双調和方程的一种数值解法

吉林师范大学数学系計算数学教研室

1961·12

双調和方程的一种数值解法

吉林师大数学系計算数学教研室

于丞在

1. 引言

在实际工程（水坝、薄壳）以及彈性力学薄板的古典理論当中常常遇到双調和算子

$$\Delta\Delta=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

它的作用类似于 Laplace 算子在势能理論中所起的作用

特别，具有各种边界条件的双調和方程

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\Delta u=0\\ \text{以及，重 Пуасон 方程}\\ \Delta\Delta u=f\end{array}\right\}\quad(1)$$

的解法上，引起了国内外較大的重視[1,2]

这篇論文目的在于想提供一个双調和差分算子的追赶和迭代相结合的一种解法

正式討論本文的主要内容之前，为后面的联系方便起見，先介紹一下大家已熟悉的一维二阶差分方程的追赶法。

对於差分方程

$$\left.\begin{array}{l}a_i u_{i+1}-b_i u_i+c_i u_{i-1}=-f_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n-1\\ \qquad u_0=0,\quad u_n=0\end{array}\right.\qquad(2)$$

当条件 $b_i\geqslant a_i+c_i$，$c_i\leqslant a_i$，$i=2,3\cdots\cdots,n-2$ 満足时，用下列公式可求得所有 u_i

$$
\left.\begin{array}{l}
z_i = \varepsilon_i z_{i-1} + r_i f_i \\
u_i = \alpha_i u_{i+1} + z_i \\
\text{其中 } \left.\begin{array}{l} \alpha_i = a_i r_i, \\ \varepsilon_i = c_i r_i \\ r_i = \dfrac{1}{b_i - c_i a_{i-1} r_{i-1}} \end{array}\right\} \quad i = 2, 3 \cdots\cdots n-2 \\
z_1 = \dfrac{f_1}{b_1} \\
u_{n-1} = z_{n-1}
\end{array}\right\} \quad (3)
$$

此外，由 $\alpha_i < 1$，$\varepsilon_i < 1$，则整个解题过程是稳定的。

2　公式的推导：

在矩形区域 R 内考虑方程(1)所对应的差分方程：

$$\nabla_x^4 u_{i,j} + 2\nabla_y^2 \nabla_x^2 u_{i,j} + \nabla_y^4 u_{i,j} = f_{i,j}$$

$$(ih, jh) \in R$$

即

$$
\left.\begin{array}{l}
20u_{i,j} - 8(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \\
+2(u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}) \\
+u_{i,j+2} + u_{i,j-2} + u_{i-2,j} + u_{i+2,j} = f_{i,j} \\
\qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1
\end{array}\right\} \quad (4)
$$

我们考虑简单的边界条件：

$$
\begin{array}{ll}
① & u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0 \\
② & \left.\begin{array}{l} u_{1,j} = -u_{-1,j} \\ u_{n+1,j} = -u_{n-1,j} \end{array}\right. \\
③ & \left.\begin{array}{l} u_{i,1} = -u_{i,-1} \\ u_{i,n+1} = -u_{i,n-1} \end{array}\right.
\end{array}
\quad (
$$

其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, n$　$j = 0, 1, 2, \cdots, n$

我们首先考虑，已分解好的差分方程：

$$
\begin{aligned}
z_{i,j} &= \alpha(z_{i-1,j}+z_{i+1,j})+rF_{i,j} \\
u_{i,j} &= \alpha(u_{i,j-1}+u_{i,j+1})+z_{i,j}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

由上式得展开式：

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j}-\alpha(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}+u_{i-1,j}+u_{i+1,j}) \\
&+\alpha^2(u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1})=F_{i,j}r
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(7)
$$

要把某一差分方程：

$$
\begin{aligned}
&Pu_{i,j}-q(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}+u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) \\
&+R(u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1})=F_{i,j}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(8)
$$

分解为形如(6)，则与(7)比較，有：

$$
\left.
\begin{aligned}
&Pr=1,\quad qr=\alpha,\quad Rr=\alpha^2 \\
&\text{由此}\quad \alpha=\frac{q}{p},\quad r=\frac{1}{p} \\
&\text{即}\quad q^2=PR
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots(9)
$$

这时，我們考虑到方程(4)，为把它分解为(6)型，並考虑到計算的方便起見。

令 $P=32$，$q=8$，$R=2$

显然，滿足$q^2=PR$

也就是方程(4)的变型：

$$
\begin{aligned}
&32u_{i,j}-8(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}+u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) \\
&+2(u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}) \\
&=f_{i,j}+12u_{i,j}-(u_{i,j+2}+u_{i,j-2}+u_{i-2,j} \\
&+u_{i+2,j})=F_{i,j}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

可以分解为形如(6)

其中，$\alpha=\dfrac{q}{p}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$。

$$r=\frac{1}{32}$$

于是，

$$
\begin{cases}
z_{i,j}=\dfrac{1}{4}(z_{i-1,j}+z_{i+1,j})+\dfrac{1}{32}(f_{i,j}+\varphi_{i,j}) \\
u_{i,j}=\dfrac{1}{4}(u_{i,j-1}+u_{i,j+1})+z_{i,j} \\
\varphi_{i,j}=12u_{i,j}-(u_{i,j-2}+u_{i,j+2}+u_{i-2,j} \\
\qquad +u_{i+2,j})
\end{cases}
\qquad \cdots\cdots\cdots(11)
$$

把上面公式(11)化为迭代形式为

$$
\left.
\begin{aligned}
&-8z^{(n+1)}_{i-1,j}+32z^{(n+1)}_{i,j}-8z^{(n+1)}_{i+1,j}=f_{i,j}+\varphi^{(n)}_{i,j} \\
&-u^{(n+1)}_{i,j-1}+4u^{(n+1)}_{i,j}-u^{(n+1)}_{i,j+1}=4z^{(n+1)}_{i,j} \\
&\varphi^{(n)}_{i,j}=12u^{(n)}_{i,j}-(u^{(n)}_{i,j+2}+u^{(n)}_{i,j-2}+u^{(n)}_{i-2,j} \\
&\qquad\qquad +u^{(n)}_{i+2,j})
\end{aligned}
\right\}\quad(12)
$$

$i=1,2,\cdots\cdots,n-1$

$j=1,2,\cdots\cdots,n-1$

考虑到边界条件(5)和公式(6)

$$
\left.
\begin{array}{lll}
① & z_{0,j}=z_{n,j}=0 & j=0,1,2,\cdots,n-1,n \\
② & u_{i,0}=u_{i,n}=0 & i=0,1,2,\cdots,n-1,n \\
③ & \left.\begin{array}{l} u_{i,-1}=-u_{i,1} \\ u_{i,n+1}=-u_{i,n-1} \end{array}\right\} & i=1,2,\cdots\cdots,n-1,n \\
④ & \left.\begin{array}{l} u_{-1,j}=-u_{1,j} \\ u_{n+1,j}=-u_{n-1,j} \end{array}\right\} & j=0,2,\cdots\cdots,n-1,n
\end{array}
\right\}(13)
$$

于是，解13点格式(4)及(5)的問題，就归結于利用公式(12)来迭代的問題，迭代的过程就是这样的：任取初值 $u^{(0)}_{i,j}$ 确定 $\varphi^{(0)}_{i,j}$ 对第一个公式关于固定的 j（$j=1,2,\cdots,n-1$）利用追赶公式(3)求得所有 $z_{i,j}$（在区域上由底而上的），关于第二个公式，对固定的 i（$i=1,2,\cdots,n-1$）再利用追赶公式(3)求得所有 $u_{i,j}$（在区域上由左边到右边），然后已求的 u_{ij} 作为下次迭代的初始值，再确定 $\varphi^{(n)}_{i,j}$，依次的迭代，直到迭代結束为止。

3　收敛性的証明：

公式⑿的誤差公式展开以后得（由方程⑽知）

$$3\,2\,e_{i,j}^{(n+1)}-8\left(e_{i+1,j}^{(n+1)}+e_{i-1,j}^{(n+1)}+e_{i,j-1}^{(n+1)}+e_{i,j+1}^{(n+1)}\right)$$

$$+2\left(e_{i-1,j+1}^{(n+1)}+e_{i-1,j-1}^{(n+1)}+e_{i+1,j-1}^{(n+1)}+e_{i+1,j+1}^{(n+1)}\right)$$

$$=12e_{i,j}^{(n)}-\left(e_{i,j+2}^{(n)}+e_{i,j-2}^{(n)}+e_{i-2,j}^{(n)}+e_{i+2,j}^{(n)}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

設上式左边所对应的矩陣为A，右边所对应的矩陣为B，就上式可簡写为

$$Ae_{ij}^{(n+1)}=Be_{ij}^{(n)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)'$$

于是只要証明$A^{-1}B$的特征值小于1，就保証

$$\|e_{ij}^{(n+1)}\|\Rightarrow 0$$

⒁式可写为

$$\left\{8e_{i,j}^{(n+1)}-4\left(e_{i+1,j}^{(n+1)}+e_{i-1,j}^{(n+1)}+e_{i,j-1}^{(n+1)}+e_{i,j+1}^{(n+1)}\right)\right.$$

$$\left.+2\left(e_{i-1,j+1}^{(n+1)}+e_{i-1,j-1}^{(n+1)}+e_{i+1,j-1}^{(n+1)}+e_{i+1,j+1}^{(n+1)}\right)\right\}$$

$$+\left\{24e_{ij}^{(n+1)}-4\left(e_{i+1,j}^{(n+1)}+e_{i-1,j}^{(n+1)}+e_{i,j-1}^{(n+1)}+e_{i,j+1}^{(n+1)}\right)\right\}$$

$$=-\left\{12e_{i,j}^{(n)}-4\left(\quad (n)\quad\right)+\left(\quad (n)\quad\right)\right\}$$

$$+\left\{24e_{ij}^{(n)}-4\left(\quad (n)\quad\right)\right\}\qquad(15)$$

簡写为　$2\nabla_y^2\nabla_x^2 e_{i,j}^{(n+1)}+\left\{24e_{i,j}^{(n+1)}-4\left(\quad\right)\right\}$

$$=-\left(\nabla_x^4 e_{i,j}^{(n)}+\nabla_y^4 e_{i,j}^{(n)}\right)+\left\{24e_{i,j}^{(n)}-4\left(^{(n)}\quad\right)\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)'$$

設$e_{ij}^{(k)}=A\sin(p\pi ih)\sin(q\pi ih)$，k为迭代次数，A为常数。

不难計算：

$$2\nabla_y^2\nabla_x^2 e_{ij}^{(n+1)}=32e_{i,j}^{(n+1)}\sin^2\frac{p}{2}\pi h\sin^2\frac{q}{2}\pi h$$

$$(\nabla_x^4 e_{ij}^{(n)} + \nabla_y^4 e_{ij}^{(n)}) = 16 e_{ij}^{(n)} \left(\sin^4 \frac{p}{2}\pi h + \sin^4 \frac{9}{2}\pi h\right)$$

$$24e_{ij}^{(k)} - 4(e_{ij+1}^{(k)} + e_{ij-1}^{(k)} + e_{i+1j}^{(k)} + e_{i-1j}^{(k)})$$

$$= [24 - 8(\cos p\pi h + \cos q\pi h)] e_{ij}^{(k)}$$

$$= \{8 + 8[2 - (\cos p\pi h + \cos q\pi h)]\} e_{ij}^{(k)}$$

$$= \left[8 + 16\left(\sin^2 \frac{p}{2}\pi h + \sin^2 \frac{p}{2}\pi h\right)\right] e_{ij}^{(k)}$$

其中$k = n$或$n + 1$。

于是，由(10)式得：

$$\left[32\sin^2\frac{p}{2}\pi h\sin^2\frac{q}{2}\pi h + 8 + 16\left(\sin^2\frac{p}{2}\pi h + \sin^2\frac{q}{2}\pi h\right)\right] e_{ij}^{(n+1)} = \left[-16\left(\sin^4\frac{p}{2}\pi h + \sin^4\frac{p}{2}\pi h\right) + 8 + 16\left(\sin^2\frac{p}{2}\pi h + \sin^2\frac{q}{2}\pi h\right)\right] e_{ij}^{(n)}$$

上式与(9)比较，不难看出$e_{ij}^{(n+1)}$和$e_{ij}^{(n)}$的系数分别就是矩阵A和B的特征值

$A^{-1}B$的特征值即为

$$\lambda_{pq} = \frac{1 + 2\left(\sin^2\frac{p}{2}\pi h + \sin^2\frac{q}{2}\pi h\right) - 2\left(\sin^4\frac{p\pi h}{2} + \sin^4\frac{q}{2}\pi h\right)}{1 + 2\left(\sin^2\frac{p}{2}\pi h + \sin^2\frac{q}{2}\pi h\right) + 4\sin^2\frac{p}{2}\pi h\sin^2\frac{9}{2}\pi h}$$

因为，$\sin^4\frac{p}{2}\pi h + \sin^4\frac{q}{2}\pi h \geqslant 2\sin^2\frac{p}{2}\pi h \cdot \sin\frac{q}{2}\pi h$

所以$|\lambda_{pq}| < 1$。

4　公式的推广

由(5)可知，公式(2)是由原双调和方程添加上附加项

$$24u_{ij}^{(k)} - 4(u_{i+1j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)})$$而得的

現在考虑附加项的一般形式：