学真题1+1系列

2006～1997

考研真题数学一

详解·拓展·评析

主编 世华 潘正义

吃透真题 考研成功一半！

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

考研真题数学一

详解·拓展·评析

主　　编：世　华　潘正义
责任编辑：李根宾
封面设计：林娜娜

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089）
销　　售：各地新华书店
印　　刷：廊坊人民印刷厂印刷

开　　本：787 × 1092 毫米　1/16
印　　张：7.75
字　　数：210 千字
版　　次：2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-7338-1/H · 761　　定价:8.80 元

关于数学真题的公告

一、我们为什么需要真题

真题是你复习备考的总方向，未来考题只在难易程度上围绕过去的真题小幅波动，你的一切努力就是为了征服它。

真题是一面镜子，能够反映你在不同的复习阶段与它有多大的距离。

真题是一扇窗口，你能看到你想看的风景。

真题是一堆宝藏，做得多、练得熟了，你自己都能总结出命题规律。

真题是一台测速仪，做题的速度也许会直接决定你的成绩。

二、关于《真题集》

《真题集》是公共资源，没有知产附加价值，因此，我们无偿为你提供服务，提供完全真实的训练平台，你付出的只是生产成本。

三、关于真题解析

本部分严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，汇集最近十年数学全部考研试题的详细解析。通过『**命题目的**』、『**思路点拨**』、『**详细解答**』、『**易错辨析**』、『**延伸拓展**』几个步骤对历年真题进行全方位的剖析，以达到通过真题学习数学，进而举一反三、触类旁通，掌握数学的目的。通过每套试卷的考点分布表统计历年真题的考点分布，让读者很直观地把握考试重点，了解命题特点。通过试卷评析，点评每套试卷的难点与重点，帮助读者把握命题规律，做到有的放矢。

编　者

目录

2006年全国硕士研究生入学统一考试（数学一）

详解·拓展·评析

一、填空题

（1）**【标准答案】** 2.

【命题目的】 本题考查$\frac{0}{0}$型未定式的极限.

【详细解答】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2.$

【易错辨析】 对于表达式中的相乘或相除的项可用等价无穷小代换；对于表达式中的相加或相减的项不能用等价无穷小代换.

【延伸拓展】 常用等价无穷小代换：$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,e^x-1\sim x,(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n},(x\to 0)$.

（2）**【标准答案】** $c\frac{x}{e^x}$.

【命题目的】 本题考查了一阶微分方程求解.

【详细解答】 $\frac{dy}{y}=(\frac{1}{x}-1)dx,\ln\frac{y}{c}=\ln x-x,y=ce^{\ln x-x}=c\frac{x}{e^x}$.

【易错辨析】 熟记微分方程每一种类型对应一种解法. 本题是可分离变量方程，因此将变量x,y分开后才能求得方程的解.

【延伸拓展】 本题也可采用公式法求解.

（3）**【标准答案】** 2π.

【命题目的】 本题考查了曲面积分计算.

【详细解答】 设$\sum^*$为锥面$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$的上侧. 在$\sum^*$上，$z=1,dz=0$.

所以 $\iint\limits_{\Sigma^*}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$

因奥—高定理：

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy-\iint\limits_{\Sigma^*}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=6\iiint\limits_{\Omega}dv=6\cdot\frac{1}{3}\pi 1^2\cdot 1=2\pi.$$

(圆锥体积 $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

【易错辨析】 使用奥—高公式应注意:①P,QR在相应区域中连续;②必须计算封闭曲面上的第二类曲面积分;③必须取封闭曲面的外侧.

【延伸拓展】 熟练掌握奥—高公式的应用及其条件.

---

(4)**【标准答案】** $\sqrt{2}$.

【命题目的】 本题考查了点到平面的距离.

【详细解答】 $d=\left.\frac{3x+4y+5z}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}\right|_{(2,1,0)}=\frac{3\cdot 2+4\cdot 1+5\cdot 0}{\sqrt{50}}=\frac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$.

【易错辨析】 熟记点到平面距离的公式.

【延伸拓展】 本题也延伸至求平面与平面间的距离.

---

(5)**【标准答案】** 2.

【命题目的】 本题考查了矩阵变换和行列式的计算.

【详细解答】 $B(A-E)=2E,|B||A-E|=2|E|=4$

$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},|A-E|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2,|B|=2.$

【易错辨析】 $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$,所以$|2E|\neq 2|E|$,应该$|2E|=4|E|=4$.

【延伸拓展】 本题也可先求出矩阵B,但计算稍复杂.

---

(6)**【标准答案】** $\frac{1}{9}$.

【命题目的】 本题考查了二维随机变量分布计算.

【详细解答】 $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}$

$=\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{9}$.

【易错辨析】 注意条件中的X与Y相互独立.

【延伸拓展】

$$P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 相互独立同分布}}P(X_1\leqslant x)\cdots P(X_n\leqslant x)=\{P(X_1\leqslant x)\}^n$$

$$\begin{aligned}P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}&=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>x\}=1-P(X_1>x,\cdots,X_n>x)\\&\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 独立同分布}}1-P(X_1>x)\cdots P(X_n>x)\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}\cdots\{1-P(X_n\leqslant x)\}\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}^n.\end{aligned}$$

二、选择题

(7)**【标准答案】** (A).

【命题目的】 本题考查了导数与微分的相关概念.

【详细解答】 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$,所以排除(C)、(D).

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

$$= dx + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

因为$\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2] > 0$，所以$0 < dy \leqslant \Delta y$.（A）为答案.

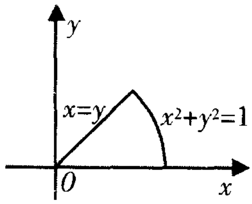
【易错辨析】 泰勒公式和麦克劳林公式要掌握熟练.

【延伸拓展】 本题可利用凹凸性来解：$f''(x) > 0$，曲线为凹的；$f'(x) > 0$，曲线单增，当$\Delta x > 0$时，$dy > 0$. 画出曲线草图立即可知$0 < dy < \Delta y$.

---

(8)**【标准答案】** (C).

【命题目的】 本题考查了积分变换及交换积分次序.



【详细解答】 由图知：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. 故应选(C).

【易错辨析】 容易混淆累次积分交换积分次序后的上下限.

【延伸拓展】 根据累次积分的积分限画出积分区域的图形，是每个同学都应该掌握的非常重要的基本功.

---

(9)**【标准答案】** (D).

【命题目的】 本题考查了级数收敛性的判断.

【详细解答】 方法一：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.（D）为答案.

方法二：(举反例)

(A)、(B) 的反例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. 排除(A)、(B)

(C) 的反例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散. 排除(C). (D) 为答案.

【易错辨析】 对于此种题型，一般可通过常反例排队法解决.

【延伸拓展】 熟记调和级数、p 级数、几何级数对于举反例是非常有用的.

---

(10)**【标准答案】** (D).

【命题目的】 本题考查了多元函数极值的性质.

【详细解答】 因为$\varphi'_y(x,y) \neq 0$，所以由$\varphi(x,y) = 0$可解出$y = y(x)$.

令$Z = f(x,y) = f(x,y(x))$　　因为(x_0,y_0)是极值点，所以

$$\left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=x_0} = f'_x(x_0,y_0) + f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad (*)$$

所以当$f'_x(x_0,y_0) \neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0) \neq 0$(否则，若$f'_y(x_0,y_0) = 0$，由(*)知，$f'_x(x_0,y_0) = 0$，矛盾). (D) 为答案.

【易错辨析】 掌握多元函数求极值的方法.

【延伸拓展】 本题也可用辅助函数法求解.

(11)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了向量组的线性相关性.

【详细解答】 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

所以 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$

所以 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.(A) 为答案.

【易错辨析】 掌握相关的判别法则.

【延伸拓展】 矩阵的秩不等式:①$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$;②$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$;③若 A 可逆,$r(AB)=r(B)$;④$r(A_{m\times n}B_{n\times s})\geqslant r(A)+r(B)-n$.

(12)【标准答案】 (B).

【命题目的】 本题考查了矩阵的初等变换.

【详细解答】 由 P 的表达式，容易求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换，右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换. PA 将 A 的第2行加到第1行，PAP^{-1} 再将所得的矩阵的第一列的 -1 倍加到第2列，即得到矩阵 C.(B) 为答案.

【易错辨析】 本题也可反过来,已知 C,P 的关系,问 A 与 C 是如何变换的.

【延伸拓展】 应熟记:左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换,右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换..

(13)【标准答案】 (C).

【命题目的】 本题考查了事件概率的性质.

【详细解答】 $1=P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},\therefore P(AB)=P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\mid B)P(B)=P(A)$.

(C) 为答案.

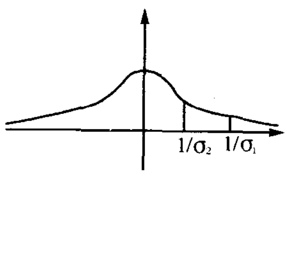
【易错辨析】 熟记常用的概率公式.

【延伸拓展】 利用概率公式变换即可求解.

(14)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了正态分布的相关性质.

【详细解答】 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1},\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$ 都服从标准正态分布 $N(0,1)$.



$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$

$=P\left\{\left|\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\dfrac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\left|\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\dfrac{1}{\sigma_2}\right\}$

由图知：$\dfrac{1}{\sigma_1} > \dfrac{1}{\sigma_2}$，$\sigma_1 < \sigma_2$．（A）为答案.

【易错辨析】 熟记密度函数的图形，就能按本题的解法，很快找到答案.

【延伸拓展】 1）应熟记：$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$；2）若 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，则 $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$，$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

三、解答题

(15)**【命题目的】** 本题考查了二重积分运算.

【思路点拨】 利用对称性简化积分形式.

【详细解答】 由对称性：$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

所以 $\displaystyle I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{1+r^2}$

$\displaystyle = \pi\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi\ln 2.$

【易错辨析】 该题若不利用对称性，直接用极坐标计算 $\displaystyle I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，计算会非常繁复，可能出现计算错误.

【延伸拓展】 关于对称性：

① 如果 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数（即 $f(-x,y) = -f(x,y)$），积分区域 D 关于 y 轴对称，则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$；

如果 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数（即 $f(-x,y) = f(x,y)$），积分区域 D 关于 y 轴对称，则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 为对称区域的一半.

② 如果 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数（即 $f(-x,y) = -f(x,y)$），积分区域 D 关于 x 轴对称，则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$；

如果 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数（即 $f(-x,y) = f(x,y)$），积分区域 D 关于 x 轴对称，则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 为对称区域的一半.

---

(16)**【命题目的】** 本题考查了数列极限的相关计算.

【思路点拨】 利用数列单调性求出 x_n 的极限，再用函数变换求（Ⅱ）的极限.

【详细解答】（Ⅰ）当 $0 < x_1 < \pi$ 时，$x_2 = \sin x_1 < x_1$，$0 < x_2 < \pi$

由数学归纳法：$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$，$0 < x_{n+1} < \pi$

所以数列 $\{x_n\}$ 单减，而且有下界（0 为下界.）

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$ 存在. 对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 求极限，得 $a = \sin a$

所以 $a = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a = 0$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{y\to 0}(\frac{\sin y}{y})^{\frac{1}{y^2}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\frac{\sin y}{y}-1)\frac{1}{y^2}}$

$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y-y}{y^3}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{3y^2}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}y^2}{3y^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

【易错辨析】 先要判断数列单调有界,才能假定数列极限的存在.

【延伸拓展】 ① 若$\lim u=0,\lim v=\infty$,则$\lim(1+u)^v=e^{\lim uv}$;

② $\lim u=1,\lim v=\infty$,则$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$;③ 若$\lim u=a>0,\lim v=b$,则$\lim u^v=a^b$.

(17)**【命题目的】** 本题考查了函数展成幂级数.

【思路点拨】 把函数转化为几个简单函数的和,再分别展成幂级数.

【详细解答】 $\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{3}(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})=\frac{x}{3}(\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+x})$

$\frac{x}{3}(\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n]x^{n+1},(-1,1)$

第一个级数收敛域为$(-2,2)$,第二个级数收敛域为$(-1,1)$. 二个级数的公共收敛域为$(-1,1)$.

【易错辨析】 注意本题收敛域的问题,应为各幂级数收敛域的交集.

【延伸拓展】 ① 二个收敛级数的和、差、积在公共收敛区域中收敛;

② 对收敛级数逐项求导、逐项求积,不改变收敛半径,但可能改变收敛半径端点的收敛性.

(18)**【命题目的】** 本题考查了多元微分的运算.

【思路点拨】 分别求出x,y的二阶偏导数,代入即可得证.

【详细解答】 (Ⅰ) 令$u=\sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{u},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-x\frac{x}{u}}{u^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{y^2}{u^3}$

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{x^2}{u^3}$

所以 $0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{y^2}{u^3}+f''(u)\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{x^2}{u^3}$

所以 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ)$uf''(u)+f'(u)=[uf'(u)]'=0,uf'(u)=C_1$

令$u=1$,得$C_1=1,uf'(u)=1,f'(u)=\frac{1}{u},f(u)=\ln u+C_2$

令$u=1$,得$C_2=0,f(u)=\ln u$.

【易错辨析】 如本题解中令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,运算量比较小;如果直接对$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$中的x,y求导,运算量比较大.

【延伸拓展】 对于这种题型,一般第二问都要用到第一问的结论.

(19)**【命题目的】** 本题考查了曲线积分性质应用.

【思路点拨】 利用公式判别法：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

【详细解答】 $P(x,y)=yf(x,y),Q(x,y)=-xf(x,y)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_1'(x,y),\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_2'(x,y)$

将$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$二边对t求导，得

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$

令 $t=1$，得 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$

所以 $-f(x,y)-xf_1'(x,y)=f(x,y)+yf_2'(x,y)$，即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

所以对D内的任意分段光滑的简单闭曲线L都有$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.

【易错辨析】 熟记曲线积分为D的判断方法.

【延伸拓展】 若$f(x,y,z)$满足$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$称该函数为k次齐次函数. k次齐次函数满足以下等式：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$.

---

(20)【命题目的】 本题考查了线性方程组解的性质及求通解.

【思路点拨】 非齐次线性方程组有3个线性无关的解，可推出齐次线性方程组解向量的个数$\geqslant 2$，从而有$4-r(A)\geqslant 2$.

【详细解答】 (Ⅰ)因为$\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $r(A)\geqslant 2$

假设非齐次方程组三个线性无关解为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$是齐次方程的二个不同的解. 考查 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)=0$

得 $(k_1+k_2)\alpha_1-k_1\alpha_2-k_2\alpha_3=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，即$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性无关. 所以齐次方程基础解系的解向量个数大于等于2. 所以

$4-r(A)\geqslant 2,r(A)\leqslant 2,\therefore r(A)=2$

(Ⅱ)因为$r(A)=2$，所以$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\a&1&3\end{vmatrix}=0,2a-4=0,a=2$

$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&-1\\1&3&b\end{vmatrix}=0,2b+6=0,b=-3.$

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&-1&1&-5&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

齐次方程组：$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$

取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$,$\eta_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ 取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}$,$\eta_2=\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$

齐次方程组通解:$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$

非齐次方程组:$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$ 取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$,$\eta^*=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}$

原方程组通解:$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\eta^*=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}$.

【易错辨析】 如果非齐次方程组有 n 个线性无关解,则对应的齐次方程组至少有 $n-1$ 个线性无关解,即基础解系向量个数大于等于 $n-1$.

【延伸拓展】 求 a,b 也可用以下方法:直接将增广矩阵进行行变换,非齐次方程组有解等价于系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

---

(21)**【命题目的】** 本题考查了特征值与特征向量的相关计算.

【思路点拨】 先计算特征值与特征向量,正交化后,直接求对角矩阵的幂次.

【详细解答】 (Ⅰ)由条件知0是特征值,相应的特征向量为 I_1,I_2.

取 $I_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$,假设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,则 $AI_3=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

所以 $\lambda=3$ 为特征值,相应的特征向量为 $\bar\beta_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$.

(Ⅱ)将 I_1,I_2 正交化:

$$\bar\beta_1=I_1,\bar\beta_2=I_2-\frac{(I_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,-1,1)^{\mathrm T}-\frac{-3}{6}(-1,2,-1)^{\mathrm T}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm T}$$

将 $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\bar\beta_3$ 标准化后得:$\beta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$,$\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$,$\beta_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以,$Q=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $Q^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

$$Q^TAQ = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

【易错辨析】 本题利用了正交矩阵 $Q^T = Q^{-1}$,于是 $Q^TQ = E$,很容易求出 $(A-\frac{3}{2}E)^6$;如果先求出 $A-\frac{3}{2}E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,再求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$,计算 $(A-\frac{3}{2}E)^6$ 的过程比较繁复.

【延伸拓展】 本题也可用以下方法求解:假设另一个特征值 λ 的特征向量为 $(1,x,y)$,则它应和 I_1,I_2 正交. 立即可求出 x,y. 由 A 的各行元素之和均为 3 可求出特征值 λ 的值.

---

(22)**【命题目的】** 本题考查了二维随机变量分布的相关计算.

【思路点拨】 利用 $f(x)$ 的分段表达式先求出 $F(y)$ 的表达式,再计算 $f_Y(y)$.

【详细解答】 (Ⅰ) $F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$

① 当 $y<0$ $\quad F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = 0$

② 当 $0 \leqslant y < 1$

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}\sqrt{y}$$

③ 当 $1 \leqslant y < 4$

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}$$

④ 当 $y \geqslant 4$

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_0^{2} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f_Y(y) = F'(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\sqrt{y}} & 0 \leqslant y < 1 \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & 1 \leqslant y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(Ⅱ) $EX = \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}dx + \int_0^2 \frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}, EX^2 = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx = \frac{5}{6}$

$$EX^3 = \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2}dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{7}{8}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,X^2) = EX^3 - EX \cdot EX^2 = \frac{7}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

(Ⅲ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right) = P(X \leqslant -\frac{1}{2}, Y \leqslant 4) = P(X \leqslant -\frac{1}{2}, -2 \leqslant X \leqslant 2)$

$$= P(-1 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}.$$

【易错辨析】 本题不能求出联合密度 $f(x,y)$ 及联合分布函数 $F(x,y)$.

【延伸拓展】 必须熟记:数学期望、方差、协方差、相关系数的相关计算公式.

(23)【命题目的】 本题考查了参数的估计.

【思路点拨】 N 个样本值小于 1 的样本可考虑为 $X_{n_1},X_{n_2},X_{n_3},\cdots,X_{n_N}$.

【详细解答】 (Ⅰ) $EX=\int_0^1\theta x\mathrm{d}x+\int_1^2(1-\theta)x\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}-\theta=\overline{X}$

$\hat{\theta}_{\text{矩估计}}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$

(Ⅱ) 因为有 N 个样本值小于 1,所以似然函数为

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N};\ln L=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}=0,\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}.$

【易错辨析】 注意密度函数为分布函数,需考虑 x_n 的取值范围.

【延伸拓展】 关于矩估计,经常用到以下三点:1) 用一阶样本原点矩估计总体一阶原点矩(即用样本均值估计总体均值;2) 用二阶样本原点矩估计总体二阶原点矩;3) 用二阶样本中心矩估计总体二阶中心矩(即用 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 估计总体方差).

2006 年数学(一)试卷评析

2006 年数学(一)考点分布表

考点	函数与极限	导数与微分	幂级数展开	无穷级数	重积分	多元微分	常微分方程	曲线、曲面积分及场记初步	矩阵与行列式	向量的相关性	线性方程组	特征值与特征向量	随机变量及其分布	参数估计
分数	16	8	12	4	14	12	4	16	8	4	9	9	21	9

本试卷高等数学部分的试题主要考查了:1. 函数极限的计算;2. 函数的微分及性质;3. 二重积分变换及运算;4. 曲线、曲面积分. 其中极限与微分所考的都是基础题型,难度不高;二重积分及曲线、曲面积分是考查的重点,也是难点. 所占分值很高,读者应多加强这方面的训练,熟记常用的公式、定理,以在考试中减少"追忆"的时间.

本试卷线性代数部分的试题主要考查了:1. 矩阵的变换及行列式的计算;2. 向量线性相关性的判断;3. 线性方程组求解;4. 特征值与特征向量的相关计算. 这些知识点每年都有涉及,其中线性方程组求通解的相关计算近几年都出大题,属于重点考查部分,考生需特别注意.

本试卷概率统计部分主要考查了:随机变量分布和参数估计. 其中二维随机变量分布考查的为一道大题. 一维随机变量分布的考查出现在选择题与填空题中;参数估计去年没考,但 04 年考过一道大题.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)

详解·拓展·评析

一、填空题

(1)【标准答案】 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

【命题目的】 本题考查了斜渐近线的求法及用“抓大头”思想求极限的方法.

【详细解答】 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2x+1)}=\frac{1}{2}$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x(2x+1)}{2(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{4x+2}=-\frac{1}{4}$.

所以曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为:$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

【易错辨析】 本题要求考生记住曲线 $y=f(x)$ 的斜率 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$,截距 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

【延伸拓展】 本题还可考查水平渐近线以及垂直渐近线.

---

(2)【标准答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

【命题目的】 本题考查了含有边界条件的微分方程的解法.

【详细解答】 由方程中含有 $\ln x$ 可知:$x>0$

则对方程两边均除以 x 可得

$$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$$

所以 $p(x)=\frac{2}{x},q(x)=\ln x$

所以方程的通解为:

$$y=[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}]e^{-\int p(x)dx}$$

$$=[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+\tilde{C}]e^{-\int\frac{2}{x}dx}$$

$$=(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\tilde{C})\cdot\frac{1}{x^2}$$

由初始条件 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 可得:$-\frac{1}{9}=-\frac{1}{9}+\tilde{C}$,即 $\tilde{C}=0$

所以微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为:$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

【易错辨析】 注意应先将给定的方程化为标准形式,然后再确定 $p(x)$ 和 $q(x)$,否则容易出错.

【延伸拓展】 初值问题$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+g(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$的解:$y=[y_0+\int_{x_0}^{x}g(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x]\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}$.

---

(3)【标准答案】 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

【命题目的】 本题考查了方向导数的求法.

【详细解答】

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{n}\right|_{(1,2,3)}$$

$$=\left.\left(\frac{1}{3}x,\frac{1}{6}y,\frac{1}{9}z\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right|_{(1,2,3)}$$

$$=\left.\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{9}z\right)\right|_{(1,2,3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

【易错辨析】 如果给出的方向数不是单位向量,应先将其单位化.

【延伸拓展】 本题也可考查方向余弦及梯度、旋度和散度等知识点.

---

(4)【标准答案】 $2\pi R^3(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

【命题目的】 本题考查了曲面积分.

【详细解答】 $\because\ \sum$ 是Ω的整个边界外侧.

$\therefore$ 根据高斯公式可得:$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$.

$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}(\sqrt{R^2-\rho^2}-\rho)\rho\mathrm{d}\rho$(令$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$可得交线在$xoy$平面向的投影域为$x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{2}$)

$$=2\pi\cdot\left.\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\rho^3\right]\right|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot2\pi R^3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\therefore\ \iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=2\pi R^3(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$

【易错辨析】 注意分清格林公式建立了沿封闭曲线积分与二重积分的关系,而高斯公式建立了闭曲面积分和三重积分之间的关系.

【延伸拓展】 高斯公式:$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

(5)【标准答案】 2.

【命题目的】 考查了行列式求值的相关知识.

【详细解答】 $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$

$= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3|$ (第1列乘以(-1)加到第2,3列)

$= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_3|$ (第2列乘以(-2)加到第3列)

$= 2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3|$ (第3列乘以(-3)加到第2列,然后第2列,第3列分别乘以(-1)并加到第1列)

$= 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$

$= 2|\boldsymbol{A}|$

$= 2.$

【易错辨析】 注意$|\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$,而$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \neq |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| + 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$.

【延伸拓展】 本题可延伸为:若$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}$

其中$\boldsymbol{\alpha}_i (i=1,2,3)$为了3维行向量,如果$|\boldsymbol{B}|=1$,那么$|\boldsymbol{A}| =$ ________.

---

(6)【标准答案】 $\frac{13}{48}$..

【命题目的】 本题考查了全概率公式.

【详细解答】 若$Y=2$,则X可能等于2,3,4,由全概公式可得:

$P\{Y=2\} = P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\} + P\{Y=2|X=3\}P\{X=3\} + P\{Y=2|X=4\}P\{X=4\}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$= \frac{13}{48}.$

【易错辨析】 注意$P\{Y=2|X=K\} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{4}$.

【延伸拓展】 要求考生熟记全概率公式.

二、选择题.

(7)【标准答案】 (C).

【命题目的】 考查了极限与导数存在的相关知识.

【详细解答】 当$|x|<1$时,$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = 1$

当$|x|>1$时,$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = |x|^3$

当$|x|=1$时,$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1} = 1$

$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ |x|^3, & |x|>1 \end{cases}$,且当$|x|<1$或$|x|>1$时,$f(x)$均可导.

在$x=1$处,$f'_+(1) = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{|x|^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1} = 3$,$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1} = 0$,$f'_1(1) \neq f'_-(1)$