名师导学系列

2006年

考研数学历年真题解析与指导

本书编写组

重点内容和题型

解题思路与方法

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

名师导学系列

2006年考研数学
历年真题解析与指导

本书编写组

➢ 重点内容和题型

➢ 解题思路与方法

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

2006年考研数学历年真题解析与指导/本书编写组.
北京:高等教育出版社,2005 3
ISBN 7-04-017154-6

Ⅰ 2　Ⅱ 本　Ⅲ 高等数学-研究生-入学
考试-解题　Ⅳ 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第017650号

策划编辑 刘　佳　**责任编辑** 郑轩辕　赵天夫　**封面设计** 王凌波　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http //www hep edu cn
总　　机	010-58581000		http //www hep com cn
		网上订购	http //www landraco com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http //www landraco com cn
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		
开　　本	850×1168　1/16	**版　　次**	2005年3月第1版
印　　张	21 25	**印　　次**	2005年3月第1次印刷
字　　数	500 000	**定　　价**	35 00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17154-00

编 者 的 话

全国硕士研究生入学考试是我国招收硕士研究生的主要手段和方式，随着招生规模的扩大，入学竞争的激烈，体现公平、公正原则的国家统一考试在人才选拔中起着越来越重要的作用。从 1987 年开始，数学课程就是研究生入学考试中理工类、经济管理类考生必考的专业基础课，2002 年起数学科满分由 100 分增为 150 分，数学课程成绩在研究生入学录取中所起的作用进一步加大，这将有力地促进高等数学、线性代数和概率论与数理统计等课程的教学改革和学科建设，同时也将促使考生特别是理工、经济管理类考生对数学课程的学习更加重视。这些年来，数学课程的试卷种类、考试内容、考试要求、试卷结构等虽然经过多次修订发生了一些变化，但考试的主要目标没有变化。数学考试主要考查数学基本概念、基本方法、基本理论，考核运算能力、空间想象能力、逻辑推理能力、分析判断能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，在近几年的数学考试中还要求考生能够结合实际问题，建立数学模型，应用所学数学方法解决实际问题。

为了帮助广大考生掌握数学考试的重点内容，重点题型，命题思路和考试要求，了解历年考试的基本情况，更加有效地复习数学，我们编写了本书。多年全国硕士研究生数学考试的结果证明，要学好数学，并在考研中取得良好的成绩，必须在学好数学基本知识的基础上，进一步掌握方法，熟悉题型，多做题目，反复练习，提高数学解题能力，做到举一反三，融会贯通。数学不同于其他学科，试题中很少有考查单一知识点的试题，一般都是多个知识点和能力点的有机综合，在数学考研准备的过程中，不掌握方法，不熟悉题型，不掌握重点，要取得好成绩是比较困难的。历年研究生数学考试试题，全面体现和反映了《数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型。熟练历年试题及其解题方法不仅可以进一步掌握考试内容、熟悉考试要求，而且可以分析和提炼出考核重点，掌握试题特点、提高解题能力。

本书内容主要分为两部分，一部分为数学复习指导，一部分为历年真题精选解析。数学复习指导由曾多年参加研究生数学命题工作的教授编写，文字不多，但可起着“画龙点睛”的作用，认真领会复习指导部分的内容，对于提高学习兴趣，掌握学习方法，提高学习成绩具有重要作用。历年真题精选解析是本书的重点，我们从 1987 年至 2005 年共计 19 年数学考试的 85 份试卷中精选出 523 道真题进行了解析，其中高等数学(微积分)试题 325 道，线性代数试题 116 道，概率论和数理统计试题 82 道。这些题目是历年来研究生入学考试数学试题的精华，集中反映了数学试题的考核重点和典型题型。我们不仅给出试题的参考答案，还给出了考核的知识点和能力，指出解题思路和考生的典型错误。

每个章节按填空题、选择题、计算题和证明题四种题型分类。每个试题前用数码表明试题使用的年份、卷种、题分等信息。如某题前括号内的数码为(99105)，表示此题为 1999 年数学一试卷中的一道 5 分题，数码为(04104)，表示此题为 2004 年数学一试卷中的一道 4 分题。同一题型中的试题基本按照《考试大纲》中所列考试内容的顺序排列。但有些试题综合性较强，考核多个知识点和能力点，或者使用的方法和考核的目标不属于同一章节，对于这种情况，我们一般将其分类在主要考核目标所在的章节中。比如，利用洛必达法则求极限的试题，尽管属于一元函数微分学的内容，但一般分类在函数、极限、连续一节中。

所选试题大多附有难度值和区分度等统计指标。难度和区分度数值是教育测量学中评价试题质量的两个重要指标。这里难度值指标最为有用，所给的难度值是指考生平均得分与题目满分之商，也就是得分率。它是通过从全国考生中随机抽取部分考生样本的答题情况统计出来的，具有很好的精确度，较为客观地反映出题目的难易程度。这里的难度值，一般指“容易度’，所列难度值越大，试题得分率越高，试题越容易，相反，所列难度值越小，试题得分率越低，试题越难。区分度反映试题将考生水平拉开来的功效。区分度越高，区分力越强，反之，区分力越低。

另外，为了进一步描述试题的特性，还对部分试题按难度和区分度进行了分类。试题共分为六类，难度值低于 0 3 且区分度低于 0 3 的试题为 I 类试题；难度值在 0 3～0 8 之间但区分度低于 0 3 的试题为 II 类试题；难度值大于 0 8 且区分度低于 0 3 的试题为 III 类试题，难度值低于 0 3 但区分度大于 0 3 的试题为 IV 类试题；难度值在 0 3～0 8 之间区分度大于 0 3 的试题为 V 类试题；难度值大于 0 8 但区分度大于 0 3 的试题为 VI 类试题。不同类试题在试卷中的作用不同。在这六类试题中，大多数试题属于第 V 类试题，第 V 类试题难易度适中，区分度合格的试题，是比较成功的试题。但是第Ⅰ类和第Ⅳ类试题是考生得分率低的试题，应引起考生的高度重视，会做这类试题，说明你的数学水平达到了相当的程度。

考生在结合本书进行数学复习时，一定要注意以下几点：

第一，要紧扣最新《数学考试大纲》学习，熟悉考试大纲规定的考试内容和考试要求，考试大纲是考试命题的依据，出题范围和试题要求不会超过考试大纲的规定。

第二，要了解各种题型的特点，掌握各种试题的解题方法。数学考试题型主要包括选择题、填空题、解答题和证明题。选择题主要考查数学的基本概念、基本性质、基本方法，要求考生根据题干所给条件和要求，进行分析、推理、判断、比较或简单计算，准确地作出正确选择。做选择题一般不需要复杂的计算，要求考生数学概念清楚，方法熟练，并能从正反面分析考察各选项的正误。填空题主要考查数学的基本性质、基本的运算方法和定理的简单应用，要求考生能够准确、快速地填写出正确答案。在解答这两类试题时，不要拘泥于解答的书写过程，要重视答案的准确性，因为一旦答错，前功尽弃。解答题是数学考试的主要题型，可以用于考查所有要求考查的知识和能力。解答题还可以分为计算题、分析判断题、综合题和应用题。每种题型的功能有所侧重，主要考查考生基本运算能力、逻辑推理能力、综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力。对于解答题，考生应注意总结试题类型，归纳解题方法，提高解题能力。证明题主要考查逻辑思维和逻辑推理能力，是数学考试中历年得分率最低的一种题型，是广大考生的共同薄弱环节，希望考生能够从本书所选试题中有所启迪，通过练习，提高逻辑推理能力。

第三，要结合自己数学水平的实际情况，有选择地选取适合的试题进行练习，全面提高自己的解题能力。全书共选有540道试题，逐题都做，需要花很长时间，也没有必要。要针对自己的弱项，难点进行学习。比如，若逻辑推理能力的证明题是弱项，就应对证明题部分有选择地重点练习。另外，要善于从历年试题中归纳出典型的题型进行反复练习，可以起到事半功倍的效果。

第四，要边做题，边总结，最好先不看解答自己做，或者先看一下试题中“分析”的提示后自己做，如果自己会做，就不要看解答了，同类试题也可以少做了，数学就是这样一通百通。但是如果做错了，可以看解答，但必须仔细总结或找出解题思路中的问题，并继续做相关的试题，以提高解决类似试题的能力。在解析中，对部分试题，我们还给出了多种解法和考生的典型错误。掌握多种解法可以拓宽解题思路，考生应注意掌握和学习。对典型错误，考生更应引起注意，因为这些问题一般都是普遍性的问题，很多考生都犯，我们才列在这里，希望考生不要重蹈覆辙，避免发生类似错误。

第五，要善于利用试题所提供的统计信息对自己的能力和水平进行自我检测。有些试题属于第Ⅲ类或第Ⅵ类试题，大家的得分率都很高，你会做别人也会做，不能满足会做这类试题。相反，在做得分率较低的第Ⅰ类和第Ⅳ类试题时，即使暂时没有做出来或做错，也不要灰心，要加把劲，完成这类试题，会使你的水平有较大幅度的提高 当然，属于中等难度的第Ⅱ和第Ⅴ类试题是试卷中占分比例最高的试题，考生应重点掌握，切不可忽视。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏、不足和错误之处，恳请读者批评指正。

本书编写组

2005年2月2日

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　复习指导

高等数学是高等院校一门重要的基础课,因此它是硕士研究生人学考试数学试卷的最重要组成部分《全国硕士研究生人学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)规定,无论是工科类数学试卷一、试卷二,还是经济类数学试卷三、试卷四,均要求考高等数学,它在数学试卷一中约占60%,数学试卷二中约占80%,数学试卷三、试卷四中约占50%.因此在备考时,如何复习高等数学,就成为考生十分关注的课题 为了帮助考生更有效地进行复习,在这里按照大纲规定的考试内容的顺序,一一进行阐述

一、函数、极限、连续

函数是高等数学的研究对象,极限是高等数学的重要概念,也是研究的方法,而且它的思想和方法贯穿于微积分的始终 连续是一大类函数的重要特性,连续函数是微积分的重点 本单元考查重点,是函数(含表示方法)、极限(含左极限与右极限)、连续(含左连续与右连续)的概念及性质,函数间断点类型的判断,函数的表示,求极限的若干方法,运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题 本单元试题类型:①函数记号的运算;②分段函数的运算;③简单反函数的定义域及其表示;④考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件;⑤判断函数间断点及其类型;⑥无穷小的比较;⑦判断函数的性质(有界性,单调性,奇偶性,周期性);⑧利用闭区间上连续函数性质证明一类题;⑨求极限(包括用极限的定义,等价无穷小,极限的运算法则,极限存在准则,两个重要极限,函数的连续性,L'Hospital 法则,导数定义,定积分定义以及级数收敛的必要条件等方法)

下面仅就几种重点题型,举例说明

例 1　试证函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x\to0$ 时不成为无穷大

分析　在点 $x=0$ 的某邻域内,函数无界与当 $x\to0$ 时,$f(x)\to\infty$ 是两个容易混淆的概念,函数无界未必就是无穷大(无穷大显见是无界的)

证　对于无论多大的正数 G,总有充分接近于 $x=0$ 的点,使得 $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$ 例如,若取 $x=\frac{1}{n\pi}$,则 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=n\pi$,所以,若 $n\pi>G$,即 $n>\frac{G}{\pi}$,则存在点 $x=\frac{1}{n\pi}$,使 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$,即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的

又如,若取 $x=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$,则当 $n\to\infty$ 时,$x\to0$,但此时 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$,因此函数 $f(x)$ 并不趋于无穷大

例 2　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)<a$,$f(b)>b$,试证方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内至少有一个实根

分析　方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内有实根等价于函数 $f(x)-x$ 在 (a,b) 内有零点 而 $f(x)-x$ 在 $[a,b]$ 上连续,故可考虑对其用连续函数的零点存在定理

证　设 $F(x)=f(x)-x$,$F(x)$ 连续,$x\in[a,b]$,又 $F(a)=f(a)-a<0$,$F(b)=f(b)-b>0$,故由零点存在定理,知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)-\xi=0$,于是 ξ 为方程 $f(x)=x$ 的实根

例 3　设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$,求 $f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

分析 由题设,知

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0(\text{否则上述极限不存在})$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)\quad(f(x)\text{连续}),$$

从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

下面求 $f''(0)$,或用 L'Hospital 法则,或用 Taylor 展式,最后利用重要极限求出欲求之极限.

解法 1 由题设,有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$,从而有 $f(0)=0,f'(0)=0$(连续性,导数定义).

因当 $x\to0$,有
$$\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\sim x+\frac{f(x)}{x},$$

故知
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3,$$

即有
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2\overset{L}{\Longrightarrow}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=2$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4,\text{即 }f''(0)=4.$$

故
$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}$$
$$=e^2.$$

解法 2 由题设,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3,\qquad(*)$$

推知 $f(0)=0,f'(0)=0$,而由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$
$$=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

可得 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f''(0)}{2}x+o(x)$,代入($*$),有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x\left(1+\dfrac{f''(0)}{2}+o(1)\right)\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\dfrac{f''(0)}{2}+o(1)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)=3\Longrightarrow f''(0)=4.$$

故
$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{2x+o(x)}\cdot\frac{2x+o(x)}{x}}$$
$$=e^2.$$

注 ①例 1 说明函数无界与无穷大是两个不同的概念,不能混为一谈.无穷大必无界,而无界却未必无穷大.函数无界相对函数有界而言,从函数有界的定义可以立即得出函数无界的定义.函数有界的定义:$\exists M>0,\forall x\in I$,有$|f(x)|\leqslant M$;于是有函数无界的定义:$\forall G>0,\exists x_0\in I$,有$|f(x_0)|>G$(其中 I 表示某区间).从某种意义上来说,函数“有界”与“无界”可

以认为是一对孪生的概念，这样就容易理解，也便于记忆

② 例 2 是一道证明题，用的是常规方法，但却是很重要的方法，那就是“辅助函数”法 引入什么样的函数至关重要，通常是从结论出发，由已知条件，寻找理论根据（定理、公式），这样作出的辅助函数即可达到证明的目的

③ 例 3 是一道关于极限的综合题，在解题过程中，涉及极限概念，等价无穷小，连续性，L'Hospital 法则，导数定义，Taylor 公式，重要极限等，知识点较多，但只要充分理解题设条件，把握住极限存在性这一主体思路，还是容易入手的 事实上，由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$ 立知 $f(0)=0$（因 $f(x)$ 连续，若 $f(0)\neq 0$，则上述极限不存在） 进而由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知 $f\ (0)=0$ 注意到，在涉及与二阶导数或二阶以上导数有关的命题时，应用 Taylor 公式往往是有效的 本题在求 $f''(0)$ 时，用了 Taylor 公式比较方便 解法 2 比解法 1 更直接一些

二、一元函数微分学

本单元考查重点是导数（微分）的概念，导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程与法线方程，可导（可微）与连续；微分运算（按定义求导数，各种函数形式的导数，分段函数求导数，高阶导数等）；微分中值定理（含 Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理以及 Taylor 定理）并用之于证明某些函数不等式，函数方程及其相关命题；导数应用（函数单调性、极值判别法，函数图形凹凸性、拐点判别法，求曲率）并用之于绘图（会求渐近线）；会用 L'Hospital 法则求极限

本单元的试题类型：①求已知函数（包括显式、隐式、参数式以及变上限积分所确定的函数等）的导数（微分，高阶导数）；②判定函数在一点的可导性（包含连续性、极限存在性）；③利用导数确定函数性态（单调性，极值，凹凸性，拐点），描绘函数图形（含渐近线）；④利用导数方法，求实际问题中的最大值、最小值问题；⑤利用微分中值定理，证明函数属性的命题；⑥证明函数不等式（利用函数单调性，微分中值定理） 如果说上一单元的证明题主要用到闭区间上连续函数的性质，那么本单元的证明题几乎都要用到微分中值定理了，就这方面的问题举例以说明

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上具有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$ 试证：至少存在一点 $\xi\in(-2,2)$，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$

分析　由题设，作辅助函数 $F(x)$，使 $F(0)=4$，由结论，知 $F'(x)$ 出现 $f(x)+f''(x)$，恰好 $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$ 符合上述要求 为了证出 $[f(x)+f''(x)]\Big|_{x=\xi}=0$，需估计 $f'(x)\Big|_{x=\xi}$ 为此，在 $[-2,0]$ 与 $[0,2]$ 上分别应用 Lagrange 定理，得 $|f'(a)|\leqslant 1$，$|f'(b)|\leqslant 1$，其中 $a\in(-2,0)$，$b\in(0,2)$

证　由 Lagrange 定理，有

$$f(0)-f(-2)=f\ (a)[0-(-2)],\ -2<a<0,$$
$$f(2)-f(0)=f'(b)(2-0),\ 0<b<2,$$

即

$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\ -2<a<0,$$
$$f'(b)=\frac{f(2)-f(0)}{2},\ 0<b<2$$

由 $|f(x)|\leqslant 1$ 可知，$|f\ (a)|\leqslant 1$，$|f'(b)|\leqslant 1$，

作辅助函数

$$F(x)=f^2(x)+f'^2(x),$$

故有

$$F(a)\leqslant 2,\ F(b)\leqslant 2$$

由题设知，$F(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，$F(0)=4$，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值取自于 (a,b) 内，且 $\max\limits_{[a\ b]}F(x)\geqslant 4$，又由题设知，$F(x)$ 在 (a,b) 内可导，于是由 Fermat 定理，知 $F'(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$，即

$$F\ (\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0,$$

因 $F(\xi)\geqslant 4$，$|f(\xi)|\leqslant 1$，故 $f\ (\xi)\neq 0$，从而有 $f(\xi)+f''(\xi)=0$，这里 $\xi\in(a,b)\subset(-2,2)$

例 2　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，则对于 (a,b) 内任意 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

分析 记

$$c=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

因
$$\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant c\leqslant\max(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

故 $c\in(a,b)$ 于是在点 $c\in(a,b)$，$f(x)$具有 Taylor 展式，由此即得所证

证 由一阶 Taylor 公式，

$$f(x_i)=f(c)+f'(c)(x_i-c)+\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i-c)^2\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 ξ_i 在 c 与 x_i 之间

由题设 $f''(x)>0$，于是有

$$f(x_i)\geqslant f(c)+f'(c)(x_i-c)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

将上式对 i 从 1 加到 n，并利用 $x_1+x_2+\cdots+x_n-nc=0$，得

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geqslant nf(c),$$

即
$$f(c)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)],$$

或
$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

式中等号仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=c$ 时成立

特别地，取 $n=2$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

例 3 设 $f(x)$有二阶连续导数，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则 $f(0)$是 $f(x)$的极小值.

分析 利用极限与无穷小的关系，写出 $f''(x)$的表达式并知在点 $x=0$ 的空心邻域内 $f''(x)>0$，再由 Taylor 公式及极值定义即可得证

证 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1\Longrightarrow\frac{f''(x)}{|x|}=1+o(1)$

$$\Longrightarrow f''(x)=|x|+o(x),$$

故在点 $x=0$ 的空心邻域内总有 $f''(x)>0$ 于是由一阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geqslant f(0),$$

因此，由极值定义知 $f(0)$为 $f(x)$的极小值

注 ① 例 1 有一定的综合性，先由结论启示需作辅助函数 $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，于是便有 $F'(x)=2f'(x)\cdot[f(x)+f''(x)]$，为要证出 $\exists\xi\in(-2,2)$，有 $f(\xi)+f''(\xi)=0$ 这里用到三个定理，一是 Lagrange 定理，估计出 $|f'(a)|\leqslant1,|f'(b)|\leqslant1$，从而知 $F(a)\leqslant2,F(b)\leqslant2$；二是闭区间上连续函数的最值定理，得$\max\limits_{[a,b]}F(x)\geqslant4$，且在$(a,b)$内达到；三是由 Fermat 定理（即若可导函数 $\varphi(x)$在一点 $x_0\in(a,b)$取得极值，则有 $\varphi'(x_0)=0$），知 $F'(\xi)=0$，即 $F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$，由 $F(\xi)\geqslant4,|f(\xi)|\leqslant1$，必有 $f'(\xi)\neq0$，因此 $f(\xi)+f''(\xi)=0,\xi\in(a,b)$

② 例 2 中若设 $f''(x)<0$，则结论中的不等号反向 比如，设 $f''(x)<0,x\in(a,b)$，则 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 此题证法除按例 2 办法处理外，也可利用单调性证之：构造辅助函数

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x_1+x}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x)],$$

有 $\varphi(x_1)=0,\varphi'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x_1+x}{2}\right)-\frac{1}{2}f'(x)=\frac{1}{4}f''(\xi)(x_1-x)$，因 $f''(x)<0$，故当 $x<x_1$ 时，有 $\varphi'(x)<0$；当 $x>x_1$ 时，有 $\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x_1)=0$ 为 $\varphi(x)$的最小值，因此当 $x\neq x_1$ 时，有 $\varphi(x)>0$，即知当 $x_2\neq x_1$ 时，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

还可利用 Lagrange 定理证之 不妨设 $x_1<x_2$,由 Lagrange 定理,有

$$\begin{aligned}I&=f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right]\\&=f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2}-f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2}\\&=\frac{x_2-x_1}{2}[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]=\frac{1}{2}f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)(x_2-x_1),\end{aligned}$$

其中 $x_1<\xi_1<\frac{x_1+x_2}{2}<\xi_2<x_2,\xi_1<\xi<\xi_2$ 由 $f''(\xi)<0$ 推知 $I<0$,即得

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

③ 例 3 也可以这样证:由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1>0$,故由极限的保号性,存在点 $x=0$ 的空心邻域,在此邻域内$\frac{f''(x)}{|x|}>0$,即有 $f''(x)>0$,或$(f'(x))'>0$,即 $f'(x)$单调增加,又 $f'(0)=0$,于是在点 $x=0$ 左邻域 $f'(x)<0$,右邻域$f'(x)>0$,由极值第一判别法知 $f(0)$为 $f(x)$的极小值 还可以利用 Lagrange 定理证之:在证出 $f''(x)>0$(同上证)后,由 Lagrange 定理,可得

$$f'(x)=f'(0)+f''(\xi)x=f''(\xi)x\begin{cases}<0,当\ x<0,\\>0,当\ x>0,\end{cases}$$

因此由极值第一判别法知 $f(0)$为 $f(x)$的极小值

三、一元函数积分学

本单元考查重点:原函数概念,不定积分概念及性质;求不定积分的换元积分法,分部积分法;几种典型函数的不定积分(含有理分式、三角有理式及简单无理式);定积分的概念和性质(含定积分中值定理);变上限积分定义的函数及其导数;定积分的计算;定积分的应用(诸如求平面图形的面积,求平面曲线的弧长,求旋转体体积,求旋转曲面的面积,已知平行截面求体积,求变力做功,引力,压力以及求函数的平均值等);广义积分

本单元试题类型:求函数的不定积分及定积分;对变限积分表示的函数的性质的讨论(例如,求其极限,导数,极值,判断奇偶性,求含有积分式的方程的解等);定积分的性质以及有关定积分的等式、不等式的证明;广义积分的计算;定积分的应用

计算积分一般较为困难,不易掌握,这是因为求积分有较大的灵活性(甚至带有技巧性),不像计算导数(微分)那样有固定的程序,但多练习,勤于思考,善于归纳,从中可以找到一些规律 求不定积分一般是先通过一些运算(代数化简,三角恒等变形以及变量替换等),把被积表达式化成基本积分公式中类型,从而求得欲求之不定积分 仅仅这些运算是不够的,根据被积函数的特点,还要采取换元积分法与分部积分法来处理,计算定积分主要是用 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ 进行的,关键是求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$(即求 $f(x)$ 的不定积分) 在这里要注意,在用上述公式计算定积分时,要求被积函数 $f(x)$ 在积分区间$[a,b]$ 上连续 若有间断点,则可根据定积分性质,将$[a,b]$ 按间断点分成子区间,再求定积分 若间断点是无穷型的,则要按广义积分处理 当被积函数是分段函数时,定积分就应在分段区间上求 被积函数含有绝对值的定积分,通常可化为分段函数的定积分 从历届研究生入学试题来看,变限积分占有相当的分量 这类积分的特点是积分上(下)限是可变的,当被积函数 $f(x)$ 连续,变上限函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就可导,且$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$,可见变上限函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是$f(x)$ 的一个原函数 与此相关的命题很多,应引起特别的关注 下面举几例说明解题思路

例 1 设 $f(x)$ 连续,$x\in(0,+\infty)$,$f(1)=3$,且满足$\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t=x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t+y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t(x>0,y>0)$,试求

$f(x)$

分析 注意到 $f(x)$ 连续，x 与 y 相互独立，因而可以分别对 x 与 y 求导，利用题设，消去其中一个变量，以便求解

解 将所给等式两边对变量 y 求导，得

$$xf(xy) = xf(y) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

令 $y=1$，有

$$xf(x) = xf(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

上式两边对 x 求导，得

$$f(x) + xf'(x) = f(1) + f(x),$$

即

$$f'(x) = \frac{f(1)}{x} = \frac{3}{x},$$

故 $f(x) = 3\ln x + C$，代入 $f(1)=3$，得

$$f(x) = 3(1+\ln x)$$

例 2 设 $f'(x)$ 连续，$x\in[0,1]$，试证：$\forall x\in[0,1]$，有

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 [|f(t)| + |f'(t)|]\mathrm{d}t$$

分析 将 $f(x)$ 用变上限积分（被积函数 $f'(x)$）表示，再利用定积分的性质证之

证 由 $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t, x_0\in[0,1]$，得

$$|f(x)| = \left| f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant |f(x_0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

取 x_0 为 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最小值点，即当 $x\in[0,1]$ 时有 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$，从而有

$$\int_0^1 |f(x_0)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$|f(x_0)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x,$$

因此

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [|f(t)| + |f'(t)|]\mathrm{d}t$$

注 ① 例 1 说明由变限积分等式求被积函数表达式，一般要先求导，转化为微分方程，再求解 本题含两个参变量，相互独立，应分别求导

② 例 2 是个不等式的证明题，其中包含定积分，容易联想到要利用定积分的性质 由于不等式中出现 $f(x)$ 的形式，直接证不易入手，需要把 $f(x)$ 转换为定积分的表达形式，因而想到用变限积分表达它，即 $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t, x_0\in[0,1]$ 其实，这只不过是反用一下 Newton-Leibniz 公式（已知一个原函数，通过公式计算定积分，反过来，可用变限定积分表达一个原函数）

四、向量代数和空间解析几何

本单元考查重点是向量的基本运算（包括向量的线性运算，向量的数量积、向量积与混合积）；平面方程和空间直线方程的常见形式以及它们之间的相互关系；常见的二次曲面（球面、椭球面、柱面、锥面及抛物面等）方程及其图形

本单元试题类型：计算向量的数量积、向量积及混合积；求平面方程（常见的形式有点法式，截距式，一般式等）；求直线方程（常见的形式有标准式（对称式），参数式，一般式等）；利用向量运算考查平面与平面、直线与直线、直线与平面之间的夹角以及平行、垂直条件；点到平面的距离（考查二次曲面，主要结合多元微积分学内容进行，至于旋转曲面，有时单独命题）

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线,试证

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

分析 利用向量的向量积以及平行条件

证 必要性

设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,于是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

又由 $\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,得

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

故有
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

充分性

设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,则有$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,

同理得
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

故
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/\!/\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/\!/\boldsymbol{b},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/\!/\boldsymbol{c},$$

若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,与题设矛盾 因此,必有$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

例 2 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程,并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面方程

分析 由投影直线 L_0 的概念(过 L 作平面 $\pi_1\perp\pi$,则 π_1 与 π 的交线即 L 在 π 上的投影直线),先求出投影直线 L_0(可由不同途径求),再求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程

解法 1 设经过 L 且垂直于 π 的平面方程为 $\pi_1:A(x-1)+By+C(z-1)=0$,则由条件可知

$$\begin{cases}A+B-C=0(\text{因 }\pi_1\text{ 过直线 }L),\\A-B+2C=0(\text{因 }\pi_1\perp\pi)\end{cases}$$

$\Longrightarrow A\ \ B\ \ C=-1\ \ 3\ \ 2,$

于是 π_1 的方程为 $x-3y-2z+1=0$,从而 L_0 的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\x-y+2z-1=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x=2y,\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$$

由此可知 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为$x^2+z^2=4y^2+\dfrac{1}{4}(y-1)^2$,即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

解法 2 因直线 L 的方程可写为

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\y+z-1=0,\end{cases}$$

故过 L 的平面方程可设为

$$\pi_1:x-y-1+\lambda(y+z-1)=0,$$

即
$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0$$

因 $\pi_1\perp\pi$,故有 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-2$ 于是过 L 且垂直于π 的π_1 方程为 $x-3y-2z+1=0$,从而 L_0 的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\x-y+2z-1=0\end{cases}$$

(下同解法 1)

解法 3 记 L 的方向向量为$\boldsymbol{l}=\{1,1,-1\}$,$\pi$ 的法向量为$\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$,则过 L 且垂直于π 的π_1 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\{1,-3,-2\}$$

又因 π_1 过 L,从而过 L 上的点$(1,0,1)$,故 π_1 的方程为

$$(x-1)-3(y-0)-2(z-1)=0,$$

即

$$x-3y-2z+1=0,$$

故得 L_0 的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\x-y+2z-1=0\end{cases}$$

(下同解法 1)

注① 例 1 考查了向量的向量积运算及性质 在充分性的证明过程中,利用了反证法,这点非常重要,往往直接推不出结论时,用了它很奏效

② 理解投影的概念,直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_0,即过 L 作平面 $\pi_1\perp\pi$、π_1 与 π 的交线 空间点 M 在平面 π 上的投影点 M_0,即过 M 作直线 $L_1\perp\pi$、L_1 与 π 的交点 例如,设点 $M(1,-2,4)$,平面 $\pi:2x-3y+z-4=0$,求点 M 在平面 π 上的投影点 M_0 因 $L_1\perp\pi$,故 L_1 的方向向量可取 π 的法向量为$\{2,-3,1\}$,又 L_1 过 M,于是 L_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+2t,\\y=-2-3t,\quad t\text{ 为参数},\\z=4+t\end{cases}$$

代入 π 的方程(解出满足该方程的 t,即可得交点坐标),解得 $t=-\frac{4}{7}$,由 L_1 的方程,得交点 $M_0\left(-\frac{1}{7},-\frac{2}{7},\frac{24}{7}\right)$,即为所求的投影点 曲线$\begin{cases}x=2y,\\y=y,\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$绕 y 轴旋转一周所成的旋转面方程为 $x^2+y^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$,即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$ 曲线$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$,绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面为 $f(y,\sqrt{z^2+x^2})=0$

五、多元函数微分学

本单元考查重点:二元函数的连续性,偏导数的概念及计算,全微分的概念(含全微分存在的必要条件及充分条件),复合函数的偏导数,隐函数(包括方程组确定的隐函数)的偏导数,高阶偏导数(主要是二阶偏导数) 多元函数的极值和最值(含条件极值),曲面的切平面与法线,空间曲线的切线与法平面 关于二元函数 $z=f(x,y)$ 连续、可导(即偏导数存在)与可微(即全微分存在)的关系图示如下:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[4pt]\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{matrix}\right\rangle\text{连续}\Longrightarrow \mathrm{d}z\text{ 存在(可微)}\Longrightarrow\left\langle\begin{matrix}\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\text{ 存在(可导)}\\[4pt]f(x,y)\text{ 连续}\end{matrix}\right.$$

本单元试题类型:利用偏导数定义求函数在某点处的偏导数;考察分段函数在分界点处的可导性与可微性;求各种形式函数(复合函数,隐函数,含抽象函数的复合函数,由方程组确定的隐函数等)的偏导数;求全微分;计算二元函数的极值和最值(包括条件极值);求曲面的切平面与法线;求空间曲线的切线与法平面;求方向导数与梯度

例 1 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1,xy\neq0,\\0,xy=0\end{cases}$$

试证:函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续,但在该点处可导

分析 按函数连续定义及偏导数定义证之

证 由题设知 $f(0,0)=0$ 当沿 x 轴或 y 轴上的点$(x,y)\to(0,0)$时,有 $f(x,y)\to0$,而沿其他路径$(x,y)\to(0,0)$,有 $f(x,y)\to1$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在,从而知 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续

对于坐标轴上的点函数值为 0,即有

$$f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0,$$

于是

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

这说明 $f_x'(x,y)$ 及 $f_y'(x,y)$ 在点(0,0)处都存在,即函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可导

例 2 确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$

分析 记

$$\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\ u\Longleftrightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由此定出 λ 再由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,知 $\exists\, u=u(x,y)$,使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\Longrightarrow u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

解 令 $P=2xy(x^4+y^2)^\lambda$, $Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+2xy\cdot\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-x^2\cdot\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3,$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,得 $4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0$,即有 $\lambda=-1(x>0)$ 于是在右半平面内任取一点,例如取(1,0)作为积分路径的起点(曲线积分与路径无关),则得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C\\&=0-\int_0^y\frac{x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\int_0^y\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2}\right)+C\\&=-\arctan\frac{y}{x^2}+C\end{aligned}$$

例 3 设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的区域表示为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式

(2) 现欲利用此山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点 也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点,试确定攀登起点的位置

分析 利用梯度与方向导数之间的关系,沿梯度方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模 再利用 Lagrange 乘数法,解决欲求的条件极值问题

解 (1) $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathrm{grad}\ h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模,故

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$$

(2) 记 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$,由题意,欲求目标函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点

令 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$,则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, & ① \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0, & ② \\ L'_\lambda = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0 & ③ \end{cases}$$

由① + ②得

$$(x + y)(2 - \lambda) = 0 \Longrightarrow y = -x, \lambda = 2$$

若 $y = -x$,则由③得 $x = \pm 5, y = \mp 5$

若 $\lambda = 2$,则由①得 $y = x$,再由③得 $x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}$ 这样一来,就得到 4 个可能的极值点:

$$M_1(5, -5), M_2(-5, 5), M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$$

因为 $f(M_1) = f(M_2) = 450, f(M_3) = f(M_4) = 150$ 故 $M_1(5, -5), M_2(-5, 5)$可作为攀登的起点

注①例 1 说明函数 $f(x, y)$在点(0,0)处不连续,但在该点处可导(即 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$都存在) 也有的函数在一点虽连续但不可导,例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0), \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

在点(0,0)处连续,但不可导

事实上,因当$(x, y) \to (0,0)$时,有$|f(x, y)| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$,故

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0,0),$$

即 $f(x, y)$在点(0,0)处连续 因为

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| \sin \dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x},$$

故不存在,同理 $f_y'(0,0)$也不存在,即 $f(x, y)$在点(0,0)处不可导

对于一元函数,可导必连续,连续未必可导 对于二元函数,可导与连续,是两个独立的概念,可以毫无依赖关系,上述例子恰好说明这一情形

② 理解向量场 $\boldsymbol{A} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$为梯度场的充要条件为$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Longleftrightarrow \exists\, u(x, y)$,使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}$ 与积分路径无关 简言之,$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\, u \Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 这就是求解例 2 问题的关键.

③ 例 3 考查了方向导数与梯度的概念,沿梯度方向的方向导数最大,其最大值为梯度的模,一般当函数 $f(x, y, z)$可微时,$\mathrm{grad}\, f = \{f_x', f_y', f_z'\}$,$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = \boldsymbol{l}^\circ \cdot \mathrm{grad}\, f\Big|_{M_0}$,其中 $\boldsymbol{l}^\circ$表示 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量,或$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} \cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} \cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} \cos\gamma$,$\boldsymbol{l}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ $\mathrm{grad}\, f\Big|_{M_0}$ 为曲面 $f(x, y, z) = C$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的法向量.

利用 Lagrange 乘数法,处理条件极值问题,通常弄清什么是目标函数,什么是约束条件(有时还不止一个),这样就可构造 Lagrange 函数来求解 若从条件中解出单值函数比较容易,则可把条件极值化为无条件极值,使问题得以简化

六、多元函数积分学

本单元考查重点:二重积分的概念与性质,二重积分的计算方法(直角坐标系与极坐标系),三重积分的计算方法(直角坐标系,柱面坐标系与球面坐标系),二重积分与三重积分的应用(求平面图形的面积,体积,曲面面积,质量,重心,引力,转动惯量等) 两类曲线积分的计算方法,掌握 Green 公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求全微分的原函数 两类曲面积分的计算方法,Gauss 公式,Stokes 公式,会计算散度与旋度,曲线积分与曲面积分的简单应用(求弧长,质量,流量,引力,功等)

本单元试题类型:交换二次积分的积分次序,利用积分区域的对称性以及被积函数的奇偶性简化重积分的计算(含二