

2006修订版

注册公用设备工程师考试 公共基础课精讲精练 给水排水、暖通空调 及动力专业

刘 燕 主编



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

注册公用设备工程师考试

公共基础课精讲精练·给水排水、 暖通空调及动力专业

刘燕 主编



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试即将开始，为有效指导考生复习、应考而组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国建设部公布的注册公用设备工程师基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们的深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。

本教材力求简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用，特别是其中的例题结合考题的形式，注意突出重点概念的讲解。本教材每章后均附有复习题以及复习题答案和提示，可作为考生检验复习效果和准备考试之用。

本教材是参加工程师执业资格基础考试人员的必备参考书。

图书在版编目（CIP）数据

注册公用设备工程师考试公共基础课精讲精练·给水排水、暖通空调及动力专业/刘燕主编. —北京：中国电力出版社，2005

ISBN 7-5083-2948-1

I. 注... II. 刘... III. 公用事业—基础设施—建筑设计—工程师—资格考核—自学参考资料 IV. TU8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 126566 号

中国电力出版社出版发行

北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>

责任编辑：刘 嵩 责任印制：陈焊彬

汇鑫印务有限公司印刷·各地新华书店经售

2005 年 1 月第 1 版·2006 年 4 月第 6 次印刷

787mm×1092mm 1/16·26.25 印张·634 千字

定价：48.00 元

版权专有 翻印必究

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

本社购书热线电话（010-88386685）

编委会成员

主 编：刘 燕

参 编：(排名不分先后)

王文海 叶安丽 张 英 李群高 陈志新

岳冠华 章美芬 程学平

前 言

建设部和人事部决定自 2005 年起实施注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试制度，这是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师资格，必须通过全国统一考试取得。

为配合全国注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师资格考试，也为有效指导考生复习、应考所组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国建设部 2004 年 7 月公布的注册公用设备工程师公共基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们的深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。本书共包含 9 章，各章编写人员名单如下：

第 1 章	高等数学	李群高
第 2 章	普通物理	程学平
第 3 章	普通化学	岳冠华
第 4 章	理论力学	刘燕
第 5 章	材料力学	张英
第 6 章	流体力学	王文海
第 7 章	计算机应用基础	陈志新
第 8 章	电工电子技术	叶安丽
第 9 章	工程经济	章美芬

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，恳请读者指正。

编者

目 录

前言

第 1 章 高等数学	1
1.1 空间解析几何	1
1.1.1 向量代数	1
1.1.2 平面	4
1.1.3 直线	4
1.1.4 曲面	5
1.1.5 空间曲线	6
1.2 微分学	7
1.2.1 极限与函数的连续性	7
1.2.2 导数与微分	10
1.2.3 偏导数与全微分	13
1.2.4 导数与微分应用	14
1.3 积分学	17
1.3.1 不定积分	17
1.3.2 定积分	19
1.3.3 广义积分	21
1.3.4 重积分	22
1.3.5 平面曲线积分	25
1.3.6 积分应用	27
1.4 无穷级数	31
1.4.1 数项级数	31
1.4.2 幂级数	33
1.4.3 傅里叶级数	35
1.5 常微分方程	36
1.5.1 微分方程的基本概念	36
1.5.2 可分离变量方程	37
1.5.3 一阶线性微分方程	37
1.5.4 可降阶微分方程	38
1.5.5 常数系数线性微分方程	38
1.6 概率与数理统计	39
1.6.1 概率论的基本概念	39
1.6.2 一维随机变量的分布和数字特征	43
1.6.3 数理统计的基本概念	47
1.6.4 参数估计	49
1.6.5 假设检验	49

1.6.6 方差分析	50
1.6.7 一元回归分析	51
1.7 向量分析	52
1.7.1 向量函数	52
1.7.2 向量函数的导向量及微分	52
1.8 线性代数	53
1.8.1 行列式	53
1.8.2 矩阵	55
1.8.3 n 维向量	59
1.8.4 线性方程组	61
1.8.5 矩阵的特征值与特征向量	62
1.8.6 二次型	64
复习题	64
复习题答案与提示	74
第 2 章 普通物理	77
2.1 热学	77
2.1.1 复习指导	77
2.1.2 平衡态、气体状态参量	77
2.1.3 理想气体状态方程	78
2.1.4 理想气体的压强和温度的统计解释	78
2.1.5 能量按自由度均分原理	79
2.1.6 理想气体内能	80
2.1.7 麦克斯韦速率分布定律	80
2.1.8 平均碰撞次数和平均自由程	81
2.2 热力学	82
2.2.1 内能、功和热量	82
2.2.2 热力学第一定律	82
2.2.3 热力学第一定律在理想气体等值过程和绝热过程中的应用	83
2.2.4 气体摩尔热容	84
2.2.5 循环过程和卡诺循环	85
2.2.6 热力学第二定律及其统计意义	86
2.2.7 可逆过程和不可逆过程	86
2.2.8 熵	86
2.3 波动学	87
2.3.1 复习指导	87
2.3.2 机械波的产生与传播	87
2.3.3 简谐波的表达式	88
2.3.4 波的能量	89
2.3.5 波的干涉、驻波	91
2.3.6 声波、超声波、次声波	92
2.3.7 多普勒效应	92

2.4 光学	92
2.4.1 复习指导	92
2.4.2 概述	93
2.4.3 光的衍射	97
2.4.4 光的偏振	98
复习题	101
复习题答案与提示	107
第3章 普通化学	110
3.1 物质的结构与物质的状态	110
3.1.1 原子结构	110
3.1.2 化学键和分子结构	113
3.1.3 晶体结构和性质	116
3.1.4 气体定律	117
3.2 溶液	118
3.2.1 溶液浓度	118
3.2.2 非电解质稀溶液的通性	118
3.2.3 可溶电解质单相电离平衡	120
3.2.4 难溶电解质的多相解离平衡	123
3.3 周期	125
3.3.1 原子核外电子分布和元素周期系	125
3.3.2 元素性质的周期性递变	126
3.3.3 氧化物及其水合物的酸碱性递变规律	127
3.4 化学反应方程式, 化学反应速率与化学平衡	127
3.4.1 化学反应方程式的写法、配平、计算	127
3.4.2 反应热 吸热 放热 热化学反应方程式的写法	127
3.4.3 反应方程式与反应热效应的关系及计算、物质标准摩尔生成焓、反应的焓变与计算	128
3.4.4 熵 物持的标准摩尔熵 热力学第三定律 物质的熵值大小规律 反应的标准摩尔熵变及计算	129
3.4.5 吉布斯函数 吉布斯函数变 反应方向(自发性)的判断	130
3.4.6 化学反应速度的表示 质量作用定律 速率方程式 反应级数	130
3.4.7 阿仑尼乌斯公式 温度对反应速率的影响 活化能 催化剂 从活化分子、活化能的观点解释加快反应速率的方法	131
3.4.8 化学平衡的特征 标准平衡常数 $K^\ominus$ 的表达式 多重平衡规则 转化率 平衡中物质量关系及有关平衡计算 温度对平衡常数的影响	132
3.4.9 化学平衡的移动 浓度对化学平衡的影响 压力对化学平衡的影响 温度对化学平衡的影响	134
3.5 氧化还原与电化学	135
3.5.1 氧化反应 还原反应 氧化剂 还原剂 氧化还原反应方程式的配平	135
3.5.2 原电池的电极反应(半反应)、电池反应(总反应) 原电池的图式	136
3.5.3 标准氢电极 标准电极电势 原电池电动势 电动势的能斯特方程及电动势的计算 电极电势的能斯特方程及电极电势的计算	136

3.5.4 电极电势的应用 氧化剂、还原剂的相对强弱的比较 氧化还原反应方向的判断 氧化还原反应标准平衡常数 $K^\ominus$ 的计算	138
3.5.5 电解池 阳极及阳极反应 阴极及阴极反应	139
3.5.6 电解产物判断及其规律 电解的应用	139
3.5.7 金属的腐蚀及防止 化学腐蚀 电化学腐蚀 析氢腐蚀 析氧腐蚀 差异充气腐蚀	140
3.6 有机化学	141
3.6.1 有机物的特点、分类	141
3.6.2 烃的分类及结构特征 烃的衍生物的分类及结构特征	141
3.6.3 有机化合物的命名	142
3.6.4 氧化反应 不饱和烃的氧化 芳烃的氧化 醇的氧化 醛的氧化	145
3.6.5 取代反应 烷烃的取代反应 芳烃的取代反应 几种重要的取代反应 取代基的定位效应	146
3.6.6 消去反应 醇的消去反应 羧酸的脱水反应	147
3.6.7 加成反应 不饱和烃的加成 羧基的加成	148
3.6.8 高分子化合物及其合成	149
3.6.9 高分子材料	149
3.6.10 典型有机化合物的主要性质及用途	152
复习题	153
复习题答案与提示	158
第4章 理论力学	162
4.1 静力学	162
4.1.1 静力学的基本概念及基本原理	162
4.1.2 力系的简化	167
4.1.3 力系的平衡	168
4.2 运动学	176
4.2.1 点的运动学	176
4.2.2 刚体的基本运动	177
4.2.3 点的合成运动	180
4.2.4 刚体的平面运动	182
4.3 动力学	185
4.3.1 动力学基本定律及质点运动微分方程	185
4.3.2 动力学普遍定理	186
4.3.3 达朗贝尔原理	191
4.3.4 虚位移原理	193
4.3.5 单自由度系统自由振动	195
复习题	196
复习题答案与提示	207
第5章 材料力学	209
5.1 轴向拉伸与压缩	209
5.1.1 轴向拉伸与压缩的概念	209
5.1.2 轴向拉伸与压缩杆件的内力	209

5.1.3 强度条件	211
5.1.4 轴向拉压杆的变形 胡克定律	212
5.2 剪切	213
5.2.1 连接件的实用计算	213
5.2.2 切应力互等定理剪切胡克定律	214
5.3 扭转	215
5.3.1 扭转的概念	215
5.3.2 外力偶矩的计算	215
5.3.3 扭矩和扭矩图	215
5.3.4 圆杆在扭转时的应力和强度条件	215
5.3.5 圆杆扭转时的变形刚度条件	216
5.3.6 扭转变形能计算	216
5.4 截面图形几何性质	217
5.4.1 静矩与形心	217
5.4.2 极惯性矩、惯性矩、惯性积、惯性半径	217
5.4.3 惯性矩的平行移轴公式	218
5.4.4 惯性主轴和主惯性矩	218
5.5 弯曲梁的内力、应力和位移	219
5.5.1 平面弯曲的概念	219
5.5.2 梁的内力	219
5.5.3 弯曲正应力 正应力强度条件	221
5.5.4 弯曲切应力 弯曲切应力强度条件	222
5.5.5 梁的合理截面形状	223
5.5.6 弯曲中心的概念	223
5.5.7 梁的位移	225
5.5.8 卡氏第二定理求变形	227
5.6 应力状态和强度理论	228
5.6.1 点的应力状态	228
5.6.2 平面应力状态	229
5.6.3 三向应力状态简介	230
5.6.4 广义胡克定律	230
5.6.5 强度理论	231
5.7 组合变形	234
5.7.1 斜弯曲	234
5.7.2 拉(压)弯组和变形	235
5.7.3 弯扭组合变形	235
5.8 压杆稳定	236
5.8.1 压杆稳定的临界力——欧拉公式	236
5.8.2 欧拉公式的适用范围 经验公式	237
5.8.3 压杆的稳定计算	238
5.8.4 提高压杆稳定性的措施	238
复习题	240
复习题答案与提示	250

第 6 章 流体力学	252
6.1 流体的主要物理性质	252
6.1.1 易流动性	252
6.1.2 惯性	252
6.1.3 重力特性	252
6.1.4 粘滞性	253
6.1.5 压缩性和热胀性	254
6.1.6 表面张力特性	254
6.2 流体静力学	254
6.2.1 流体静压强及其特性	254
6.2.2 重力作用下流体静压强的分布规律及其度量	255
6.2.3 液体总压力的计算	256
6.3 流体运动学、动力学基础	259
6.3.1 流场的基本概念	259
6.3.2 流体运动的总流分析	259
6.4 流动阻力和水头损失	262
6.4.1 实际流体的两种流态 层流和紊流	262
6.4.2 圆管中的层流运动 紊流运动的特征	262
6.4.3 沿程水头损失和局部水头损失	263
6.4.4 边界层基本概念和绕流阻力	266
6.5 孔口、管嘴出流 有压管道恒定流	268
6.5.1 孔口、管嘴出流	268
6.5.2 有压管道恒定流	269
6.6 明渠恒定均匀流	271
6.6.1 明渠流的基本概念	271
6.6.2 过水断面的几何要素	272
6.6.3 明渠均匀流的水力特征和基本公式	272
6.7 渗流定律 井和集水廊道	273
6.7.1 渗流基本概念	273
6.7.2 渗流基本定律	273
6.7.3 单井的渗流	274
6.7.4 集水廊道	275
6.8 相似原理和量纲分析	276
6.8.1 相似原理	276
6.8.2 量纲和谐原理与量纲分析	277
6.9 流体运动参数的测量	278
6.9.1 流速的测量	278
6.9.2 流量的测量	278
6.9.3 压强的测量	279
复习题	280
复习题答案与提示	286

第 7 章 计算机应用基础	290
7.1 计算机基础知识	290
7.1.1 计算机硬件的组成及功能	290
7.1.2 计算机软件组成及功能	291
7.1.3 数制转换	294
7.2 Windows 操作系统	296
7.2.1 基本知识	296
7.2.2 系统的启动与退出	296
7.2.3 资源管理器的基本操作	297
7.2.4 磁盘操作	298
7.2.5 查找文件与文件夹	299
7.2.6 选定文件与文件夹	299
7.2.7 复制或移动文件与文件夹	300
7.2.8 重新命名文件或文件夹	301
7.2.9 删除文件或文件夹	301
7.2.10 剪贴板	302
7.2.11 创建文件夹	302
7.2.12 计算机网络	303
7.3 计算机程序设计语言	305
7.3.1 FORTRAN 程序构成与基本规定	305
7.3.2 数据类型与运算	306
7.3.3 FORTRAN 数据文件	307
7.3.4 FORTRAN 程序设计常用语句	309
复习题	313
复习题答案与提示	317
第 8 章 电工与电子技术	320
8.1 电场与磁场	320
8.1.1 库仑定律	320
8.1.2 高斯定理	321
8.1.3 安培环路定律	321
8.1.4 电磁感应定律	321
8.2 直流电路	322
8.2.1 电路基本元件	322
8.2.2 欧姆定律	323
8.2.3 基尔霍夫定律	323
8.2.4 叠加原理	324
8.2.5 戴维宁定理	325
8.3 正弦交流电路	325
8.3.1 三要素	325
8.3.2 有效值	327

8.3.3 复阻抗	327
8.3.4 功率及功率因数	329
8.3.5 串联谐振和并联谐振	330
8.3.6 三相电路	331
8.3.7 安全用电常识	333
8.4 RC 和 RL 电路暂态过程	335
8.4.1 RC、RL 电路的响应	335
8.4.2 三要素法	335
8.5 变压器与电动机	336
8.5.1 变压器	336
8.5.2 三相异步电动机的使用	337
8.5.3 常用电动机的继电 - 接触器控制	338
8.6 二极管及整流、滤波、稳压电路	339
8.6.1 半导体二极管	339
8.6.2 整流电路和滤波电路	339
8.6.3 稳压电路	341
8.7 三极管和单管放大电路	342
8.7.1 三极管的结构及工作状态	342
8.7.2 单管放大电路	343
8.8 运算放大器	345
8.8.1 组成与特点	345
8.8.2 运算放大器的应用	346
8.9 门电路和触发器	348
8.9.1 基本门电路	348
8.9.2 触发器	350
复习题	352
复习题答案与提示	359
第 9 章 工程经济	361
9.1 现金流量构成与资金等值计算	361
9.1.1 现金流量	361
9.1.2 投资概念及构成	361
9.1.3 资产	361
9.1.4 成本	363
9.1.5 经营成本	363
9.1.6 销售收入	364
9.1.7 利润	364
9.1.8 工程项目投资涉及的主要税种	364
9.1.9 资金等值计算常用公式及应用复利系数表的用法	364
9.2 投资经济效果评价方法和参数	368
9.2.1 净现值 (NPV)	368
9.2.2 内部收益率 (IRR)	369

9.2.3 净年值 (NAV)	370
9.2.4 费用现值和费用年值 (PC 和 AC)	370
9.2.5 差额内部收益率 (ΔIRR)	371
9.2.6 投资回收期	372
9.2.7 基准折现率	373
9.2.8 备选方案的类型	373
9.2.9 寿命相等方案与寿命不等方案的比选	374
9.3 不确定性分析	377
9.3.1 盈亏平衡分析 盈亏平衡点	377
9.3.2 固定成本 变动成本	378
9.3.3 敏感性分析 单因素敏感性分析 敏感因素	379
9.4 投资项目的财务评价	380
9.4.1 工业投资项目可行性研究的基本内容	380
9.4.2 投资项目财务评价的目标与工作内容	381
9.4.3 盈利能力分析	382
9.4.4 资金筹措的主要方式	383
9.4.5 资金成本	383
9.4.6 债务偿还的主要方式	384
9.4.7 基础财务报表	384
9.4.8 全投资经济效益与自有资金经济效益 财务效果计算	384
9.4.9 清偿能力分析	387
9.4.10 改扩建和技术改造投资项目财务评价的特点	389
9.5 价值工程	391
9.5.1 价值工程的概念、内容与实施步骤	391
9.5.2 功能分析	391
9.5.3 功能评价	392
9.5.4 价值评价	393
9.5.5 改进方案创新和评价, 改进方案实施和评价	393
附录 复利系数表	394
复习题	398
复习题答案与提示	401
参考文献	403

第1章 高等数学

考试大纲

1. 空间解析几何: 向量代数 直线 平面 柱面 旋转曲面 二次曲面 空间曲线
2. 微分学: 极限 连续导数 微分 偏导数 全微分导数与微分的应用
3. 积分学: 不定积分 定积分 广义积分 二重积分 三重积分 平面曲线积分 积分应用
4. 无穷级数: 数项级数 幂级数 泰勒级数 傅里叶级数
5. 常微分方程: 可分离变量方程 一阶线性方程 可降阶方程 常系数线性方程
6. 概率与数理统计: 随机事件与概率 古典概型 一维随机变量的分布和数字特征 数理统计的基本概念 参数估计 假设检验 方差分析 一元回归分析
7. 向量分析
8. 线性代数: 行列式 矩阵 n 维向量 线性方程组 矩阵的特征值与特征向量 二次型

1.1 空间解析几何

1.1.1 向量代数

1. 向量(有大小又有方向的量)

(1) 向量的表示法。设向量 $\mathbf{a}$ 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$ 。

1) 向量的几何表示: 有向线段 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$

2) 坐标表达式

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

(2) 向量的模(向量的大小)

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(3) 向量的方向角与方向余弦(向量的方向)。向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角 α 、 β 、 γ 叫 $\mathbf{a}$ 的方向角($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$)。 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 叫做 $\mathbf{a}$ 的方向余弦($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$$

(4) 几种特殊向量

1) 单位向量: 模为 1 的向量。

与 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量 $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$

基本单位向量: 与 x 轴、 y 轴、 z 轴同方向的单位向量, 记为 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 。

2) 负向量: 与 $\mathbf{a}$ 模相同, 方向相反的向量, 记为 $-\mathbf{a}$ 。

3) 零向量: 模为 0, 没有确定方向的向量, 记为 $\mathbf{0}$ 。

(5) 自由向量: 不考虑起点, 可以自由平移的向量称为自由向量。

两自由向量相等: $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow$ 模相等($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$)且方向相同(相等的自由向量视为同一个向量)

(6) 向量在轴上的投影

定义: 设向量 $\mathbf{AB}$ 的起点 A 与终点 B 在轴 u 上的投影点分别为 A' 和 B' , 则称轴 u 上的有向线段 $\mathbf{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 叫向量 $\mathbf{AB}$ 在轴 u 上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \mathbf{AB} = A'B'$, 且

$$\text{Prj}_u \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos(\widehat{\mathbf{AB}, u})$$

2. 向量的运算

(1) 向量的加减法

1) 两向量相加, 其和仍为向量, 平面向量遵循平行四边形法则或三角形法则。

2) 坐标表达式

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

3) 运算律

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

4) 向量的减法

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

(2) 数乘向量

1) 定义: 数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积为一向量, 记作 $\lambda \mathbf{a}$, 其模 $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$, 其方向, 当 $\lambda > 0$ 时, 与 $\mathbf{a}$ 同向; $\lambda < 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 反向。

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

2) 坐标表达式

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

3) 运算律

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu) \mathbf{a} = \mu(\lambda \mathbf{a})$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

4) 性质

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

(3) 数量积(点积)

1) 定义: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ (运算结果为一数量)

等价定义 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_b \mathbf{a}$

2) 坐标表达式

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

3) 运算律

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

4) 性质

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

5) 两向量夹角的余弦公式

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(4) 向量积(叉积)

1) 定义: $a \times b = n^0 |a||b| \sin(\widehat{a, b})$, 其中 n^0 是按右手法则垂直于 a, b 所在平面的单位向量(运算结果为一向量)。

$|a \times b| = |a||b| \sin(\widehat{a, b})$ 是以 a, b 为邻边的平行四边形的面积

2) 坐标表达式

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

3) 运算律

$$\begin{aligned} (\lambda a) \times b &= \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b) \\ (a + b) \times c &= a \times c + b \times c, a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ a \times b &= -b \times a \end{aligned}$$

4) 性质

$$\begin{aligned} a \times a &= 0 \\ a // b &\Leftrightarrow a \times b = 0 \\ a \times b &\perp a, a \times b \perp b \end{aligned}$$

(5) 混合积

1) 定义: $[abc] = (a \times b) \cdot c$ (运算结果为一数量)

$[abc] = \pm V$ (V 为以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积)

2) 性质

$$[abc] = [bac] = [cab]$$

a, b, c 共面 $\Leftrightarrow [abc] = 0$

【例 1-1】 已知 $|a| = 2, |b| = \sqrt{2}$, 且 $a \cdot b = 2$, 则 $|a \times b|$ 为_____。

A 2 B $2\sqrt{2}$ C $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D 1

解: $a \times b = |a||b| \sin(\widehat{a, b})$, 所以 $2 = a \cdot b = |a||b| \cos(\widehat{a, b})$

所以 $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{2}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin(\widehat{a, b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|a \times b| = |a||b| \sin(\widehat{a, b}) = 2$, 故选 A。

【例 1-2】 已知向量 $a = i + j + k$, 则垂直于 a 且垂直于 Oy 轴的单位向量是_____。

A. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k)$ B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(i - j + k)$
C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(i - k)$ D. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(i + k)$