HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材

高等数学辅导

GAO DENG SHU XUE FU DAO

高等数学课程组

华中理工大学出版社

高等数学辅导

高等数学课题组

华中理工大学出版社

高等数学辅导
高等数学课题组
责任编辑　龙纯曼
*
华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　　印张：10.375字数：257 000
1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷
印数：1—10 000
ISBN　7-5609-0658-3/O·91
定价：4.20元
（鄂）新登字第10号

内 容 提 要

本书是为配合工科一年级大学生学习高等数学课程而编写的辅导教材，内容安排紧密配合教学进程。本书汇集了作者——课题组全体老师丰富的教学经验，每一节中不仅指出了教学的基本要求、重点和难点，而且指出了学生学习本节应注意的问题和容易出现的错误，对典型问题的解法和证法还给予了思路上的分析和小结，取材和辅导均具有很强的典型性和针对性。每节之后都选配了相当数量的练习题，并做了参考解答。

本书可供各类工科大学本科生、专科生学习中使用，也可供报考研究生的读者和教师参考。

前　言

为了使工科院校一年级学生更好地学习高等数学课程，深入理解本课程的基本概念和基本理论，加强基本运算能力的培养，特别是针对学生在学习中的疑难问题予以深入具体的指导，以培养学生灵活运用所学知识、综合分析问题和解决问题的能力，我们特编写了这本《高等数学辅导》。

本书以国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》为依据，列出了高等数学课程各主要部分的基本要求、重点和难点，使读者明确基本要求，主动地进行学习。各部分都精选了相当数量的典型例题，通过分析求解、一题多解和提示注记等方式，帮助读者总结解题经验，举一反三，提高解题能力。在概念、理论较强的部分，一般都配备了一定数量的是非题和思考题，它们是在教学实践中提炼出来的，具有较强的针对性，对帮助读者正确理解有关概念、澄清模糊认识颇有裨益。本书的编写方式与当前为报考硕士研究生而编的各种高等数学复习读物不同，它是紧密结合教学进程的；在综合性问题求解能力的训练上，是根据学生已有知识的积累，采用“滚雪球”的方式进行的。体现了循序渐进、综合性逐渐加大、加难的特点，因而特别便于初学者阅读。

本书每节后面都选配了相当数量的练习题，其中有些是综合性较强的。读者在研读了典型例题后再作练习和消化练习，将会大大加深对课程内容的理解，提高运算和分析、论证的能力。要特别指出的是，希望读者正确使用练习题的参考解答，应把它视作习作遇到困难时的指导，而不应该纯粹看成一种读物。即使是

阅读，也必须动手边读边算，以求彻底理解，熟练掌握。本书可供各类大学本科生、专科生、报考研究生的读者和教师参考。

本书由下列同志编写（按姓氏笔划）：王汉蓉、刘国钧、李秀琴、李静瑶、陈久明、陈爱兰、周怀治、罗媛芳、曹诗珍、樊孝述、魏宏、魏尧生。由樊孝述、魏尧生、周怀治、李静瑶修改，最后由樊孝述、周怀治定稿。限于水平，错误难免，恳请读者惠予指正。

1991年10月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函　　数

一、目的要求

1．深入理解函数概念；

2．理解函数的单调性、有界性、周期性和奇偶性，对一些较简单的函数会判断上述性质；

3．理解反函数和复合函数概念，会将复合函数分解为基本初等函数；

4．熟练掌握基本初等函数的性质及图形；

5．会列出简单实际问题中的函数关系（含分段函数）．

二、例题分析

例1　已知$f(x)=x-3$，$\varphi(x)=4-x$，求使

$$|f(x)+\varphi(x)|<|f(x)|+|\varphi(x)|$$

的x值．

解　只要注意不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

中的$<$号当且仅当$ab<0$时才成立，从而可知本题的解应等价于

$$(x-3)(4-x)<0$$

的解，即$x<3$或$x>4$．

例2　求函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{-\sin^2\pi x}}{x-|x|}+\arccos e^x-5^x$的定义域．

解　这里$f(x)$纯粹由解析式给出，定义域是使这个解析式

有意义的自变量的全体．因此

$$\begin{cases} x-|x|\neq 0, \\ -\sin^2\pi x\geqslant 0, \\ |e^x|\leqslant 1, \\ x\text{ 可取任何实数}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<0, & (1) \\ x=\pm n\ (n=0,1,2,\cdots), & (2) \\ x\leqslant 0, & (3) \\ x\text{ 为任何实数}. & (4) \end{cases}$$

取(1)—(4)式的公共部分：$x=-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$，它即为所求的定义域．

注：求函数定义域的一般方法是：(1) 若函数由实际问题给出，则其定义域由实际问题本身的性质而确定．(2) 若函数由纯数学式子给出，则定义域是使数学式子有意义的全体实数．

例3 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$\underbrace{f[f[\cdots f(x)]]}_{n\text{次}}$.

解 $\because$ $f[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f[f[f(x)]]=\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\ \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由数学归纳法可得

$$f[f[\cdots f(x)]]=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例4 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}0\ , & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$

求$f[f(x)]$及$f[g(x)]$。

解 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$

$=f(x)$,

$f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0\\ g(x), & g(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 0, & x>0\end{cases}$

$=0$。

（因为对于一切x，$g(x)\leqslant 0$）

注：求分段函数的复合函数，要注意不同范围内自变量、中间变量与函数之间的依从关系。

例5 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求$f(\lg x)(x>0)$。

解 这类问题的一般解法是令$u=\frac{1}{x}$，解出$x=\frac{1}{u}$，代入函数的原表达式得

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}=\frac{1}{u}+\frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}.$$

记u为x，得

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|},$$

因而

$$f(\lg x)=\frac{1}{\lg x}+\frac{\sqrt{1+(\lg x)^2}}{|\lg x|}.$$

例6 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$ 求$\varphi(x)$。

解 $\because f(x)=e^{x^2}$，故 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$.

又题设 $f[\varphi(x)]=1-x$，故$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,

即 $[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$。

又$\varphi(x)\geqslant 0$,

$\therefore \quad \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

例7 若$f(x)$具有性质$f(x+y)=f(x)+f(y)$，试证：(1) $f(0)=0$，(2)$kf(x)=f(kx)$，k为任意正整数。

证 注意到题设条件$f(x+y)=f(x)+f(y)$对任意实数x、y都成立，根据直接观察知

(1) 在$f(x+y)=f(x)+f(y)$中取$x=y=0$，则有

$f(0)=2f(0)$，即$f(0)=0$。

(2) 在$f(x+y)$中取$x=y$，则有

$$2f(x)=f(2x).$$

用归纳法，设对正整数n有

$$nf(x)=f(nx),$$

于是由

$$\begin{aligned}f(x+nx)&=f(x)+f(nx)\\&=f(x)+nf(x)=(n+1)f(x),\end{aligned}$$

即得证

$$(n+1)f(x)=f[(n+1)x],$$

因而对任意正整数k，有

$$kf(x)=f(kx).$$

例8 将 $y=e^{\sin^2(\lg\sqrt{3x^2})}$分解为基本初等函数。

解 将复合函数分解为基本初等函数，要根据函数的表达式从外向内逐层分清复合的运算结构，本例应分解为

$$y=e^u,\ u=v^2,\ v=\sin w,$$

$$w=\lg s,\ s=\sqrt{t},\ t=3x^2.$$

例9 设$f(x)$，$g(x)$在区间(a,b)上单调递增，试证明$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也在区间$(a,b)$上单调递增。

解 任取x_1，$x_2\in(a,b)$，且设$x_1<x_2$。因$f(x)$，$g(x)$在(a,b)上单调增，所以$f(x_2)\geqslant f(x_1)$，$g(x_2)\geqslant g(x_1)$，而

$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),\ g(x_2)\}\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1),$$

同理，$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),\ g(x_2)\}\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1)$，

$$\therefore\quad \varphi(x_2)\geqslant\max\{f(x_1),\ g(x_1)\}=\varphi(x_1).$$

故证得$\varphi(x)$在$(a,\ b)$上单调增加。

同理可证$\psi(x)$在$(a,\ b)$上单调增加（读者可作为练习）。

三、练习题

1．下列$f(x)$和$\varphi(x)$是否表示同一函数？试说明理由．指出在哪个区间上它们是相同的．

(1) $f(x)=x$，　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=x$，　$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$；

(4) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，　$\varphi(x)=1$；

(5) $f(x)=x$，$x\in[0,1]$，$\varphi(x)=1-x$，$x\in[0,1]$．

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}+\lg(\lg(6-x))$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(3) 已知$f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，求$f(x^2)$、$f(x+a)(a>0)$及$f(\lg x)$的定义域．

3．设$\psi(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$，试求$\psi(x)+\psi(-x)$，并证明

$$\psi(2x)-\psi(-2x)=[\psi(x)]^2-[\psi(-x)]^2.$$

4．试证$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$在定义域内有界．

5．试证 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在$[1,\ +\infty)$上有界.

6．下列函数能否复合为$y=f[g(x)]$？若能，写出复合函数的表示式和定义域.

(1) $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=x-x^2$，$x\in(0,1)$；

(2) $y=f(u)=\lg u, u=g(x)=\sin x-2$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=f(u)=u^2+u^3$，$u=g(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}, \\ -1, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$

7．设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求$f[f(x)]$.

8．设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0,\end{cases}$

求(1) $\psi[\psi(x)]$，(2) $\psi[\varphi(x)]$.

9．设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$，$f(\sin x)$.

10．设$f(x+1)=\sin x+x^2$，求$f(x-1)$，$f(2x)$.

11．设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试以$f(x)$表示$f(3x)$.

12．设 $y=f(u)=\sqrt{1+u^2}$，$u=g(v)=\sin v$，$v=\varphi(x)=\lg x$，$x>0$，问能否复合成$y=f[g[\varphi(x)]]$？若能，则复合并求其定义域和值域.

13．设$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，其中$g(x)$，$h(x)$为递增函数，且$f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$h[h(x)]$，$g[f(x)]$，$h[g(x)]$均存在，试证$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

四、参考解答

1．(1) 两者定义域相同，皆为$(-\infty,\ +\infty)$，但对应规则不同，值域不同. 在$[0,\ +\infty)$上是同一函数.

(2) 两者定义域不同，对应规则不同. 在$(0,\ +\infty)$内是同一函数.

(3) 两者定义域不同，对应规则不同，值域不同. 在$[0, +\infty)$上是同一函数.

(4) 两者定义域不同，值域相同，不是同一函数. 当$x\neq 0$时，$f(x)=\varphi(x)$.

(5) 定义域相同，值域也相同，但对应规则不同，不是同一函数.

2. (1) $\begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1,\\ 6-x>1,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4,\\ x<6,\end{cases}$

取公共部分得定义域为$1\leqslant x\leqslant 4$.

(2) 定义域为$(-\infty, 0)$, $(0, 2]$.

(3) 要让$f(x^2)$有意义，必须使$0\leqslant x^2\leqslant 1$，即$|x|\leqslant 1$.

要使$f(x+a)$有意义，必须使$0\leqslant x+a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

要使$f(\lg x)$有意义，必须使$0\leqslant \lg x\leqslant 1$，得$1\leqslant x\leqslant 10$.

一般，若已知$f(x)$的定义域为$[a, b]$，求$f[\varphi(x)]$的定义域，由解不等式$a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$得$x$的范围，此范围即为所求.

3. $\psi(x)+\psi(-x)=e^x+e^{-x}$.

$$\because\quad \psi(2x)-\psi(-2x)=\frac{(a-b)(e^{2x}-e^{-2x})}{a+b},$$

$$\begin{aligned}[\psi(x)]^2-[\psi(-x)]^2&=[\psi(x)+\psi(-x)][\psi(x)-\psi(-x)]\\&=\frac{(a-b)(e^{2x}-e^{-2x})}{a+b},\end{aligned}$$

$\therefore$ 得证.

4. 证：定义域为$(-\infty, +\infty)$. 因对$\forall x\in(-\infty, +\infty)$，$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\left|\dfrac{x}{2|x|}\right|=\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)$在定义域内有界.

5. 证：因对$\forall x\in[1, +\infty)$，$\dfrac{\lg x}{x}\geqslant 0$；另方面，对$\forall x\in$

$[1,\ +\infty)$，又有 $x=\lg 10^x>\lg x\Rightarrow\dfrac{\lg x}{x}<1$。所以对 $\forall x\in[1,\ +\infty)$，有$0\leqslant\dfrac{\lg x}{x}<1$，所以$\dfrac{\lg x}{x}$在$[1,\ +\infty)$有界。

6．(1) 由 $u\geqslant0$，要求 $x-x^2\geqslant0$，即 $0\leqslant x\leqslant1$。由此知当 $x\in(0,\ 1)$时，有 $u=g(x)=x-x^2>0$，$y=\sqrt{x-x^2}$ 有意义，故能复合。定义域为$(0,\ 1)$。

(2) 因 $u=g(x)=\sin x-2<0$，所以$\lg u$无意义，故不能复合。

(3) 因$y=f(u)=u^2+u^3$对任何实数有意义，故能复合，且
$f[g(x)]=\begin{cases}2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。

7．$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0\\ 1, & f(x)\geqslant0\end{cases}=\begin{cases}1+[1+x], & 1+x<0\\ 1, & 1+x\geqslant0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant-1.\end{cases}$$

8．(1) 当$x\leqslant0$时，$\psi(x)=0$，而 $\psi[\psi(x)]=\psi(0)=0$；当$x>0$时，$\psi(x)=-x^2<0$，而$\psi[\psi(x)]=0$；故$\psi[\psi(x)]\equiv0$。

(2) 当$x\leqslant0$时，$\varphi(x)=0$，而 $\psi[\varphi(x)]=\psi(0)=0$；当 $x>0$时，$\varphi(x)=x>0$，而 $\psi[\varphi(x)]=\psi(x)=-x^2$；故 $\psi[\varphi(x)]=\psi(x)$。

9．用拼凑法，$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$。记$u=1+\dfrac{1}{x}$，于是有$f(u)=u^2-2$，换变量记号得$f(x)=x^2-2$。

10．先求$f(x)$，为此令$u=x+1$，得$x=u-1$，代入原式，得 $f(u)=\sin(u-1)+(u-1)^2$，换记号得 $f(x)=\sin(x-1)+(x-1)^2$，$f(x-1)=\sin(x-2)+(x-2)^2$，$f(2x)=\sin(2x-1)+(2x-1)^2$。

11．方法一：拼凑法．

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3x}{2x+(x-1)}=\frac{3\frac{x}{x-1}}{2\frac{x}{x-1}+1}$$

$$=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

方法二：反函数法．由 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ 解出 $x=\frac{y}{y-1}$，于是有

$$f(3x)=f\left(3\frac{y}{y-1}\right)$$

$$=\frac{3\frac{y}{y-1}}{3\frac{y}{y-1}-1}=\frac{3y}{2y+1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

12．因u为任何实数时，y有意义，v为任何实数时，u都有意义．故$x>0$时，能使y有意义，故能复合．且 $y=f\{g[\varphi(x)]\}=\sqrt{1+\sin^2(\lg x)}$．定义域为$x>0$．因$y$的最小值为1，最大值为$\sqrt{2}$，且为连续函数，故值域为$[1,\sqrt{2}]$．

13．$\because f(x)\leqslant g(x)$，$\therefore f[f(x)]\leqslant g[f(x)]$；　(1)

$\because g(x)$递增，$\therefore g[f(x)]\leqslant g[g(x)]$．　(2)

由（1）、（2）式知，$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$．　(3)

又因$h(x)$递增，$\therefore h[g(x)]\leqslant h[h(x)]$　(4)

$\because g(x)\leqslant h(x)$，$\therefore g[g(x)]\leqslant h[g(x)]$　(5)

由（4）、（5）式知，$g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$，　(6)

由（3）、（6）式知，$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$．

§1.2　极限的基本概念

一、目的要求

1．理解用“ε-N”，“ε-δ”语言描述的极限定义；