21世纪高等院校教材

应用概率论

（第二版）

孙荣恒　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

应用概率论

（第二版）

孙荣恒 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为高等院校理工科教材，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、特征函数与概率母函数、极限定理等．本书内容丰富，有大量的例题和适量的习题，书后附有习题答案．

本书适于高等院校理工科的数学、应用数学、概率统计、信息与计算科学等专业的大学生、教师和研究生阅读．

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论/孙荣恒编著．—2版．—北京：科学出版社，2006

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-016262-5

Ⅰ．应…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．概率论-应用-高等学校-教材　Ⅳ．O211.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第106596号

责任编辑：赵 靖 祖翠娥／责任校对：刘小梅

责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998年10月第 一 版　　开本：B5(720×1000)

2006年1月第 二 版　　印张：18 1/4

2006年1月第三次印刷　　字数：347 000

印数：5 001—9 000

定价：23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

第二版序言

本书是1998年科学出版社出版的《应用概率论》的修改本.除尽可能改正原书的印刷错误和删去一些超要求的内容外,还增加了一些推导的说明、一些例题的解法和几个应用例题.这样,不仅便于读者理解与自学,而且也有利于初学者启迪思维与开阔视野.

科学出版社对本书第二版的出版给予了大力支持,作者表示衷心感谢.

本书虽然经过多次修改,多年使用,但是,由于作者水平所限,书中一定还存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正.

作者

2005年3月

第一版序言

概率论起源于机会游戏.它的某些思想在公元前220年就已在中国出现.不过它的真正历史被公认为从17世纪中叶开始.1654年法国有个叫De Méré的赌徒向数学家Pascal(1623～1662)提出了一个如何分赌注的问题(也叫分点问题):简略地说,就是甲、乙两个赌徒下了赌注就按某种方式赌了起来,规定甲胜一局甲就得一分,乙胜一局乙也得一分,且谁先得到某个确定的分数谁就赢得所有赌注.但是,在谁也没获得确定的分数之前赌博因故中止了.如果甲需得 n 分才获得所有赌注,乙需得 m 分才获得所有赌注,问该如何分这些赌注呢?为解决这一问题,Pascal与当时享有很高声誉的数学家Fermat(1601～1665)建立了联系,从而使当时很多有名的数学家对这一问题产生了浓厚的兴趣,并使得概率论这个新学科得到了迅速的发展.对概率论的发展作出杰出贡献的还有:17～18世纪的惠更斯(Huyghens)、伯努利(Bernoulli)、棣莫弗(De Moivre)、辛普森(Simpson)、蒲丰(Buffon),19世纪的拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、泊松(Poisson)、切比雪夫(Chebyshev)、马尔可夫(Markov),20世纪的柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、辛钦(Khinchine)等.

本书是为应用数学、数学、概率统计、信息与计算科学等专业的大学生学习概率论而编著的教材,曾在重庆大学使用多年.撰写过程中参考了教育部1980年颁发的综合大学数学专业《概率论与数理统计教学大纲》.本书的特点是:概念的直观背景较强,材料系统丰富,理论推导严谨,同时注意实际应用.书中有大量的应用例题,故它既可作为教材,也可作为参考书.本书的另一特点是起点低,一般只需具有数学分析或高等数学知识就可阅读,因此便于初学者自学.经适当选择后,也可作为理科其他专业和工科有关专业的教材.

全书共5章,每章后附有适量的习题,书后附有答案.

初稿完成后,李虹、刘琼荪、何良材仔细览阅了全书,提出了许多宝贵意见;李幼英为初稿的打印出了不少力.作者在此向他们表示衷心感谢.

由于作者水平所限,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正.

作者

1998年4月于重庆

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

随机事件与随机事件的概率都是概率论中最基本的概念，它们是逐步形成与完善起来的. 本章先给出它们的描述性定义，然后再给出它们的严密的数学定义.

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

在自然界中人们碰到的现象大体上可分为两类. 一类是当某些条件实现时必然发生和必然不发生的现象. 例如，"纯水在一个大气压下加热到 100℃ 就沸腾"、"同性电荷必然不互相吸引"、"在恒力作用下质点作等加速运动"等，这一类现象称之为确定性现象或必然现象. 但是，人们还碰到另一类现象，这一类现象在相同一组条件实现时它可能发生也可能不发生，事前不能准确预言它是否发生. 例如，"抛一枚硬币，每次抛掷之前无法肯定正、反面哪一面会出现". 又如，"同一人用同一支枪射击同一目标，每次射击的击中点不尽相同"、"同一地区同一日期可能下雨，也可能不下雨"等. 这一类现象称之为随机现象. 随机现象虽然在相同条件实现时可能的结果不止一个，以及每次事前不能准确预言哪一种结果会出现，但是经过长期的观察或实践，人们逐步发现所谓随机现象不可预言，只是对一次或少数几次观察或实践而言，当在相同条件下进行大量的观察或实践时，不确定现象的每个可能的结果都呈现出某种规律性. 例如，多次抛一枚均匀的硬币，正、反面出现的次数大致相等. 又如，在相同条件下多次射击同一目标，击中点在目标附近就形成某种明显的规律性. 综上所述，随机现象是具有如下特征的现象：在一定条件实现时，有不止一种结果会出现，对每一次来说，事前人们不能准确预言哪一种结果会出现，但是进行大量的重复观察或实践时，每一种结果又呈现出某种规律性. 这种规律性称之为随机现象的统计规律性. 概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2　随机试验

由于随机现象的统计规律性在大量重复试验中才能呈现出来，故概率论的研究与应用跟试验是分不开的. 所谓试验，就是实现一定的条件而观察其结果. 而随机试验是具有如下特性的试验：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但是能事先明确确定所有可能结果的范围；

(3) 每次试验之前不能准确预言哪个结果会出现.

例如，E_1(重复摸球试验)：设一袋中有编号分别为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个同类球，从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中，然后再从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中(这样的摸球方法称为“有放回”). 多次重复这一试验，各次摸得的球的号码未必全同. 虽然每次摸得的球的号码总是 $1,2,\cdots,n$ 之一，但是每次摸球前却不能准确预言哪个球被摸得.

E_2(旋转均匀陀螺的试验)：在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间$[0,3)$上的诸数字. 多次旋转这个陀螺，当它停下时其圆周与桌面接触处的刻度未必全同. 虽然每次总是区间$[0,3)$上一个点与桌面接触，但是每次旋转之前却无法准确预言哪个点与桌面接触.

E_3(射击试验)：多次用步枪射击靶上的目标，由于各种因素的影响，子弹击中的位置未必一样. 虽然每次击中的位置总是靶平面上的一点，但是每次射击前也不能准确预言击中的位置.

E_4(抛一枚均匀硬币的试验)：多次抛一枚均匀的硬币，出现的结果未必会全同. 虽然每次出现的结果不是正面 h，就是反面 t，但是每次抛前也不能准确预言哪个面会出现.

上述的四个试验都是随机试验. 随机试验简称为试验.

1.1.3 随机事件

随机试验的每个可能的结果称为该试验的随机事件，简称为事件. 一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示.

例如，在试验 E_1 中，“摸得的球的号码小于 3”这是试验 E_1 的一个可能结果，故它是 E_1 的一个随机事件. 在试验 E_2 中，“陀螺圆周与桌面接触处的刻度在区间$[1,2)$中”这是试验 E_2 的一个可能的结果，故它是 E_2 的一个随机事件. 在试验 E_4 中，“正面出现”是试验 E_4 的一个可能结果，故它是 E_4 的一个随机事件.

对于一个试验来说，在每次试验中必然要发生(出现)的结果称为此试验的必然事件，记为 Ω；在每次试验中必然不发生(出现)的结果称为此试验的不可能事件，记为$\varnothing$. 例如，在 E_1 中，“摸得的球的号码大于 0”这结果是 E_1 的必然事件，而“摸得的球的号码小于 1”这结果是 E_1 的不可能事件.

必须指出，必然事件与不可能事件都没有随机性，但是为了讨论问题方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件.

1.1.4 基本事件空间

对一个试验来说,我们把其最简单的不能再分的事件称为该试验的基本事件,常以小写字母 $e,w,\cdots$来表示.而把由所有基本事件组成的集合称为该试验的基本事件空间,记为 Ω.

例如,在 E_1 中,"摸得号码为 i 的球",$i=1,2,\cdots,n$,均为 E_1 的基本事件,有 n 个.在 E_2 中,设 $x\in[0,3)$,则"陀螺圆周与桌面接触处的刻度为 x"是 E_2 的基本事件,有无穷不可数多个.在 E_3 中,设 $x,y\in(-\infty,+\infty)$,则"击中点(x,y)"是 E_3 的基本事件,有无穷不可数多个.在 E_4 中,"出现正面"与"出现反面"都是 E_4 的基本事件,有两个.如果设 Ω_i 为 E_i 的基本事件空间,$i=1,2,3,4$,则有

$$\Omega_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\},$$

其中 e_i 表示"摸得号码为 i 的球",$i=1,2,\cdots,n$;

$$\Omega_2=\{x:x\in[0,3)\};$$

$$\Omega_3=\{(x,y):x,y\in(-\infty,+\infty)\};$$

$$\Omega_4=\{h,t\},$$

其中 h,t 分别表示"出现正面"与"出现反面".

因为随机事件是由基本事件组成的集合,所以引入基本事件空间 Ω 后,随机事件就是基本事件空间的子集(注意,反之不成立,即基本事件空间的子集不一定是随机事件).而一个事件 A 出现当且仅当 A 中一个基本事件出现.基本事件空间又叫做样本空间,所以基本事件又叫做样本点.

1.2 事件之间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系就是集合之间的关系,事件的运算就是集合的运算,只是术语不同和赋予概率的含义罢了.

1.2.1 事件之间的关系与简单运算

(1) 子事件.如果属于事件 A 的样本点也属于事件 B,则称 A 为 B 的子事件或 A 为 B 的特款,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.其概率含义是:A 出现 B 必出现.对任意事件 A,显然有

$$A\subset\Omega,\quad \varnothing\subset A,\quad A\subset A.$$

设 A,B,C 均为事件,如果 $A\subset B$,且 $B\subset C$,则 $A\subset C$.

(2) 事件相等.如果事件 A 与事件 B 满足:$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.其概率含义是:A,B 中有一个出现,另一个也必出现.

(3) 和(并)事件. 事件 A 与事件 B 的和事件定义为：由至少属于 A,B 之一的样本点全体组成的集合，记为 $A\cup B$. 其概率含义是：A,B 至少一个出现. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件定义为：由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之一的样本点全体组成的集合，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的和事件定义为：由至少属于 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 之一的样本点全体组成的集合，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 的概率含义与 $A\cup B$ 的概率含义类似.

(4) 积(交)事件. 事件 A 与 B 的积事件定义为：由既属于 A 又属于 B 的样本点全体组成的集合，记为 $A\cap B$ 或 AB. 其概率含义是：A 与 B 同时出现. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件定义为：由属于所有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点全体组成的集合，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的积事件定义为：由属于所有事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的样本点全体组成的集合. 记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 的概率含义类似于 $A\cap B$ 的概率含义.

如果事件 A 与 B 满足：$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为互斥(或互不相容)事件. 其概率含义是：A,B 不同时出现.

如果事件 A 与 B 满足：$AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 为对立(或互逆)事件. 其概率含义是：A,B 中有且仅有一个出现.

如果事件 A 与 B 互斥，则记 $A\cup B$ 为 $A+B$，即 $A+B=A\cup B$.

由上述知，两事件对立则它们一定互斥；反之，未必成立.

(5) 差事件. 属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点全体组成的集合称为 A 与 B 的差事件，记为 $A\setminus B$. 其概率含义是：A 出现而 B 不出现. 如果 $B\subset A$，则称 $A\setminus B$ 为 A 与 B 的正常差，记为 $A-B$，即 $A-B=A\setminus B$.

记 $\Omega-A$ 为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 显然有

事件 A 与 B 对立$\Leftrightarrow$　$A=\overline{B}$.

$\overline{A}=\Omega-A$ 为事件 A 的对立事件.

(6) 对称差. 设 A,B 为两个事件，记 $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，则称 $A\Delta B$ 为 A 与 B 的对称差事件. 其概率含义是：仅能出现 A,B 之一.

因为事件是集合，所以由集合运算的性质与关系式不难证明事件运算的性质与关系式. 设 $A,B,C,A_1,A_2,A_3,\cdots$ 均为事件，Ω 为必然事件，$\varnothing$ 为不可能事件，则有如下关系：

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A, A\cup\varnothing=A,$
$A\setminus A=\varnothing, A\cap\varnothing=\varnothing;$

(2) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A, A\Delta B=B\Delta A;$

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$, $(AB)C=ABC=A(BC)$,

$\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\cap C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap C)$,

$\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\cup C=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cup C)$;

(4) $AB\subset A, AB\subset B, A\subset A\cup B, A\subset A, A\setminus B\subset A$;

(5) $A\subset B\Leftrightarrow AB=A\Leftrightarrow A\cup B=B$;

(6) $\overline{\overline{A}}=A, \overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

$A\setminus B=A\overline{B}=A-(AB)$;

(7) $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$;

(8) $\left(\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \left(\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$;

(9) $A\Delta B=A\overline{B}+B\overline{A}=(A\cup B)-AB=(A\cup B)\overline{AB}$.

上述关系式的证明留给读者自己去完成.

1.2.2 事件序列的极限

设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列,我们定义:

(1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_n\}$的上极限,记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;$$

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_n\}$的下极限,记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k;$$

(3) 如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称事件序列$\{A_n\}$的极限存在且称$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 为其极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$,即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

定理 1.2.1 设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列,则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于无穷多个 $A_n\}$;

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于几乎一切 $A_n\}$,

其中“e 属于几乎一切 A_n”意思是除事件序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$中的有限个事件外,e 属于其余一切事件.

证明 (1)设 $e_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,则对任意正整数 n,$e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,所以 e_0 属

于无穷多个 A_n. 如果不然,则必存在 n_0,使得 $m>n_0$ 时均有 $e_0 \overline{\in} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$,矛盾. 于是证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \{e: e \text{ 属于无穷多个 } A_n\}.$$

反之,设 $e_0 \in \{e: e$ 属于无穷多个 $A_n\}$,则对任意正整数 n 有 $e_0 \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$,从而 $e_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 于是得 $\{e: e$ 属于无穷多个 $A_n\} \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,从而(1)得证.

(2) 设 $e_0 \in \{e: e$ 属于几乎一切 $A_n\}$,则存在正整数 m,使得 $e_0 \in \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$,故 $e_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$,即

$$\{e: e \text{ 属于几乎一切 } A_n\} \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

反之,设 $e_0 \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$,则至少存在一个正整数 m 使 $e_0 \in \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$,故对一切 $k \geqslant m$,均有 $e_0 \in A_k$,即 e_0 属于几乎一切 A_n,所以有 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \{e: e$ 属于几乎一切 $A_n\}$,从而(2)得证.

推论 1.2.1　$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

推论 1.2.2　改变事件序列 $\{A_n\}$ 中的有限多项不影响 $\{A_n\}$ 的上下极限.

推论 1.2.3　(1) $\left(\overline{\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{A}_n$;

(2) $\left(\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{A}_n$.

证明　(1) 由德摩根对偶定律[即 1.2.1 节的(8)式]得

$$\left(\overline{\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n}\right) = \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n}\right) = \bigcap_{n=\infty}^{\infty}\left(\overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}\right)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{A}_n.$$

同理可证(2).

定理 1.2.2　设 $\{A_n\}$ 为样本空间 Ω 中的事件序列.

(1) 如果 $\{A_n\}$ 单调不减,即 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$,则 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 如果 $\{A_n\}$ 单调不增,即 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$,则 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明　(1) 设 $e_0 \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,由定理 1.2.1 知 e_0 属于无穷多个 A_n,故总存在正整数 m,使得 $e_0 \in A_m$. 因为 $\{A_n\}$ 单调不减,所以当 $k \geqslant m$ 时均有 $e_0 \in A_k$,即 e_0 属

于几乎一切 A_n，所以 $e_0 \in \varliminf_{n\to\infty} A_n$. 由此说明 $\varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n$. 又由推论 1.2.1 知 $\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$，于是 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在. 因为 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，所以证得(1).

(2) 因为 $\{A_n\}$ 单调不增，所以 $\{\overline{A}_n\}$ 单调不减，由(1)知 $\lim_{n\to\infty}\overline{A}_n$ 存在且

$$\varliminf_{n\to\infty} \overline{A}_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

由定理 1.2.1 的推论 1.2.3，对上式两边取逆得

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

故 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

为了便于学习，现把概率论中与集合论中的一些术语对照如表 1.1 所示.

表 1.1

符　号	集　合　论	概　率　论	概率含义
Ω	空间	基本事件(样本)空间，必然事件	
$\varnothing$	空集	不可能事件	
e(或 ω)	元素	基本事件(样本点)	
A	子集	事件	
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立(逆)事件	$A,\overline{A}$ 中有且只有一个出现
$A\subset B$	A 为 B 的子集	A 是 B 的子事件	A 出现 B 必出现
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等	A,B 中一个出现另一个也出现
$A\cup B$	A 与 B 的并	A 与 B 的和(并)事件	A,B 中至少一个出现
$A\cap B$	A 与 B 的交	A 与 B 的积事件	A 与 B 同时出现
$A\setminus B$	A 与 B 的差	A 与 B 的差事件	A 出现而 B 不出现
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 不相交	A 与 B 为互斥(互不相容)事件	A 与 B 不同时出现
$A\Delta B$	A 与 B 的对称差	A 与 B 的对称差事件	A 与 B 仅能有一个出现

1.3 事件的概率及其计算

随机事件有其偶然性的一面，即在一次试验中它可能出现也可能不出现. 但是在大量重复试验中它又呈现出内在的规律性，即它出现的可能性大小是确定的，且是可以度量的. 所谓随机事件的概率，概括地说就是用来描述随机事件出现的可能性大小的数量指标. 它是概率论中最基本的概念之一，且是逐步形成完善起来的. 我们先介绍在简单情形下，如何合理地定义概率的方法，然后，从这些定义出发，引出一般情形下概率的严密的数学定义.

1.3.1　古典概型

最初人们研究的试验是一类很简单的试验,其特征如下:

(1) 基本事件总数有限;

(2) 每个基本事件等可能出现.

我们称具有这两个特征的试验是古典概型的.如 1.1.2 节中的试验 E_1 与 E_4 都是古典概型的.

定义 1.3.1　设试验 E 是古典概型的,其样本空间为 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,其一事件 $A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_r}\}$,其中 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中任意 r 个不同的数,$r\leqslant n$,则定义事件 A(出现)的概率为

$$P(A)=\frac{A\ \text{中样本点数}}{\Omega\ \text{中样本点数}}=\frac{r}{n},$$

并称这样定义的概率为古典概率.

由定义知,事件 $\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$ 的概率为

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}.$$

例 1.3.1　从一批 1250 件正品 10 件次品组成的产品中任抽一件,求抽得次品的概率.

解　设 A="抽得次品".因为抽得的一件产品只能是 1260 件产品之一,所以样本点总数为 1260.又因每件产品都等可能被抽得,故此抽样试验是古典概型的."抽得次品"只能是 10 件次品之一,故 A 中基本事件数为 10,从而 $P(A)=\frac{10}{1260}=\frac{1}{126}$.

例 1.3.2　设一袋中有 85 个白球,8 个黑球,接连无放回地从袋中摸取 3 个球,求下列事件的概率:

(1) A="摸得的 3 个球依次为黑白黑";

(2) B="摸得的 3 个球都是黑球";

(3) C="摸得的 3 个球中有两个是黑球".

解　设想球都是编了号的.

(1) 由排列组合知识知,从 93 个不同的球中任取 3 个排成一列,有 P_{93}^3 种不同的排列方式,故基本事件总数为 P_{93}^3.而要使 A 出现,第一、二、三次应分别摸得黑球(有 P_8^1 种方式实现)、摸得白球(有 P_{85}^1 种方式实现)、摸得黑球(有 P_7^1 种方式实现),由排列组合的乘法原理,A 中含有 $\mathrm{P}_8^1\mathrm{P}_{85}^1\mathrm{P}_7^1$ 个基本事件,再由定义得

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_8^1\mathrm{P}_{85}^1\mathrm{P}_7^1}{\mathrm{P}_{93}^3}=0.0061.$$

(2) **解法一** 类似于(1)得

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_{93}^3}=0.0004;$$

解法二 因为事件 B 与顺序无关,且因为

$$\frac{\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_{93}^3}=\frac{\mathrm{P}_8^3/3!}{\mathrm{P}_{93}^3/3!}=\frac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{93}^3},$$

所以可以把从 93 个球中摸取三个的组合数 C_{93}^3当成(2)中基本事件个数,故

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{93}^3}=0.0004.$$

(3) 因事件 C 与摸球次序无关,类似于(2)的解法二,得

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_{85}^1}{\mathrm{C}_{93}^3}=0.0183.$$

如果用排列知识来解(3),则类似于(1),基本事件总数为 P_{93}^3. C 含基本事件数可这样来计算:三次摸球中有两次摸得黑球有 C_3^2种摸取方式. 对某种固定的摸取方式(如前两次均摸得黑球,最后一次摸得白球)有 $\mathrm{P}_8^2\mathrm{P}_{85}^1$种方式实现,故 C 含基本事件数为 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{P}_8^2\mathrm{P}_{85}^1$,从而得

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{P}_8^2\mathrm{P}_{85}^1}{\mathrm{P}_{93}^3}=0.0183.$$

由(2)与(3)可知,对于同一试验中同一问题,样本空间可以取不同. 在有限抽样中,如果抽取是无放回的且所论事件与顺序有关,则所论事件的概率必须用排列知识来求. 如果抽取是无放回的且所论事件与顺序无关. 这时所论事件的概率可以用排列知识来求,也可以用组合知识来求. 但是必须注意,基本事件总数与有利场合数(即所论事件含基本事件数)要么都用排列数来计算,要么都用组合数来计算,两者必须一致.

(3)的一般情况是:从装有 M 个黑球与 N 个白球的袋中无放回任摸 n 个球,正好摸到 k 个黑球的概率为

$$\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_N^{n-k}}{\mathrm{C}_{M+N}^n}=\frac{\mathrm{C}_n^k\mathrm{P}_M^k\mathrm{P}_N^{n-k}}{\mathrm{P}_{M+N}^n},\qquad k=0,1,2,\cdots,\min(M,n),$$

我们称此概率为超几何概率.

例 1.3.3 一袋中有 M 个黑球与 N 个白球,现有放回从袋中摸球,求下列事件的概率:

(1) A =“在 n 次摸球中有 k 次摸得黑球”;

(2) B =“第 k 次摸球首次摸得黑球”;

(3) C =“第 r 次摸球得黑球是在第 k 次摸球时实现”.

解　设想球都是编了号的.

(1) 从 $M+N$ 个不同的球中有放回摸取 n 个球排成一列有 $(M+N)^n$ 种不同的排列方式,故基本事件总数为 $(M+N)^n$. 在 n 个位置上有 k 个黑球有 C_n^k 种不同情况,对于某个固定的情况(如前 k 个位置上都是黑球,后 $n-k$ 个位置上都是白球)可能的排列种数是 M^kN^{n-k},故有利场合数为 $C_n^kM^kN^{n-k}$,从而得

$$P(A)=\frac{C_n^kM^kN^{n-k}}{(M+N)^n}=C_n^kp^kq^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $p=\dfrac{M}{M+N}$, $q=1-p$. 因为此概率是 $(p+q)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}$ 的展开式的一般项,故称它为二项概率.

(2) 样本点总数为 $(M+N)^k$. 因为第 k 次摸球才第一次摸得黑球,故前 $k-1$ 次均摸得白球,从而有利场合数为 $N^{k-1}M$,故

$$P(B)=\frac{N^{k-1}M}{(M+N)^k}=pq^{k-1},\qquad k=1,2,3,\cdots,$$

其中 $p=\dfrac{M}{M+N}$, $q=1-p$. 因为 pq^{k-1} 是几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}$ 的一般项,故称此概率为几何概率.

(3) 基本事件总数为 $(M+N)^k$. 由题意第 k 次应摸得黑球,有 M 种取法,而前 $k-1$ 次中有 $r-1$ 次摸得黑球,由(1)有 $C_{k-1}^{r-1}M^{r-1}N^{k-r}$ 种取法,故有利场合数为 $C_{k-1}^{r-1}M^rN^{k-r}$,从而得

$$P(C)=\frac{C_{k-1}^{r-1}M^rN^{k-r}}{(M+N)^k}=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r},\qquad k=r,r+1,\cdots,$$

其中 $p=\dfrac{M}{M+N}$, $q=1-p$. 由文献[15]的 225 页,得

$$\begin{aligned}(1-q)^{-r}&=\sum_{t=0}^{\infty}C_{r+t-1}^{t}q^t\qquad(\text{令 } k=r+t)\\&=\sum_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}q^{k-r},\end{aligned}$$

故称概率 $C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}$ 为负二项概率,也叫帕斯卡(Pascal)概率.

1.3.2　古典概率的性质

古典概率有下列三个基本性质: