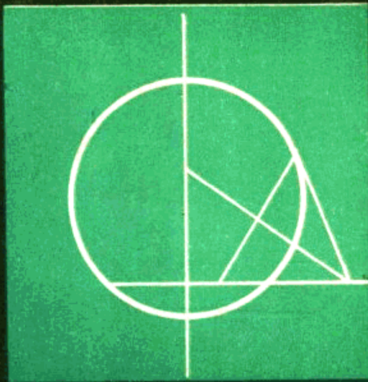
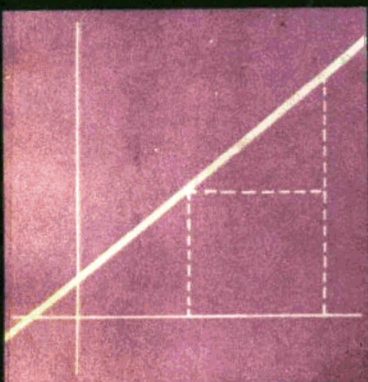
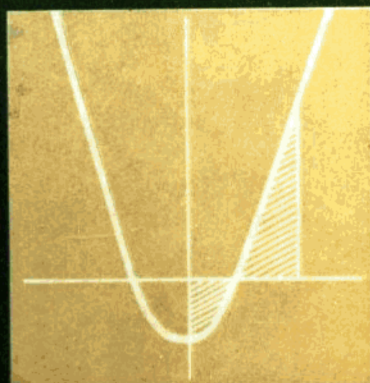
中学数学
教学丛书







代数解题指导与题解

李 祥 伦

代数解题指导与题解

下　册

李　祥　伦

安徽人民出版社

代数解题指导与题解

下　册

李　祥　伦

*

安徽人民出版社出版

（合肥市跃进路 1 号）

安徽省新华书店发行

合肥新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张13　字数286,000

1980年12月第1版　1980年12月第1次印刷

印数1—14,000

统一书号：13102·49　定价：1.02元

前　　言

这本《代数解题指导与题解》力图在解题方法上多作一些提示和说明，以引导初学者学会如何应用代数的基本知识，解决有关问题。

本书是根据传统教材，参照全日制十年制学校《中学数学教学大纲》编写的。全书共十章，分上、下册。前五章为上册，内容包括：实数及其运算，代数式，代数方程，不等式，函数及其图象；后五章为下册，内容包括：指数和对数，数列和极限，排列、组合、数学归纳法和二项式定理，复数，综合题。每一章（或节）分为主要内容、解题要领和注意事项、例题、习题和题解四部分。书中对例题和习题的选择力求典型、多样，所选例题一般都作了解题分析，使读者明确解题思路，更好地起到举一反三的作用。至于新教材中增加的内容，如集合、概率统计、线性方程组等，本书未予编入。

本书在编写过程中，承蒙合肥工业大学卢树铭老师给予审阅。还有陈永庆同志帮助看了初稿，提了不少宝贵意见。本书插图是省教材编审室薛凌同志绘制的，在此一并表示谢意。

本书可作为中学生课外读物和知识青年自学用书，也可供中学数学教师备课时参考。由于编者水平有限，书中的缺点、错误一定不少，敬请读者批评指正。

李　祥　伦

1980年2月

本书着重介绍解题要领和典型例题分析，所收习题经过精选，并全部作出详解。题目类型多样，具有代表性。全书共十章，分上下册出版。这是下册，内容包括：指数和对数，数列和极限，排列、组合、数学归纳法和二项式定理，复数，综合题。本书可作为中学生课外读物和知识青年自学用书，也可供中学数学教师备课时参考。

目　录

第六章　指数和对数

第一节　指数和对数

主　要　内　容

一、指数

1.无理数指数幂

在幂 a^{α} 里，如果α是无理数，那末幂 a^{α} 介于以 α 的任意精确度的不足近似值和过剩近似值为指数的两个有理指数幂之间。如，$a^{\sqrt{2}}$ 介于 $a^{1.414}$ 和 $a^{1.415}$ 之间。因此，无理数指数幂是有确定意义的。

一般地，设 α 为无理数，对无理数指数幂 $a^{\alpha}(a>0)$，我们规定：

(1) 若 $\alpha>0$， 则 a^{α} 是介于以 α 的任何精确度的不足近似值和过剩近似值做指数的幂之间的一个实数；

(2) 若 $\alpha<0$，我们规定：$a^{\alpha}=\dfrac{1}{a^{-\alpha}}$；

(3) 1 和 0的正无理数 α 次幂分别为 1 和0，负数的无理数指数的幂没有意义。

2.指数概念的扩展

引入无理数指数幂以后，我们可以把幂的指数从有理数扩展到实数，其扩展情况如下表所示。

- 实数指数
  - 有理数指数
    - 正整数指数：　$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}^{n个}$
    - 负整数指数：　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（n是正整数，$a\neq0$）
    - 零　指　数：　$a^0=1$（$a\neq0$）
    - 正分数指数：　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a\geqslant0$，$m$是正整数，$n$是大于1的整数）
    - 负分数指数：　$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0$，$m$是正整数，$n$是大于1的整数）
  - 无理数指数
    - 如果$a>0$，α是无理数，α_n和α_n'分别表示α的不足近似值和过剩近似值，那末a^α是介于a^{α_n}和$a^{\alpha_n'}$之间的一个数。

把幂的指数从有理数扩展到任何实数后，有理指数幂运算的三个基本法则$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$，($a>0$，$b>0$)对于一切实数指数的幂仍旧成立。

二、对数

1.对数的意义

如果1以外的正数a的b次幂等于N，那末幂指数b叫做以a为底N的对数，记做$\log_a N=b$，其中a是对数的底，N叫做真数。

显然，由对数的定义就得到对数恒等式：

$$N=a^{\log_a N}$$

以10为底的对数叫做常用对数。$\log_{10}N$通常记作$\lg N$。

以无理数 e（$e=2.71828\cdots\cdots$）为 底 的 对 数叫做自然对数。$\log_e N$ 通常记作 $\ln N$。

2.对数的性质

（1）零和负数都没有对数；

（2）底的对数等于 1，即 $\log_a a=1$；（$a>0$，$a\neq 1$）

（3）1 的对数等于零，即 $\log_a 1=0$。（$a>0$，$a\neq 1$）

3.对数的运算

（1）积、商、幂、方根的对数

如果 N、N_1、N_2 都是正数，$a>0$，$a\neq 1$，那末

$$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2;$$

$$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2;$$

$$\log_a N^n=n\log_a N;$$

$$\log_a\sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N。$$（n 是大于1的整数）

（2）对数换底公式

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

由对数换底公式可推得几个有用的结论：

（i）$\log_a b\cdot\log_b a=1$ 或 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$；

（$a>0$，$b>0$，且 $a\neq 1$，$b\neq 1$）

$\log_a\frac{1}{a}\cdot\log_{\frac{1}{a}}a=1$；（$a>0$，且 $a\neq 1$）

（ii）$\log_{a^n}N=\frac{1}{n}\log_a N$；（$a>0$，且 $a\neq 1$，$N>0$）

（iii）$\log_a b=\log_{a^n}b^n=\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[n]{b}$。

（$a>0$，$b>0$，$a\neq 1$，n 为正整数）

(3) 自然对数与常用对数的关系

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}\approx 2.303\lg N。$$

三、常用对数的性质

常用对数除了具有对数的一般性质外，还具有下面一些特殊的性质：

(1) 10的整数次幂的常用对数是一个整数，它等于幂指数；

(2) 1～10之间的数的常用对数都是正的纯小数；

(3) 任何一个正数，如果不是10的整数次幂，那末它的常用对数都是无理数。一般地说，任何一个正数的常用对数都可以用一个整数(正整数，零，负整数)和一个正的纯小数(或者零)的和来表示。整数部分叫做这个对数的**首数**，正的纯小数(或者零)叫做对数的**尾数**；

(4) 真数大于1或者等于1时，它的常用对数首数是一个非负的整数，它等于真数的整数部分的位数减去1；

(5) 真数小于1时，它的常用对数首数是一个负整数，它的绝对值等于真数左边第一个非零数字前面零的个数（包括小数点前面的一个零)。

解题要领和注意事项

一、计算无理指数幂 a^{α} $(a>0)$，同计算无理数可以用有理数近似值来代替一样，可用有理数指数 $a^{\alpha'}$ (α' 为 α 有限位小数的近似值)来代替它，从而归结为分数指数的情况。

二、一般实数指数幂的运算，可直接应用同底数幂相乘(除)、幂和积的乘方三个基本法则进行计算。在指数式恒等

变形时，尽可能化为同底幂形式，应用三个基本法则，便于将指数化简。遇到两式相除时，除了化为同底幂以外，还要考虑到尽可能进行因式分解，便于约去一些因式。一般说，根式的乘、除、乘方和开方运算转化为指数运算较为简便，但要注意，偶次根式运算中被开方数不能是负数的限制。这一点不能忽视，否则就可能发生错误，如：$(-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3$ 结果是负数，而 $(-27)^{\frac{1}{3}}=(-27)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-27)^2}=3$ 就得到错误的结果。又如：$(-3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-3}$ 在实数集合内没有意义，而 $(-3)^{\frac{1}{2}}=(-3)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}$ 就得到错误的结果。

对于运算的最后结果，习惯上常常把分数指数幂写成最简根式，负指数幂写为分式。但也要防止发生如下的错误：

$$(a+b)^{-1}=a^{-1}+b^{-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$(a+b)^{-2}=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2},$$

$$(a^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{3}})^{-3}=a+b。$$

三、在对数计算中，大多数可直接运用对数恒等式、对数性质、对数法则和对数换底公式来进行计算。在运用对数法则时，正反两方面都要会用。如 $\log_3 10=\log_3 2+\log_3 5$，反过来 $\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10$。

同时，在进行对数运算过程中要防止发生如下错误：

$$\log_a mn=\log_a m\cdot\log_a n;$$

$$\log_a\frac{m}{n}=\frac{\log_a m}{\log_a n};\ \log_a m^n=(\log_a m)^n;$$

$$\log_a\sqrt[n]{m}=\sqrt[n]{\log_a m}\ 等。$$

四、指数式 $N=a^b$ 侧重研究由指数 b 求 N 的值，对数式 $b=\log_a N$ 侧重研究由真数 N 求对数 b。但两式所反应的三个量 a、b、N 之间的相互关系是一致的，仅仅表示形式不同。因此，在解决很多问题时常将两式互换。如，当底为 2 时的对数是 4，求 N。按题意应为 $4=\log_2 N$，但可换写成指数式 $N=2^4$，即得 $N=16$。

五、证明对数恒等式时，一般先用分析法，把所要证明的对数恒等式利用对数性质逐步逆推，最后消去对数符号，转化为对一个代数恒等式的证明。如，已知：

$$a>b>0,\ a^2+b^2=6ab,$$

求证：$\lg\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$。

我们可以这样来分析：如果结果成立，那末有 $\frac{a-b}{2}=\sqrt{ab}$，由此式变形可知，若要这等式成立，应有 $a^2+b^2=6ab$ 成立，而这是一个给定的已知条件，所以原式成立。

六、已知 N，求 $\lg N$ 的步骤：

1. 定首数　当 $N>1$ 时，$\lg N$ 的首数等于 N 的整数部分位数减 1；当 $N<1$ 时，首数是负整数，这个负整数的绝对值等于 N 的第一个非零数字前零（包括小数点前的一个零）的个数；

2. 查尾数　以 N 查《常用对数表》，得到正的纯小数或零；

3. 写出对数　$\lg N=$ 首数 + 尾数。

七、已知 $\lg N$，求 N 的步骤：

1. 分清 $\lg N$ 的首数和尾数；

2. 以尾数查《反对数表》，得 N 的有效数字；

3. 以首数确定 N 中小数点的位置。

八、计算复利问题（如计算产量的平均增长率等实际问题）一般用复利公式 $A=a(1+x)^t$。

例如，存入银行现金(称为本金)为 a，年利率为 x，一年为一期，t 年后本金与利息之和（称为本利和）为 A，则 $A=a(1+x)^t$。

例　题

例1　计算：$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+(-4.3)^0-\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.1^{-2}$。

解　原式 $=\sqrt{\frac{9}{4}}+1-\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}}+\frac{1}{0.1^2}$

$$=\frac{3}{2}+1-\frac{4}{9}+100=102\frac{1}{18}。$$

例2　化简：

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^{-\frac{1}{2}}b^2}{ab^{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b\sqrt{a^{-2}}}{\sqrt{ab^2}}}\right)^{-2}。$$

解　原式 $=\left(\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}-1-1-\frac{1}{2}}b^{2+1-\frac{1}{2}-1}}\right)^{-2}$

$$=\left(\sqrt[3]{a^{-3}b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-2}=\frac{a^2}{b}。$$

例3　化简：

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}\div\left[\frac{\sqrt{b}-\frac{a}{(ab)^{-0.5}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right]+\frac{a}{b}\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}。$$

解 原式$=\frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{a}}\div\left[\frac{\sqrt{b}-a\sqrt{ab}}{1-a}-\sqrt{ab}\right]$

$$+\frac{a}{b}\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{a}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{b}-a\sqrt{ab}-\sqrt{ab}(1-a)}$$

$$+\frac{a}{b}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{b}(1-a)}{\sqrt{b}(1-a)}-\frac{2a}{3b}=1-\frac{2a}{3b}。$$

例4 化简：

$$(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$$

$$\div(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2。$$

解 原式$=(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y)\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$

$$\div(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2$$

$$=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}。$$

注：在只含有乘除混合运算中，应按次序计算，否则容易导致错误。如本题要是先乘后除就错了。

例5 不查表计算下列各题：

(1) $\lg 5\cdot\lg 8000+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2$；

(2) $\log_5\frac{\sqrt[3]{25}}{5}\log_2\left[4^{\frac{1}{2}\log_2 3}(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}-5^{\log_5 4}\right]$；

(3) $\log_{\sqrt{2}-1}(3+2\sqrt{2})$；

(4) $(0.027)^{-\frac{1}{3}}-[\sqrt{(\log_2 4-5)^2}]^{-1}+4^{1.5}$

$$+\log_5\frac{\sqrt[3]{25}}{5}-\log_2 3\cdot\log_3 8$$

$$+\log_2\left(\sin\frac{17\pi}{6}\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}\right)^0。$$

解 (1) 原式$=(1-\lg 2)(\lg 8+\lg 1000)+(\sqrt{3}\lg 2)^2$

$$=(1-\lg 2)(3\lg 2+3)+3(\lg 2)^2$$

$$=3(1-\lg 2)(1+\lg 2)+3(\lg 2)^2$$

$$=3[1-(\lg 2)^2]+3(\lg 2)^2=3。$$

(2) 原式$=\log_5 5^{\frac{2}{3}-1}\cdot\log_2[2^{\log_2 3}(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}-4]$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\log_2[3\cdot 4-4]$$

$$=-\frac{1}{3}\log_2 8=-1。$$

(3) 原式$=\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+1)^2$

$$=2\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+1)$$

$$=2\log_{\sqrt{2}-1}\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=2\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}-1)^{-1}=-2。$$

(4) 原式$=0.3^{-1}-(5-\log_2 4)^{-1}+4^{\frac{3}{2}}+\log_5 5^{\frac{2}{3}-1}$

$$-\log_2 3\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 3}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+0$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}+8-\frac{1}{3}-3-1=6\frac{2}{3}。$$

例6 已知$\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求$\log_{36}45$。

分析 这题可直接由指数和对数的定义来求；也可换成

以18为底的对数，由已知条件代入求得；还可以换成常用对数，通过解方程组，求出 lg 2，2 lg 3代入即得。

解一 $\because\ \log_{18}9=a$， $\therefore\ 18^a=9$，

又 $18^b=5$，

$\therefore\ 45=9\times5=18^a\cdot18^b=18^{a+b}$；

设 $\log_{36}45=x$，则 $36^x=45=18^{a+b}$，

$\therefore\ \log_{18}36^x=\log_{18}18^{a+b}$，

$$\therefore\ x=\frac{a+b}{\log_{18}36}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2},$$

又 $\because\ \log_{18}9=\log_{18}\dfrac{18}{2}=a$， $\therefore\ \log_{18}2=1-a$，

$$\therefore\ x=\frac{a+b}{1+1-a}=\frac{a+b}{2-a},$$

即 $\log_{36}45=\dfrac{a+b}{2-a}$。

解二 $\because\ \log_{18}9=a$，$\log_{18}5=b$，

$$\therefore\ \log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{1+\log_{18}2}$$

$=\dfrac{a+b}{1+\log_{18}2}$（以下解法同解法一）。

解三 $\because\ \log_{18}9=a$，$\log_{18}5=b$，

$$\begin{cases}\dfrac{2\lg3}{\lg2+2\lg3}=a & ①\\[2ex]\dfrac{1-\lg2}{\lg2+2\lg3}=b & ②\end{cases}$$

又 $\log_{36}45=\dfrac{\lg5+2\lg3}{2\lg2+2\lg3}=\dfrac{1-\lg2+2\lg3}{2\lg2+2\lg3}$，

①＋②，得

$$a+b=\frac{1-\lg 2+2\lg 3}{\lg 2+2\lg 3},$$

即　$1-\lg 2+2\lg 3=(a+b)(\lg 2+2\lg 3)$，

$$\therefore\quad \log_{36}45=\frac{(a+b)(\lg 2+2\lg 3)}{2\lg 2+2\lg 3}=\frac{a+b}{\dfrac{2\lg 2+2\lg 3}{\lg 2+2\lg 3}}$$

$$=\frac{a+b}{1+\dfrac{\lg 2}{\lg 2+2\lg 3}}\qquad ③$$

由①、②解得：

$$\lg 2=\frac{a-1}{a-b-1},\ 2\lg 3=\frac{-a}{a-b-1},$$

代入③，得

$$\log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}。$$

注：这三种解法中以解法二为最简。

例6　设 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2=7ab$，求证：

$$\lg\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)。$$

分析　假设 $\lg\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，

$\therefore$　$\lg\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]^2=\lg(ab)$，

$\because$　$a>0$，$b>0$，$ab>0$，

$\therefore$　$\left[\frac{1}{3}\cdot(a+b)\right]^2=ab$，即　$\frac{1}{9}(a+b)^2=ab$，

$\therefore$　$(a+b)^2=9ab$，即　$a^2+b^2=7ab$。

证　$\because$　$a^2+b^2=7ab$，