高等院校公修数学课辅导丛书

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXIZHIDAO

微积分学习指导编写组

上

郑州大学出版社

高等院校公修数学课辅导丛书

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXIZHIDAO

上

微积分学习指导编写组

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/《微积分学习指导》编写组编．—郑州：郑州大学出版社，2003.9

ISBN 7－81048－828－7

Ⅰ．微…　Ⅱ．《微积分学习指导》编写组编　Ⅲ．微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 080703 号

郑州大学出版社出版发行

（郑州市大学路 40 号　　邮政编码：450052）

出版人：谷振清　　发行部电话：0371－6966070

全国新华书店经销

郑州文华印刷厂印制

开本：850 mm×1 168 mm　　1/32

印张：11

字数：274 千字

版次：2003 年 9 月第 1 版　　印次：2003 年 9 月第 1 次印刷

书号：ISBN 7－81048－828－7/G·74　　定价：14.80 元

本书作者名单

（以姓氏笔画为序）

王玉林　刘华民
杨松华　宋士仓
黄玉琴　薄仙慧

内 容 提 要

本书是微积分学习用书，分上、下两册。上册内容包括极限理论、一元函数微积分学、常微分方程、级数和向量(值)函数，每章开始是知识点的总结，然后是常见题型与解题方法，配有大量例题及精选的习题，习题后有解题提示和答案。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生微积分课程的辅助教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生考前强化训练的指导书。

序　言

1995 年至 2000 年郑州大学数学系公修数学教学组承担了原国家教委面向 21 世纪教学改革立项项目“面向 21 世纪非数学类专业高等数学教学内容和课程体系的改革研究”子项目的研究工作。项目总负责人萧树铁先生曾向教育部提交了其研究成果报告——“高等数学教学改革研究报告”，该报告已由高等教育出版社于 2000 年出版。在此报告中对数学教育在大学教育中的重要作用，国内外数学教育改革情况，今后改革的原则，改革的方案等问题做了精辟的论述。同时公修数学教学组也特别关注了由马知恩先生负责的原国家教委面向 21 世纪教学改革立项项目“面向 21 世纪工科高等数学教学内容和课程体系的改革研究”的研究成果，该成果的报告“工科数学系列课程教学改革研究报告”也已由高等教育出版社于 2001 年出版。公修数学教学组在学校、数学系领导的关怀和校内各院系支持下，由阎占立、王长群、罗俊明等人执笔分别写出了《微积分(上、下)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三本新教材。这些教材经全体授课教师的反复实践和讨论，业已定稿出版，已在我校试用多年。这三本教材完全符合上述两个教学改革项目研究成果的精神并具有自己的特色，这是我校公修数学课教学改革的一项代表性成果。

由于新教材贯彻了一些新想法，加强了理论性，有大量新的习题，给教与学都带来了新的问题。另外，硕士研究生入学考试要求高于教学要求，要想通过这一考试，必须在课堂教学的基础上拓宽知识面和进行强化训练。为了解决这两个问题，教学组又编写了

与新教材配套的学习参考书。书中对基础知识进行了串讲总结，通过精选的例题阐明了常见的解题方法和技巧。对课本习题中难度大的题目给出了详细解答。这些参考书对同学们学习数学课程以及应对研究生入学考试会有很好的作用。

李梦如

2003 年 8 月

前　言

《微积分》是高等学校理工科各专业的一门重要的基础理论课。由于近年来教学改革的实施,《微积分》授课时间有所减少,这使得课堂讲授内容受到了一定的影响,在概念的深入探讨,知识点的融会贯通,处理问题的思想、方法和技巧等方面都难以充分讲授;另一方面,后续课程以及研究生入学考试对微积分的要求却有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾,如何帮助学生全面系统地学习、掌握微积分的基本概念、基本理论、基本方法与技巧,以及如何与研究生入学考试复习紧密衔接等,是我们教学第一线老师亟待解决的问题。为此,我们根据教学大纲和研究生入学考试大纲的要求组织编写了这本《微积分学习指导(上、下)》。

这本书的编写者都在高校任教多年,有着丰富的微积分教学经验,也是郑州大学数学系所承担的原国家教委面向21世纪教学改革立项项目"面向21世纪非数学类专业高等数学教学内容和课程体系的改革研究"子项目课题组的主要成员。本书内容既汇聚了编者的教学经验,也吸收了该课题研究成果。

本书每章设有内容提要、典型例题、同步练习及其答案与提示。选编的典型例题有的是澄清基本概念与基本运算的题,有的是教材中较难的习题,有的是历年的一些研究生入学考试题。希望通过该例题分析能帮助读者把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式的应用,总结归纳各类问题的解题规律、方法和技巧,培养学生用微积分的思想分析和解决实际问题的能力。读者做各章设置的同步练习可达到巩固、理解、提高的目的。在做同步

练习时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示或答案。带 * 的例题或习题是较难的题目，初读时可以略过。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生微积分课程的辅助教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生考前强化训练的指导书。

上册共九章：第一、四章由黄玉琴编写；第二、三章由薄仙慧编写；第五章由杨松华编写；第六章由王玉林编写；第七章由宋士仓编写；第八、九章由刘华民编写。

河南省惟一的首届全国优秀教学名师奖获得者、郑州大学公修数学教学组负责人李梦如教授对本书的编写给予了热情指导，本书还得到郑州大学教务处、数学系领导和许多同仁的大力支持与鼓励，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

编者

2003 年 8 月

目　录

第一章　微积分浅释

一、内容提要

（一）函数的极限

1. 函数极限的描述性定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 a 的一个邻域 $U(a)$ 内可能除了 a 点外有定义. 如果当 x 趋于 a 时，函数值 $f(x)$ 无限接近甚至等于某个常数 A，则称当 x 趋于 a 时函数 $y=f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to a)$$

注 1　极限研究的是一种变化趋势，它要求函数 $f(x)$ 在点 a 附近有定义，至于它在 a 点处是否有定义，对求极限无任何影响.

注 2　记号“$\lim\limits_{x\to a} f(x)$”是一个整体，称“$x\to a$”为极限过程.

2. 函数极限的四则运算法则

设　$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，则

（ⅰ）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（ⅱ）$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=AB$

（ⅲ）如果 $B\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

3. 函数在一点连续的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$a\in I$，如果

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 点连续，a 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

4. 无穷小量的定义

如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则称当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是无穷小量，简称无穷小.

注 1 无穷小量不是很小很小的数，是变量（函数）.

注 2 函数是否为无穷小量与极限过程有关.

注 3 零是可以作为无穷小的惟一常数.

5. 函数极限与无穷小的关系

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)-A$ 为无穷小，即

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

6. 无穷小量的阶的概念

设 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 为无穷小量，且 $\beta(x)\neq 0$.

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to a)$；

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$（$C$ 为常数），则称 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小；

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，或者称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))\ (x\to a)$.

（二）导数与微分

1. 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 a 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 a 点处有增量 Δx（点 $a+\Delta x$ 仍在这邻域内）时，函数 $y=f(x)$ 相应地

取得增量

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

存在,则称函数 $y=f(x)$ 在 a 点可导,极限值称为函数 $y=f(x)$ 在 a 点的导数或微商,记为

$$f'(a), y'\Big|_{x=a}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}$$

即

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

注 1 函数 $y=f(x)$ 在 a 点的导数还可以写成如下形式:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

注 2 函数 $y=f(x)$ 在 a 点的导数实质上是函数 $y=f(x)$ 在点 a 关于自变量的变化率,反映了函数 $y=f(x)$ 在 a 点随自变量变化的快慢程度.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 a 的导数表示函数曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线斜率,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线方程为 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$;法线方程为 $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$,其中 $f'(a)\neq 0$.

3. 导数的物理意义

对于不同的物理量,导数有着不同的意义. 例如,变速直线运动位移 $s=s(t)$ 的导数就是瞬时速度;设 $q(t)$ 是通过导体某截面的电量,$q(t)$ 对时间 t 的导数就是电流强度,即 $q'(t_0)=I(t_0)$.

4. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 a 的某个邻域内有定义,如果有

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(a+\Delta x)-f(a)\\ &= A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)\end{aligned}\qquad (*)$$

其中的 A 与 Δx 无关(可以与 a 有关),则称函数 $y=f(x)$ 在 a 点可微,$A\cdot\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 a 的微分,记为 $\mathrm{d}y\big|_{x=a}$ 或 $\mathrm{d}f(a)$. 即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=a}=A\Delta x \text{ 或 } \mathrm{d}f(a)=A\Delta x$$

注 $(*)$式等价于式子 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0$.

5. 函数在一点可微与可导的关系

若函数 $f(x)$ 在点 a 可导,那么 $f(x)$ 在点 a 必可微,且 $\mathrm{d}y\big|_{x=a}=f'(a)\Delta x$;反过来,若函数 $f(x)$ 在点 a 可微且 $\mathrm{d}y\big|_{x=a}=A\cdot\Delta x$,则 $f(x)$ 在点 a 必可导,且 $f'(a)=A$.

注 1 可微与可导是等价的,但微分与导数是两个不同的概念,它们之间的联系是紧密的,即 $\mathrm{d}y\big|_{x=a}=f'(a)\Delta x$.

注 2 函数 $y=f(x)$ 在点 a 相应于自变量增量 Δx 的微分,简称为函数 $y=f(x)$ 在点 a 的微分,它不仅与点 a 有关,还与 Δx 有关. 它的实质是在以 a 和 $a+\Delta x$ 为端点的微小区间上以函数 $f(x)$ 在点 a 处的变化率 $f'(a)$ 代替该小区间上任意点处的变化率(即变化率以均匀代非均匀)后所得到的函数的增量,严格地讲是 Δy 的主要组成部分(线性主部),可以近似代替 Δy,即 $\Delta y\approx \mathrm{d}y\big|_{x=a}$(因 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$),这也是微分的主要作用.

6. 微分的几何意义

$\mathrm{d}y=f'(a)\Delta x$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线上纵坐标的改变量,如图 1-1 所示.

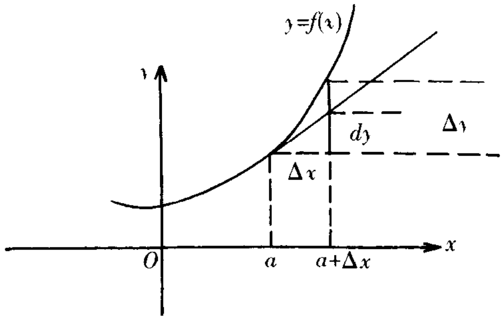

图 1-1

7. 可导(可微)与连续的关系

若函数 $y=f(x)$ 在点 a 可导(可微),则 $f(x)$ 在点 a 必连续;反过来,不一定成立.

8. 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点都可导,则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内可导. 这时对于任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值,这样就构成了一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的导函数,简称为导数,记为 y'、$f'(x)$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注 1 按定义,$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, $x\in I$.

在上式中,虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值,但在极限过程中,x 应看做常量,Δx 是变量.

注 2 函数 $y=f(x)$ 在某点的导数是一个数值,而函数 $y=f(x)$ 在某区间上的导数是一个函数. 函数 $y=f(x)$ 在点 a 的导数 $f'(a)$ 是函数 $y=f(x)$ 在包含点 a 的区间上的导(函)数在点 a 处的函数值,即

$$f'(a)=f'(x)\Big|_{x=a}$$

(三)导数与微分的运算法则

1. 四则运算法则

设函数$f(x)$,$g(x)$在x点可导,则

(i) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

$\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}[f(x)]\pm \mathrm{d}[g(x)]$

(ii) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}[f(x)]+f(x)\mathrm{d}[g(x)]$

(iii) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)\mathrm{d}[f(x)]-f(x)\mathrm{d}[g(x)]}{g^2(x)}$

2. 复合函数求导法则——链式法则

若内函数$u=u(x)$在点x可导,而外函数$y=f(u)$在相应点$u=u(x)$处可导,则复合函数$y=f[u(x)]$在点x可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$=f'(u)\cdot u'(x)$$

3. 复合函数微分法则——一阶微分形式的不变性

对于函数$y=f(u)$,无论u是自变量还是中间变量,$y=f(u)$的微分$\mathrm{d}y$总可以表示为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$$

注 微分的这一性质称为一阶微分形式的不变性. 值得注意的是,只是形式不变,而内容有区别. 若u是自变量,则$\mathrm{d}u=\Delta u$,若u是中间变量$u=u(x)$,一般$\mathrm{d}u\neq\Delta u$.

4. 隐函数的导数与微分法则

在方程$F(x,y)=0$两端同时求导或微分,再解出$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$