献	526
名词索引	529

1.1 弹性力学概述

弹性力学又称弹性理论,是固体力学的一个重要分支,它研究弹性体在外力和其他外界因素作用下所产生的变形和内力。弹性力学可分为数学弹性力学和应用(或工程)弹性力学,当然,这种分法并不是十分严格的。数学弹性理论是用严格的数学分析方法,在相当一般的前提假设下,首先建立起弹性力学的合理数学模型,即弹性力学的基本边值问题(对于弹性静力学问题)或弹性力学的初边值问题(对于弹性动力学问题);然后讨论解的性质,例如存在性、唯一性等,同时寻求适当的数学方法给出问题的解,从而得到弹性体的变形和应力,以供工程实际部门参考和应用。而对于应用弹性理论,例如板壳理论、弹性稳定性理论等,虽然也采用数学分析的手段研究某些具体结构在外力作用下的变形、内力和稳定性,但为了得到可供工程实际问题所需要的结果,人们不得不进一步作出假定,例如板壳理论中的直法线假设等。在本书中我们沿袭数学弹性理论的框架建立弹性力学的基本概念、基本原理和给出某些求解弹性力学问题的方法,以及例证性问题的解。

所谓弹性是指物体在外界因素作用下所产生的应力和应变之间