

● 古代科学史略丛书

中国古代数学史略

袁小明著



古代科学史略丛书

中国古代数学史略

袁 小 明 著

河北科学技术出版社

(冀)新登字004号

古代科学史略丛书
中国古代数学史略

袁小明 著

河北科学技术出版社出版发行(石家庄市北马路45号)

河北新华印刷三厂印刷 新华书店经销

850×1168毫米 1/32 5.375印张 310,000字 1992年5月第1版

1992年5月第1次印刷 印数: 1 4,500 定价: 4.50元

ISBN 7-5375-0563-2/K·7

出版者的话

我们伟大的中华民族，在悠远的历史长河中，对人类赖以生存的大自然，对浩渺无边的宇宙，历来就苦苦执著地追寻着、探索着。从最原始的神话传说，到四大发明的问世，我们的祖先用智慧和生命创造了中华民族古代科学技术的灿烂星河。据考证，先人们在治水、历算、大地测量、农业耕作、制陶、冶金等方面的成熟，均先于西方1000多年。我们的祖先为整个人类文明做出了卓越的贡献。

作为中华民族的子孙，我们有义务也有责任发掘整理这些宝贵遗产。

为弘扬中华国粹，重振中华雄威，以饕各专业研究人员和广大读者，我们特出版了中国古代科学史略丛书。这套书共包括《中国古代数学史略》、《中国古代物理学史略》、《中国古代化学史略》、《中国古代天文学史略》、《中国古代地理学史略》、《中国古代生物学史略》、《中国古代农耕史略》、《中国古代医学史略》等八部。

这套书不仅以大量翔实的史料，向读者介绍了各个学科的起源、发展和取得的辉煌成就，还阐述了中国古代科学技术在世界科学史上的地位和作用，是广大科技工作者必备的重要参考书。

这套书的诸位作者，多年从事自然科学史的研究和教学工作。他们用心用血用生命在中国古代浩瀚的典籍文献中追逐先人的足迹，发掘科学技术的宝藏。整个编写队伍历经五六年时间方完成全

部书稿的编写任务,其中有的已耗尽了毕生的精力。在此,我们向参与全书编写工作的同志致以衷心的感谢。

承蒙著名科学家卢嘉锡先生为本套书题词,特表谢意。

中国古代科学史略这套书,会集了我们祖先和当代学者孜孜不倦的进取精神,这便是我们的民族精神。我们弘扬国粹,就是弘扬这种进取精神,从而增强全民族的自信心和创造力,振兴当代科技,振兴中华。

谨以此书献给伟大的祖国,献给勤劳智慧的中华民族。

1989年6月

前言

中国古代数学史是中国古代科学技术史中最具有独立性和系统性的门类之一。从有文字可查的时代算起,它也该有三四千年的历史。在这漫长的时间里,中国古代数学以其独特的计算、推理、论证以及理论形式,反映了中国古人的数学思想及其形式特征。学习和了解中国古代数学史不仅有助于培养民族自尊心和爱国热情,更有助于了解中国古代数学赖以生存和发展的社会背景和文化背景,并在中外和古今比较中加深对现代中国数学的认识。

本书作为中国古代科学史略丛书之一,着重介绍中国古代数学的基本面貌,包括它的内容、方法、理论形式及其特点;介绍中国古代数学的产生、发展以及演变的基本过程。既充分肯定和发扬它的成就,也不回避它的缺点和不足。但无论是成就还是不足之处,对于今天的人们来说都是最可宝贵的。可惜由于篇幅和本人的学术水平所限,这方面做得都还很不够。

中国古代数学原则上是指西方近代数学在中国最终确立之前的那段历史时期的数学。从时间上说,它包括从远古到1919年五四运动之前的整个年代。这段历史时期的中国数学大致可以分成六个环节,即知识积累、理论奠定、理

论充实、理论发展、理论衰落和中西会通。六个环节各有其大致相应的历史时期，它们从一个侧面反映了数学同社会政治、经济、文化等方面的关系。这样的分环节叙述虽然不是严格意义下的中国古代数学史的分期，但它既有利于现代人对中国数学历史发展自然过程的认识，也不致与严格的分期方法产生矛盾。

利用现代数学概念对中国数学史进行研究和整理，从而使中国数学史的研究建立在现代科学方法之上的学科奠基人是李俨、钱宝琮和严敦杰。他们在中国古代数学史结束不久便开始了对这一丰富历史成果的发掘、整理和研究。正是由于他们的开创性研究，才有半个多世纪来中国数学史研究的丰硕成果。本书得益于他们以及在他们带领下新一代数学史研究工作者众多研究成果。在本书完成的时候，我要感谢多年来曾给予我诸多帮助的前辈和同事。谨以此帙奉献给敬爱的师友，以表寸怀。

袁小明

1990年4月

目 录

第一章 数学知识的早期积累(秦以前).....	(1)
第一节 数字与记数法.....	(1)
第二节 算术.....	(6)
第三节 数的概念的扩展.....	(12)
第四节 图形知识.....	(15)
第五节 《墨经》中有关数学的定义(早期数学逻辑形式)	(20)
第二章 系统数学理论的奠定(秦汉时期).....	(23)
第一节 算书的出现和理论的建设.....	(23)
第二节 理论体系的典范:《九章算术》.....	(25)
第三章 数学理论的充实(从三国到唐末).....	(49)
第一节 赵爽与刘徽.....	(49)
第二节 祖冲之与祖暅.....	(66)
第三节 数学教育与算经十书.....	(71)
第四节 天文、历法中的数学成就.....	(78)
第五节 中印数学间的影响.....	(81)
第四章 数学理论的发展(宋元时期).....	(84)
第一节 宋元数学概况.....	(84)
第二节 高次方程数值解法——增乘开方术与正负开方术	(87)
第三节 列方程解应用题——天元术和四元术.....	(95)
第四节 高阶等差数列——垛积术和招差术.....	(103)
第五节 同余式理论——大衍求一术.....	(112)

第六节	其他成就	(114)
第五章	传统数学的沉寂和复苏(明代到清中期)	(119)
第一节	传统数学的沉寂	(120)
第二节	珠算等实用数学的发展	(122)
第三节	西方数学的传入	(125)
第四节	中西会通	(130)
第五节	传统数学的整理和研究	(135)
第六章	近代数学的确立(清晚期至“五四”运动)	(141)
第一节	西方数学著作的再翻译	(141)
第二节	中国学者对近代数学的研究	(149)
第三节	近代数学教育	(159)

第一章 数学知识的早期积累

(秦以前)

一般来说,一门学科的历史应该从它的萌芽时期说起,但这不是一件容易的事。就数学来说,对什么是数学的萌芽就很难有一致的认识。至于具体的问题,如中国古代数学是从什么时候开始萌芽的?我们远古时代的祖先是从小时候,又是怎么样形成数的概念和形的概念的?那就更无法确切地回答了。正因为这样,我们这本书采取从确有记载的数学知识的出现开始说起,并将理论体系形成之前的那个历史阶段称之为数学知识的早期积累时期。

由此而言,数学知识早期积累时期的中国古代数学,大致包括以下五个方面的内容:数字和记数方法;筹算术;数的概念的扩展;图形知识;定义与命题——数学逻辑形式的萌芽。这五个方面后来以数与形两条认识渠道,得到充实与发展,为数学系统理论的产生奠定基础。

第一节 数字与记数法

数字在中国的最早出现,是在新石器时代的晚期,距今大约六千年。在这之前和同时,我们的祖先采用“结绳”、“契木”等办法来表示数的概念,实现记数,即所谓的“结绳记事”、“契木为文”的传说。这种情况在世界的其他一些民族中也有发生,有的甚至到近代还保存着结绳记数的方法。

契木或其他形式的刻划记数是数字产生的基础。当人们觉得可以通过按某种规则的刻划来表达数的时候,数字也就自然而然地产生了。

根据现有的资料来看,最迟在半坡时代我国已经有了可以称得上数字的刻划符号,如:




×	∧	+)C		
5	6	7	8	10	20

后来的考古发现,除了进一步加强了上述考证外,还充实了一些数字。如,与半坡遗址差不多时代的陕西姜寨遗址中出现了“一”(1)、“川”(30);距今四千年前的上海马桥遗址出现了“+”(5);稍晚的山东城子崖遗址中出现了“|=”(12)、“U”(20)、“∪”(30)。这种合写形式的出现不仅标志了数的概念的发展和表数能力的提高,而且证实了十进制记数法已经使用。

进入商代以后,随着农业成为社会生产的主要成分,手工业的分工和商业的产生,相应地产生了高度发展的殷商文化。这时,已有了所谓“卜、史、巫、祝”这样的文化官。他们作为国家的管理人员,负责记人事,观天气与熟悉旧典。专职书记人员的出现,使得原先零星粗疏的表数符号得到提炼和整理,进而创设出系统数字和记数法来。商代产生的甲骨文数字(见图1-1)就是现在所知的我国最早的完整记数系统。

甲骨文是商周时代刻在龟甲兽骨上的文字,是“巫”、“史”们为商王室占卜记事的主要手段。从现在发现并已认识的1700多个甲骨文字中,能够清理出整套记数文字,其中有13个记数单字,如图1-2所示。前9个是数字,后4个是位值符号。与其他甲骨文字一样,甲骨文数字采用了会意、形声、假借等比较进步的文字构造

法^①说明它是一种具有严密文字规律的古文字。






甲骨文记数系统属于现在的十进制乘法分群数系。这种数系由1至9九个数字和若干十进制的位值符号组成，记数时先将两组符号通过乘法结合起来以表示位值的若干倍^②，如图1-3所示。然后将分群后的位值符号组合（相加）起来，达到完整表数的目的。例如，千，表示673；，表示2356等等。

甲骨文记数方法一直沿用到现代，期间字体虽有变化，但记数原则不变，仍然是乘法分群原则。图1-4列出的是历代记数符号，将商代甲骨文、周代金文、秦代篆文以及现代数字加以比较和分析，从中可以发现一些变化规律。



图1-1 殷墟甲骨上数字

^① 参见钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社，1964年，第5页。

^② 也有例外，如 (20)、 (30)、 (40)是重复书写 (10)这个符号，或者说是把 (10)这个符号用加法相结合来表达的。

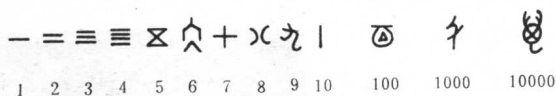


图 1-2 甲骨文中的记数单字



图 1-3 甲骨文记数系举例

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	50	60	100	500	10 ³	10 ⁴	81	
商代甲骨文	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
西周金文	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
秦代篆文	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
汉代算筹	纵式	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
	横式	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
宋代算筹	纵式	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
	横式	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
商业数码	—	≡	≡≡	≡≡≡	⊗	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
现代文	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十											

图 1-4 历代记数符号

周代金文记多位数的方法，原则上与甲骨文一样，如 659，记作“⊕又⊕又⊕”。其中“又”是又字，写在数字之间起隔开位值的作用，这在商代甲骨文记数中已有出现，因此，实质性差异仅是 50 的写法不同，金文是“⊕”，甲骨文是“⊕”。汉代以后，多位数记法废弃了用“又”字隔开的做法，位值的倍数也不采取合写，而是采取位值符号紧接在数字后表示，如 300，不写成“≡≡”，而写成三百。但记数系统仍是乘法分群系，如 2356，被写成二千三百五十六。

现代中国数字实际在唐朝以前已经形成。由于这 10 个字简单

明了,我国少数民族记数时也常采用它,或者把这 10 个数字稍作变动。北京图书馆藏有一本苗文的历书,全部用了汉文的 10 个数字,并且以两个十作二十、三个十作三十^①(见图 1-5)。唐代还全面使用了所谓大写数字,即:

壹 贰 叁 肆 伍 陆 柒 捌 玖 拾

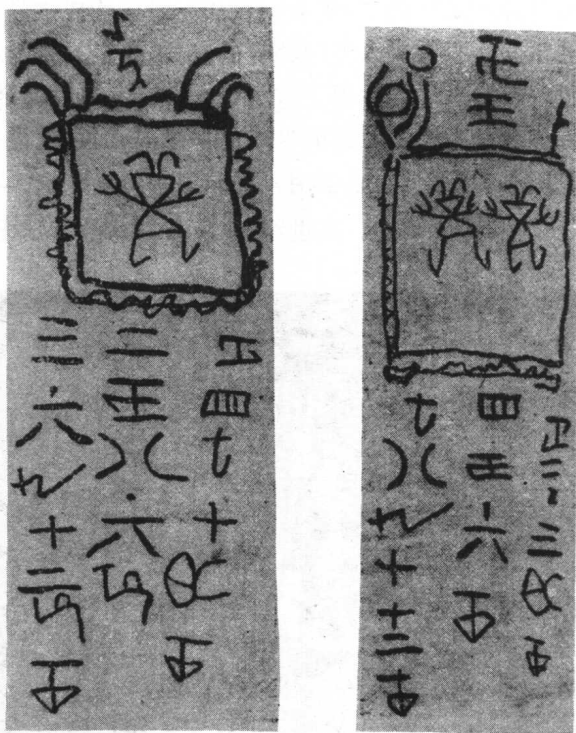


图 1-5 苗文历书内记录的汉文数字

大写数字常出现于比较严肃的场合,所以后来人们把这些大写数

^① 参见严敦杰:“中国使用数码字的历史”,《科技史文集》第 8 辑,上海科学技术出版社,1982 年。

字叫做“官文书数目字”。

第二节 算 术

一、算筹与筹算

记数与计算不是一回事,单有记数法不足以构成数学。数学至少是计算的学问。只有进入专门的算的实践,揭示其规律,总结出技术,进而形成理论,才能称得上有了算术——一种初级的数学理论。中国古代数学是随着算筹的发明而形成的。算筹,简称“算”、“筹”、“策”等,亦称“筹策”,是中国古代用于计算的工具。一般用竹制成,也有用铁制或骨制的。本世纪 70 年代以来陆续出土了一批

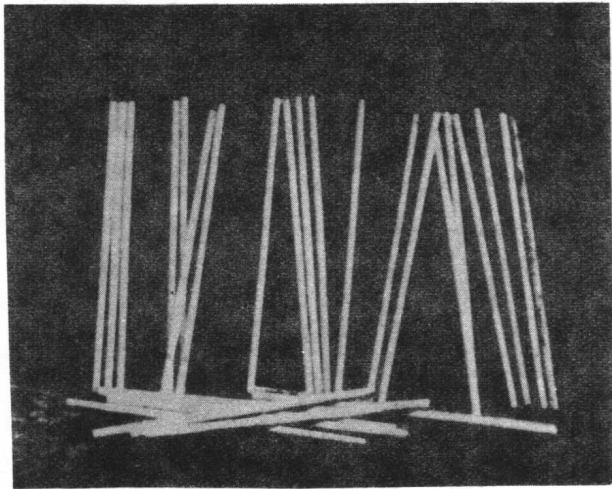


图 1—6 陕西旬阳出土的西汉象牙算筹

算筹,形状大小与文献资料记载相仿。汉代算筹(见图 1—6)大约长 13 厘米,径粗 0.3 厘米。算筹太长太细不便运动,所以后来的算筹逐渐改短,增粗。横截面形状也有圆形变为正三角形或正方形

的。

算筹产生于何时,至今未能有一个比较确切的说法。有的说“大约从西周开始已使用竹筹,在毡毯上或在算板上进行各种运算”,有的则说算筹是长期演变而成的,至迟在西汉时已普遍使用。”各种说法在措词上都比较慎重,时间幅度也很大,彼此互不矛盾。因此大约可以认为,算筹作为人造计算工具的产生是在西周或更早些,而普遍深入使用是在秦汉。

用算筹摆成数字进行计算称之为筹算。所以“算术”的原义是指筹算的技术。这本是中国数学特有的名称,现在涵义有了变化。算术这一名称恰当地概括了中国数学依赖于算筹,以算为中心的特点。从一定意义上说,中国古代数学史就是中国筹算史。

二、四则运算

筹算数目是由算筹摆出来的,9个基本数的摆法有两种,一种是纵式,一种是横式,如图1-7所示:



图1-7 9个基本数的摆法

在这基础上,利用位值原理和纵横相间的办法可摆出一切多位数。例如,248可摆成 || ≡ |||, 6803可摆成 ⊥ ||| |||, 其中空位处表示零。可见,我们中国很早就发明和使用十进制地记数法了。把筹的排列形式记下来,就成为算码。明代珠算盛行以后,筹算逐渐淘汰,这时,筹算算码在数学中起了很大的作用。

与笔算一样,筹算的基础是加减乘除四则运算。筹算四则运算的程序与珠算基本相同。加减法最简单,摆上两行数字,从左到右逐位相加或相减就可以了。乘除法也不难,基本过程仍然是放筹与

运筹两个。乘法分三层放筹，上下层放乘数（无被乘数与乘数之区别）中间放积。运筹时由上层乘数的高位起乘下层乘数，乘完后去掉这位的算筹，再用第二位数去乘，最后将逐次相乘之积的对位上的数相加即可。例如：

36×28 ，筹算过程如图 1-8 所示。

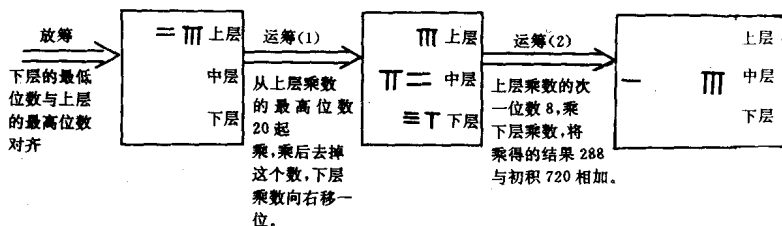


图 1-8 乘法的筹算过程

筹算把除法看作乘法的逆运算，如《孙子算经》所说：“凡除之法，与乘正异”。基本步骤也是放筹与运筹。放筹时也分三层，上层放商，中间放被除数（古时称实），下层放除数（古时称法）。除数摆在被除数够除的那一位之下，除完向右移动，例如， $4391 \div 78$ ，筹算过程如图 1-9 所示。

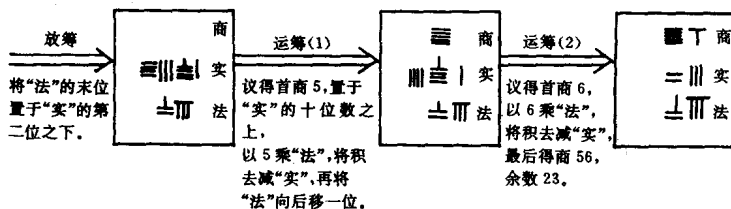


图 1-9 除法的筹算过程

乘除运算需要口诀，古时称之为“九九表”，从“九九八十一”起到“二二得四”止，共 36 句。没有“一九如九”到“一一如一”等九句，