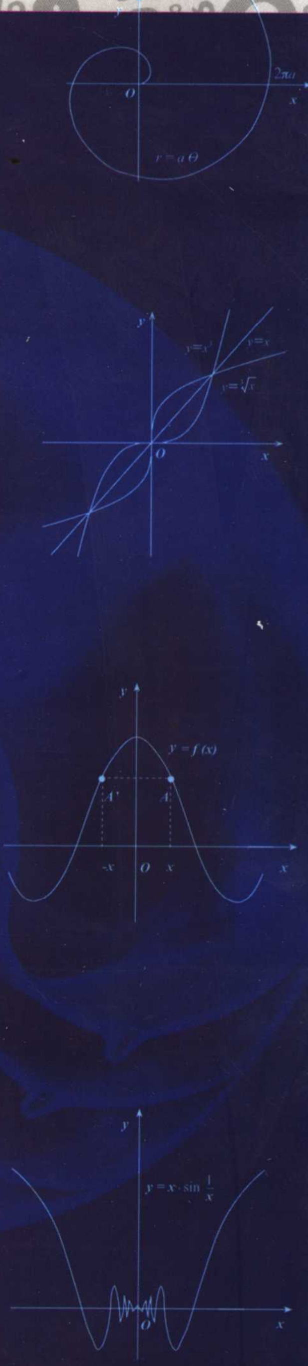
广东高等教育出版社

陈文立 著

新微积分学

New Calculus



上册

- 严格而又简捷明快的非ε语言极限理论
- 全新而又易于理解的微积分学习体系

New Calculus

新微积分学

（上册）

陈文立 著

Guangdong Higher Education Press
广东高等教育出版社
· 广州 Guangzhou ·

图书在版编目（CIP）数据

新微积分学：上册/陈文立著．—广州：广东高等教育出版社，2005.12
ISBN 7-5361-3183-6

Ⅰ．新… Ⅱ．陈… Ⅲ．微积分 Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 039823 号

出版发行：广东高等教育出版社
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500 电话：(020) 87557232，87550735
http：//www.gdgjs.com.cn

印　　刷：江门市新教彩印有限公司

开　　本：889 mm×1 194 mm　1/16
印　　张：12.25
字　　数：292 千
版　　次：2005 年 12 月第 1 版
印　　次：2005 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：1～2 000 册
定　　价：21.80 元

非 ε 极限理论与微积分的教学改革*

Non - ε Limit Theory and Teaching's Reform of Calculus

——代　　序

非 ε 极限理论是中国科学院院士张景中在《教育数学探索》[1]中提出的讲述极限概念的新理论. 这个理论针对大学数学教学中极限理论这个难点，提出了"非 ε 极限理论"方案，以改进微积分的教学. 所谓非 ε 极限理论，就是用科学严谨而又易于向学生讲述极限概念的一种理论. 这种理论不讲述 ε 语言，讲述方式也不同于 ε 极限理论由极限到无穷小到无穷大的次序，而是按从无穷大到无穷小到极限的次序来讲述极限理论. 本文讨论了非 ε 极限理论被提出的缘由、理论体系，同时还介绍了第二作者根据这种理论编写的教材：《新微积分学》[2]及其在教学中的实践效果.

1. 非 ε 极限理论被提出的缘由

17 世纪末由 Newton、Leibniz 创建的微积分理论，不仅是数学史上的分水岭，而且是人类文明史的一件大事. 其后，经过不少数学家，特别是 Cauchy、Weierstrass 等的不懈努力，通过严密的逻辑推导，利用"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"语言对于极限概念"给出了纯粹算术化的表述"，并建立起连续性、可微性、敛散性等概念，完成了被称为"分析的算术化"的 ε 极限理论，给微积分理论以坚实的理论基础. 但是，在我们用"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"语言讲述极限概念时，正如张景中院士在《教育数学探索》[1]中所指出的："用 ε 语言定义极限，逻辑结构显得相当复杂"，……"用数理逻辑的符号表示，就是

$$\text{“}\lim_{n\to+\infty} a_n = a\text{”} =_{df} \text{“}(\exists a)(\forall \varepsilon>0)(\exists N>0)(\forall n\geqslant N)(|a_n-a|<\varepsilon)\text{”}.$$

这里包含了四个层次，是学生从来没有遇到过的具有如此复杂逻辑结构的定义!"我们不可能向大多数学生解释清楚：为什么要用这种复杂的方式来定义极限?

如《教育数学探索》[1]中所指出的："一百多年来 ε 语言始终占据着微积分的课堂. 要真正掌握微积分的原理，就不可能不过这个 ε 关. ……就是数学专业，也把它当作教学上的重点与难点."正因为这一点，著名的美国教材《微积分》[3]在讲授极限概念时，由于无法简化其结构而讲清楚这个概念，就只能要求学生"像背诗一样把它背下来"，"这样做，至少比把它说错来得强!"

我们认为，致使微积分学习的难点还在于其概念先用 ε 语言定义极限，后定义无穷小和无穷大. 我们知道，人类首先认识了数 1，接着认识"多"、2、3、……以及加法等等，然后才认识到减法、乘法、除法以及分数和 0 等等. 我们看到，在数系及其运算的发展中，总是先有积累，后有分解，先有加法，后有减法；先有乘法，后有除法. 对于无穷的概念，人们也是先正确地认识了无穷大，然后经过很多周折才正确地认识无穷小.

在数学史上，人类认识无穷大可以追溯到很早，对于正整数而言，尽管每一个具体的数

---

* 此文已于2004年10月在《大学数学》(第20卷第5期) 上发表，作者：张景中，陈文立.

都是有限的，但整个正整数序列是无限的：在任一正整数 n 之后，总有一个正整数 $n+1$ 存在. 我们可以说，正整数序列是人类认识无限，认识无穷大的最早、最简单的实例. 又如在 Euclid 的《几何原本》中，第八篇的命题20："素数的数目比任何指定数目都要多."换言之，素数的个数是无穷的. 再如，在中国古代的寓言"愚公移山"中，就已经蕴涵着朴素的无穷大思想. 我们还要指出，在语句 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 与 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to a$ 中，$n\to+\infty$ 的记号"∞"，则是一个在此之前并没有定义而只是在潜意识中默认了存在的无穷大.

然而，人们对无穷小的概念的重要性的认识是在 17 世纪创建微积分理论时才开始的：函数在某点的导数是两个无穷小量之比，因此微积分也叫做无穷小分析. 而对无穷小概念的正确理解，由于其与数字零的概念的混淆，则是经过了长期的周折的. "第二次数学危机"中 Berkerey 主教对无穷小的攻击及关于"无穷小究竟是什么"的论争，以及其后的"极限理论的算术化"，都反映了人类对无穷小的认识的长期性和复杂性. 这说明正确认识无穷小的意义是多么困难的事.

由此可见，ε 极限理论采取的"先无穷小、后无穷大"方式建立的极限理论，并不符合人类社会的"先无穷大、后无穷小"的认识过程，这也是学生不易接受的一个原因.

2. 非 ε 极限理论的理论体系

非 ε 极限理论则完全避免了这个困难. 我们基于"先无穷大、后无穷小"方式，采取了："(递增＋无上界)标准无穷大→无穷大→标准无穷小→无穷小→(常数＋无穷小)极限"的方式建立了新的极限理论. 下面我们将对数列的极限、函数的极限、多元函数的极限等概念的建立分别加以介绍：

A. 数列极限的定义

在《教育数学探索》[1]、《新微积分学》[2]中，我们首先给出了无界以及递增等为人们所熟知的、易为学生接受的概念，然后就按无穷大列—无穷小列—数列极限的顺序给出了非 ε 方式的数列的极限概念.

定义 A.1 设 $\{D_n\}$ 是一个单调递增的正数列，如果它也是无上界的，则称 $\{D_n\}$ 是一个标准无穷大.

定义 A.2 设 $\{a_n\}$ 是一个无穷数列，若有一个标准无穷大 $\{D_n\}$，使得对一切 n 总有 $|a_n|\geqslant D_n$，则称 $\{a_n\}$ 是无穷大.

定义 A.3 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果有一个标准无穷大 $\{D_n\}$，使 $a_n=\dfrac{1}{D_n}$，则称 $\{a_n\}$ 是标准无穷小.

定义 A.4 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果有一个标准无穷小 $\{\alpha_n\}$，使得 $|a_n|\leqslant\alpha_n$，则称 $\{a_n\}$ 是无穷小.

定义 A.5 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果存在一个常数 A 和一个无穷小 $\{\gamma_n\}$ 使 $a_n=A+\gamma_n$，则称 $\{a_n\}$ 以 A 为极限.

B. 函数极限的定义

在讨论函数 $f(x)$ 的极限时，关键在于 $x\to a$ 时的极限的定义. 为此，我们首先定义双向递增的概念，然后再按相同的方式定义其极限.

定义 B.1 设 $f(x)$ 定义在去心邻域 $U_a^0(\delta)=(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)(\delta>0)$ 上，$\forall x_1,\ x_2\in U_a^0(\delta)$，当 $|a-x_1|<|a-x_2|$ 时都有 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$，我们就称 $f(x)$ 在 $U_a^0(\delta)$ 上是双

向递增的.

定义 B.2 设$f(x)$定义在$U_a^0(\delta)$上，如果$f(x)>0$在$U_a^0(\delta)$上既是双向递增，又是无上界的，我们就称$f(x)$是$x\to a$时的标准无穷大.

定义 B.3 设$f(x)$定义在$U_a^0(\delta)$上，如果有一个在$U_a^0(\delta)$上的标准无穷大$D(x)$，使得对$U_a^0(\delta)$上的一切x都有$|f(x)|\geqslant D(x)$，则称$f(x)$是$x\to a$时的无穷大.

定义 B.4 设$f(x)$定义在$U_a^0(\delta)(\delta>0)$上，如果有一个在$U_a^0(\delta)$上的标准无穷大$D(x)$，使得对$U_a^0(\delta)$上的一切x都有$f(x)=\dfrac{1}{D(x)}$，我们就说$f(x)$是$x\to a$时的标准无穷小.

定义 B.5 设$f(x)$定义在$U_a^0(\delta)(\delta>0)$上，如果有一个在$U_a^0(\delta)$上的标准无穷小$\alpha(x)$，使得对$U_a^0(\delta)$上的一切x都有$|f(x)|\leqslant\alpha(x)$，则称$f(x)$是$x\to a$时的无穷小.

定义 B.6 设$f(x)$定义在$U_a^0(\delta)(\delta>0)$上，如果有一个实数A和一个$U_a^0(\delta)$上的无穷小量$\gamma(x)$，使得$f(x)=A+\gamma(x)$，则称$f(x)$是当$x\to a$时以A为极限.

C. **多元函数的极限**

在讨论多元函数$W=f(P)=f(x,y)$的极限时，关键也在于$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时的极限的定义. 为此，我们首先定义了全向递增的概念，然后再按相同的方式定义其极限.

定义 C.1 设$W=f(P)$定义在P_0的去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，若$\forall P_1,P_2\in U^0(P_0,\delta)$，当$|P_0-P_1|<|P_0-P_2|$时，有$f(P_2)\leqslant f(P_1)$，我们称$f(P)$当$P\to P_0$时全向递增.

定义 C.2 设$W=f(P)>0$定义在P_0的一个去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，如果$f(P)$在$U^0(P_0,\delta)$上是全向递增无上界的，我们称$f(P)$是$P\to P_0$时的标准无穷大.

定义 C.3 设$W=f(P)$定义在P_0的去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，若有一$U^0(P_0,\delta)$上的标准无穷大$D(P)$，使得对$U^0(P_0,\delta)$上的一切点P都有$|f(P)|\geqslant D(P)$，则称$f(P)$是当$P\to P_0$时的无穷大.

定义 C.4 设$W=f(P)$定义在P_0的去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，若有一$U^0(P_0,\delta)$上的标准无穷大$D(P)$，使得对$U^0(P_0,\delta)$上的一切的点P都有$f(P)=\dfrac{1}{D(P)}$，则称$f(P)$是当$P\to P_0$时的标准无穷小.

定义 C.5 设$W=f(P)$定义在P_0的去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，若有一$U^0(P_0,\delta)$上的标准无穷小$\alpha(P)$，使得对$U^0(P_0,\delta)$上的一切的点P都有$|f(P)|\leqslant\alpha(P)$，则称$f(P)$是$P\to P_0$时的无穷小.

定义 C.6 设$W=f(P)$定义在P_0的去心邻域$U^0(P_0,\delta)$上，若存在一个常数A与无穷小$\gamma(P)$，对于$U^0(P_0,\delta)$上的点P有$f(P)=A+\gamma(P)$，则称$f(P)$在$P\to P_0$时以A为极限.

在《教育数学探索》[1]中，已经证明了关于数列的极限的非ε极限方式的定义与ε极限方式的定义的等价性. 关于函数一元或者多元极限的非ε极限方式的定义与ε极限方式的定义的等价性也是不难证明的.

3. 非ε极限理论的实现——《新微积分学》的教学实践

基于上述非ε极限理论体系，我们编写了《新微积分学》[2]一书，对微积分的教学进行教学改革实验. 从2001年开始，在广州大学计算机系的2001级4班，2002级3、4班与

2003 级 3、4 班试用了三届，取得了明显的效果.

在实验中，学生们没有像以往用 ε 极限理论教材学习时对 ε 所产生的疑惑，普遍感到这种从无穷大到无穷小到极限的定义方式是“顺理成章”的. 有的学生还能总结出证明极限存在的方法：欲证 $x\to a$ 时 $f(x)\to A$，需证 $|f(x)-A|$ 是无穷小，因而需证存在标准无穷小，使 $|f(x)-A|\leqslant\alpha(x)$，需证存在标准无穷大 $D(x)$，使 $\alpha(x)=\dfrac{1}{D(x)}$，等等.

考试成绩也能说明问题. 这三个年级学生的考试平均成绩都在 75 分左右，补考人数也不多. 从下表可以看出：

班　　级	人　数	平均成绩	补考人数
2001 级 4 班	45	75.3	3
2002 级 3、4 班	93	78.1	0
2003 级 3、4 班	75	77.5	4

《新微积分学》的教学改革也引起了国内同行的关注，不少学校都主动索要该书. 现此教材已由广东高等教育出版社正式出版——即本书（上、下册）.

参考文献

[1] 张景中. 教育数学探索. 成都：四川教育出版社，1994

[2] 陈文立. 新微积分学（上、下册）. 广州：广东高等教育出版社，2005（即本书）

[3] M. Spivak. 微积分. 北京：人民教育出版社，1980

前　言

本书是根据作者近十年来在重庆师范大学、广州大学讲授微积分课程的讲义修改、整理而成的. 它是一项基于张景中院士的教育数学思想改革微积分教学的成果，也是国家教育部“高师数学改革计划”JS148B项目组的一项成果.

作为大学微积分（数学分析、高等数学）教材的《新微积分学》，本书的主要特点就在于它基于张景中先生的教育数学理论①和本书作者提出的“学生数学思维结构形成进化论”②的“新”：微积分教学内容上的创新、教材结构的创新和编写的创新.

教育数学是张景中先生创造性地提出并积极倡导的一个全新的理论. 它基于数学教育的需要，对数学研究成果及数学教材进行学科内容和结构上再创造式的加工、整理，从而提供对数学课程、教材进行有效改革的材料.

而“学生数学思维结构形成进化论”，则主张在数学教学过程中，应该使学生学习数学的过程与数学的发现过程同步，这样就能够使学生的数学思维结构的形成、发展与数学的思维结构（即数学家的思维结构）相似、接近.

本书的这种微积分教学的改革、创新，主要反映在以下三方面：

第一，本书的微积分教学内容上的创新，是以“非 ε 语言极限理论”与“连续归纳法”为基础，对极限、连续理论的教学的改革.

对于无穷、极限概念的认识，人们先通过对自然数的正确认识而逐渐认识了无穷大，然后经过很多周折才正确地认识无穷小和极限. 但是，传统微积分教材的极限理论则是先用逻辑结构相当复杂的 ε 语言定义极限，后定义无穷小和无穷大，这成为了大学数学教学长期存在的难点.

因此，根据张景中先生在教育数学理论中提出的“非 ε 语言极限理论”方案，本书采取了与数学的发现过程同步的“**（递增＋无上界）标准无穷大→无穷大→标准无穷小→无穷小→（常数＋无穷小）极限**”方式建立了新的极限理论体系③.

而关于实数的连续性公理及其等价命题都是微积分教学的难点，张景中先生针对这个难点，在教育数学理论中提出了关于实数理论的“连续归纳法原理”. 它可以作为统一模式推出已知的一系列关于实数的定理；还可以作为统一模式证明微积分中涉及连续性的各个命题. 本书也据此将其作为刻画实数连续性的公理，这些都是传统微积分教材所没有的，这是本书的重要创新.

这些主要表现在本书的第二章：“从无穷大到无穷小：极限”.

第二，本书教材结构的创新，在于微积分概念引入的“先积分，后微分”方式，也在于微积分运算的“先微分，后积分”方式.

早在古希腊时代，Archimedes 为解决抛物线弓形的面积问题而使用了穷竭法. 产生了积

---

① 张景中. 教育数学探索. 重庆：四川教育出版社，1994

② 陈文立. “新数学”运动及其对数学教育改革的启迪. 数学教育学报，1995年3期

③ 张景中，陈文立. 非 ε 极限理论与微积分的教学改革. 大学数学，2004年5期（20）卷

分概念的萌芽. 但直到17世纪，Newton和Leibniz在总结前人有关工作的基础上才各自从运动问题与几何问题中建立了积分概念，发现了称为微积分学基本定理的Newton－Leibniz公式，从而使微积分成为一门新的数学学科.

沿着微积分的历史轨迹，根据张景中的教育数学理论中提出的面积方法，本书从计算抛物线弓形的面积出发，利用对曲边梯形面积的“内填外包”，由内积分与外积分而引入了（定）积分概念及基本性质，再通过对变上限积分的讨论得出微积分基本定理，从而引入了导数概念. 这样，我们就构建了一个全新的微积分体系. 这是本书的另一重要创新.

这些主要表现在本书的第三章：“从积分到微分：微积分的基本概念”和第四章：“从微分到积分：微积分的运算”.

第三，根据教学实践改革完善教材，实行教材编写的创新：

1. 类似于“数学归纳法”与“第二数学归纳法”的关系，本书提出了“第二连续归纳法”，从而简化了对闭区间上连续函数性质的证明.

2. 本书采取以曲线$y=\frac{1}{t}$为曲边，与$t=1$，$t=x$和t轴为边的曲边梯形的面积来定义自然对数：$y=\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t$. 以其反函数定义指数函数：$y=\mathrm{e}^x$. 这种相当严谨的定义方法也是其他微积分教材少见的.

3. 由于Newton－Leibniz公式已经在引入微积分概念时讲述，本书不仅在讲述积分的运算方法时，将定积分与不定积分联合讲授，而且使微分方法与有关的积分方法形成密切联系，如学习了微分法中的复合函数的求导法则之后，在下一节就学习积分法中的换元法等.

本书的编写、实验得到张景中院士的大力支持与帮助，在此对他表示衷心的感谢。

本书的错误在所难免，请不吝予以指正. 本人的电子邮箱是：

cwl400420@sina.com

2005年8月10日

目 录

第一章 从常量到变量：函数 …… (1)
§1.1 集合及其运算 …… (1)
§1.2 实数集 …… (3)
§1.3 映射与函数 …… (6)
§1.4 函数的有关属性 …… (12)
习题一 …… (19)

第二章 从无穷大到无穷小：极限 …… (22)
§2.1 无穷大列与无穷小列 …… (22)
§2.2 数列的极限及其基本性质 …… (27)
§2.3 函数的极限 …… (35)
§2.4 函数极限的性质 …… (42)
§2.5 函数的连续性和连续函数的基本性质 …… (49)
§2.6 实数的连续性与闭区间上连续函数的性质 …… (54)
习题二 …… (61)

第三章 从积分到微分：微积分的基本概念 …… (67)
§3.1 面积与积分 …… (67)
§3.2 函数可积的条件 …… (71)
§3.3 积分的基本性质 …… (74)
§3.4 变上限积分与导数 …… (76)
§3.5 对数函数与指数函数 …… (81)
习题三 …… (86)

第四章 从微分到积分：微积分的运算 …… (89)
§4.1 导数与微分 …… (90)
§4.2 基本微分方法 …… (94)
§4.3 基本积分方法 …… (101)
§4.4 特殊微分方法 …… (114)
§4.5 特殊积分方法 …… (121)
习题四 …… (127)

第五章 从理论到实践：微积分的应用 …… (134)
§5.1 微分中值定理 …… (134)

§5.2 L' Hospital 法则 …………………………………………………………………… (138)
§5.3 函数的单调性和极值 …………………………………………………………… (142)
§5.4 函数的凸凹性、拐点、渐进线及其图形 ……………………………………… (147)
§5.5 最大值、最小值问题 …………………………………………………………… (154)
§5.6 平面图形的面积与弧长 ………………………………………………………… (157)
§5.7 旋转体的体积与侧面积 ………………………………………………………… (163)
§5.8 积分在物理学上的应用 ………………………………………………………… (166)
§5.9 广义积分 ………………………………………………………………………… (169)
习题五 ………………………………………………………………………………… (172)

习题参考答案 ……………………………………………………………………… (177)

第一章　从常量到变量:函数

在我们的生产、经营、科研乃至日常生活中，经常会遇到各种各样的量，如运动物体的质量、速度、时间和距离；经济工作中的成本、税收和利润；生活中的温度、湿度和空气污染指数等等. 在通过建立数学模型，用数学理论去处理这些问题时，往往需要我们撇开这些量的物质意义而用数把它们反映出来. 这些量一般分为两类：一类是在所参与的过程中保持不变的量，我们称之为常量；一类是在所参与的过程中变化的量，我们称为变量. 随着人类社会的进步，科学技术的发展，人们对量的研究从集中于对静态的常量的研究转换为集中于对动态的变量以及变量之间的相互依赖关系 —— 函数关系的研究. 正如 Engels 所指出的，“数学中的转折点是 Descartes 的变量. 有了变量，运动进入了数学；有了变量，辩证法进入了数学；有了变量，微分和积分也就立刻成为必要的了.”

《新微积分学》是一本以微积分理论为主体的高等数学教材. 因此，首先需要对微积分理论的基础 —— 函数及其基本性质适当地加以回顾和提高. 这种提高表现在我们是在近代数学的基石 —— 集合与映射的基础上对其进行讨论的.

§1.1　集合及其运算

一、集合与元素

集合是数学中最基本的概念，它不能定义，只能描述. 所谓集合，就是一些事物的总体. 组成集合的事物称为该集合的元素. 集合的重要特征之一是它是确定的，即我们可以判定哪些事物是属于这个集合，而哪些又不是. 同时，集合的另一重要特征是它的元素是互异的，即集合中的元素是彼此不相同的.

设 A 是一个集合，x 是一个元素. 若 x 是 A 的元素，则称 x 属于 A，记为 $x \in A$. 若 x 不是 A 的元素，则称 x 不属于 A，记为 $x \notin A$.

表示集合通常有以下两种方法：

1. 枚举法：把集合的元素一一列举的方法. 例如

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$B = \{♠, ♣, ♥, ♦\}$.

2. 描述法：用确定的条件表示某些事物是否属于这个集合的方法. 例如

$C = \{x \mid x$ 是前 10 个自然数$\}$.

$D = \{x \mid x > 1, x$ 是实数$\}$.

定义 1.1.1　如果一个集合的元素是有限的，则这个集合称为有限集. 如果它不是有限集，则称为无限集.

在前面所举的四个例子中，集合 A、B、C 是有限集，而集合 D 则是无限集.

二、 集合的相等与包含关系

定义 1.1.2 设有两个集合 A、B，我们说这两个集合相等，是指它们的元素完全相同，记为 $A = B$.

不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$.

定义 1.1.3 如果对于任意的 A 中的元素 x：$x \in A$，有 $x \in B$，我们称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$. 若 A 不是 B 的子集，则记为 $A \nsubseteq B$. 若 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$.

显然，空集 $\varnothing$ 与集合 A 自身都是 A 的子集. 而且，如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则有 $A = B$.

三、集合的运算

在数学中，我们所讨论的是数学对象之间的运算：其性质及运算结果其是建立数学模型和解决问题的重要工具. 与数的运算及其规律一样，集合之间也有其规律及可以建立有关的运算. 关于集合之间的运算，我们常常用下面的图来直观地表示：

设 A、B 是两个集合：

1. 并集 $A \cup B$　由 A 与 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$. 即：

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.（见图 1.1.1）

2. 交集 $A \cap B$　由 A、B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$. 即：

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.（见图 1.1.1）

若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 不相交.

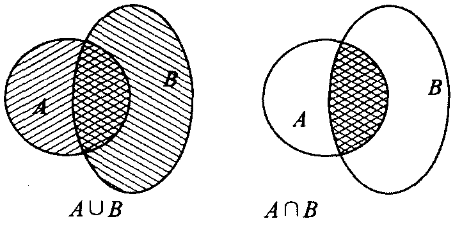


图 1.1.1

3. 差集 $A \backslash B$　$A \backslash B$ 就是在 A 中而不在 B 中的元素组成的集合：

$A \backslash B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.（见图 1.1.2）

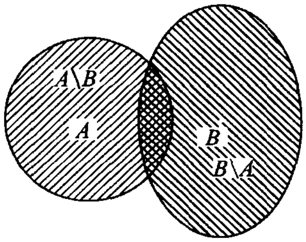


图 1.1.2

4. 补集 $\complement_X A$　设 X 是全集，即它是讨论某个问题的基本集合，A 是 X 的子集，则 A 的补集：

$\complement_X A = X \backslash A$.（见图 1.1.3）

四、 集合运算的基本性质

集合的运算具有与逻辑运算类似的性质，具体如下：

1. 交换律

(1) 并集的交换律：$A \cup B = B \cup A$.

(2) 交集的交换律：$A \cap B = B \cap A$.

2. 结合律

(1) 并集的结合律：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(2) 交集的结合律：

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

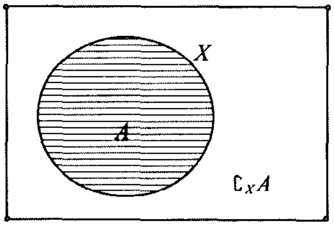


图 1.1.3

3. 分配律

(1) 交集对并集的分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(2) 并集对交集的分配律:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. De Morgan (德·摩根) 律

设 X 是全集，A、B 是 X 的子集，则

(1) 第一 De Morgan(德·摩根) 律:

$$\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \cap \complement_X B.$$

(2) 第二 De Morgan(德·摩根) 律:

$$\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \cup \complement_X B.$$

练习 1.1

1. 设 A、B 分别为下列两个集合，求 $A \cap B$，$A \cup B$，$A \backslash B$，$B \backslash A$:

(1) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$，$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$;

(2) A 为平面上平行四边形全体，B 为棱形的全体.

2. 证明:

(1) $A \cap (A \cup B) = A$;　　(2) $A \backslash B = A \cup \complement_X B$;

(3) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

3. 用区间表示下列各题变量的变化范围:

(1) $1 \leqslant x \leqslant 8$;　　(2) $x > 3$;

(3) $|x - 4| < 5$;　　(4) $x^2 \leqslant 16$;

(5) $x \leqslant 0$;　　(6) $1 \leqslant x < 4$.

§1.2　实数集

一、数集与点集

1. 数集

以数为元素的集合叫做数集，我们以前接触的集合主要是数集. 常见的有:

自然数集　$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\} = \{n \mid n$ 是自然数$\}$.

正整数集　$\mathbf{N}_+ = \{n \mid n$ 是正整数$\} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

整数集　$\mathbf{Z} = \{n \mid n$ 是整数$\}$.

有理数集　$\mathbf{Q} = \{x \mid x$ 是有理数$\} = \left\{x = \dfrac{p}{q} \right\} p, q$ 是整数，$(p, q) = 1, q > 0 \Big\}$.

这里，$(p, q) = 1$ 是指这两个整数的最大公因数为 1.

实数集　$\mathbf{R} = \{x \mid x$ 是实数$\}$.

2. 点集

以平面或者直线上的点为其元素的集合叫做点集. 我们知道，可以用一数轴上的所有点

来表示所有实数，数轴是研究实数的重要工具，有关实数的许多性质，都可通过数轴直观地表示出来. 在高等数学中我们常将数轴上的点集与相应的数集等同看待. 设 a、b 是两实数，且 $a < b$，则下面的"区间"既可看作是在指定范围内的实数的集合，也可看作是数轴上点的集合：

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

左开右闭区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

右开左闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

我们把整个数轴上点的集合，即实数集 $\mathbf{R}$ 记为开区间 $(-\infty, +\infty)$. 大于实数 a 的集合记为开区间 $(a, +\infty)$，不小于 a 的集合记作右开左闭区间 $[a, +\infty)$，小于实数 a 的集合记作开区间 $(-\infty, a)$，不大于 a 的集合记作左开右闭区间 $(-\infty, a]$.

3. 邻域

定义 1.2.1 设 δ 是任意一个正数，集合 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的一个邻域，并且记作 $U_a(\delta)$，或简记为 $U(a)$.

如果在邻域 $U_a(\delta)$ 中除去点 a，则得到集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$，称为点 a 的一个去心邻域. 并记作 $U_a^0(\delta)$.

二、上界、下界与确界

1. 最大值与最小值

定义 1.2.2 设 A 是一个数集，我们用 $\max A$ 表示 A 的最大值，$\min A$ 表示 A 的最小值.

例如，闭区间 $[a, b]$ 是一个既有最大值 b，又有最小值 a 的数集. 而开区间 (a, b) 则是一个既无最大值，也无最小值的数集. 左开右闭区间 $(a, b]$ 则有最大值 b，无最小值. 右开左闭区间 $[a, b)$ 则有最小值 a，无最大值.

例 1.2.1 证明数集 $\left\{\dfrac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 无最小值，$\left\{\dfrac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 无最大值.

证明：因为对固定的正整数 n_0，总有 $\dfrac{1}{n_0+1} < \dfrac{1}{n_0}$，且总有

$$\frac{n_0+1}{(n_0+1)+1} = 1 - \frac{1}{(n_0+1)+1} > \frac{n_0}{n_0+1} = 1 - \frac{1}{n_0+1},$$

故 $\min\left\{\dfrac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 与 $\max\left\{\dfrac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 不存在. ▯

2. 上界与下界

定义 1.2.3 设 A 是一个数集，如果存在数 M，使得对于任意 $x \in A$，都有 $x \leqslant M$，则称 M 为集 A 的一个上界. 类似地，如果存在数 m，使得对于任意 $x \in A$，都有 $m \leqslant x$，则称 m 为集 A 的一个下界.

显然，如果 $M(m)$ 是集 A 的一个上界（下界），则对于任意大于 M（小于 m）的数 $M'(m')$，$M'(m')$ 也是 A 的一个上界（下界）.

有最大值（最小值）的集合，必有上界（下界），反之则不然. 例如数集 $\left\{\dfrac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 有上界 1，而无最大值，$\left\{\dfrac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$ 有下界 0，而无最小值.

若数集 A 既有上界，又有下界，则称它是有界的.

如果一个数集 A 不是有界集，即对于任意的正数 M，总有 $x \in A$，使得 $|x| > M$，则称 A 为无界集. 例如，整数集 $\mathbf{Z}$ 与有理数集 $\mathbf{Q}$ 都是无界集.

3. 确界

定义 1.2.4　数集 A 的最小上界称为 A 的上确界，记作 $\sup A$. 类似地，数集 A 的最大下界称为 A 的下确界，记作 $\inf A$.

需要注意的是，如果一个的集合 A 没有最大值，也可能是有上确界的. 例如，数集 $A = \left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+\right\}$，就有上确界：$\sup A = 1$.

例 1.2.2　设 $A = \{x \mid x^2 < 2\}$，求 $\sup A$ 与 $\inf A$.

解：显然，$A = \{x \mid x^2 < 2\}$ 是有上界的，例如，任一平方大于2的数，都是它的上界. 而由定义 1. 2.4 得知，如果 $a = \sup A$，则 a 就是 A 的最小上界：对于任意的 A 的元素 x，都有 $x \leqslant a$，另一方面，对于任意的 A 的上界 y，都有 $a \leqslant y$. 不难得出，$\sup A = \sqrt{2}$，$\inf A = -\sqrt{2}$.

如果一个集合 A 有最大值，则 $\sup A = \max A$，类似地，如果一个集合 A 有最小值，则 $\inf A = \min A$.

但在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中，有上(下)界集合，就不一定有上(下)确界. 例如，集合 $A = \{x \mid x^2 \leqslant 2\}$ 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中就没有上(下)确界. 事实上，$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$，$\inf A = -\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

有上(下)界集合，就一定有上(下)确界，是实数集的一个重要性质，我们称为确界原理. 我们把确界原理作为不加证明的公理. 这一点，我们将在以后加以进一步阐述.

三、 实数集

《新微积分学》 主要是在实数范围内讨论有关函数的变化问题. 因此，我们将对实数集 $\mathbf{R}$ 作一个简单的介绍. 我们在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义加法“+”、乘法“·” 和序关系“<”. 并且，$\mathbf{R}$ 具有以下的性质：

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 是一个域　所谓实数集 $\mathbf{R}$ 是一个域是指它具有如下的性质：

① $\mathbf{R}$ 对于加法“+”、乘法“·” 是封闭的，即

对于任意的实数 a，b(以后记为 $\forall a, b \in \mathbf{R}$)，总有 $a + b \in \mathbf{R}$，$a \cdot b \in \mathbf{R}$.

② $\mathbf{R}$ 对加法、乘法满足交换律，即 $\forall a, b \in \mathbf{R}$，$a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$.

③ $\mathbf{R}$ 对加法、乘法满足结合律，即

$$\forall a, b, c \in \mathbf{R},\ (a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

④ $\mathbf{R}$ 存在加法的零元“0” 与乘法的单位元“1”， 即

$\forall a \in \mathbf{R}$，有 $a + 0 = a$，$a \cdot 1 = a$.

⑤ $\mathbf{R}$ 存在负元与非零元的逆元，即

$\forall a \in \mathbf{R}$，存在一个 a 的“负元”“$-a$”，使得 $a + (-a) = 0$.

$\forall a \in \mathbf{R}$，$a \neq 0$，存在一个 a 的“逆元”“a^{-1}”，使得 $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

⑥ $\mathbf{R}$ 对于加法和乘法满足分配律，即 $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$，$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

2. 实数集 $\mathbf{R}$ 是一个全序域　在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义了序关系“<”，它具有如下的性质：

① 三歧性：即 $\forall a, b \in \mathbf{R}$，$a < b$，$a = b$，$b < a$ 三者必居其一，且只居其一.

② 传递性：即 $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$，如果 $a < b$，$b < c$，则 $a < c$.

③ 加法保序性：即 $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$，如果 $a < b$，则 $a + c < b + c$.

④乘法保序性：即 $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$，如果 $a < b$，且 $c > 0$，则 $a \cdot c < b \cdot c$.

3. 实数集 $\mathbf{R}$ 是一个 Archimedes 全序域　实数集 $\mathbf{R}$ 具有 Archimedes 性质：

$\forall a, b \in \mathbf{R}$，如果 $b > a > 0$，则存在正整数 N，使得 $Na > b$.

4. 实数集 $\mathbf{R}$ 是一个完备的 Archimedes 全序域　即 $\mathbf{R}$ 具有完备性，也就是说，$\mathbf{R}$ 是连续的. 关于实数的连续性公理，有很多等价命题. 我们这儿将确界原理作为实数集 $\mathbf{R}$ 的连续性公理：

确界原理　非空有上(下)界的实数集合，必有上(下)确界.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 是稠密的　即任意两个实数之间必有实数.

四、绝对值不等式

微积分中，利用绝对值不等式进行估值是一种极为重要的手段. 因此，我们应该掌握基本的绝对值不等式. 实数 a 的绝对值定义如下：

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}.$$

实数的绝对值有明显的几何意义：实数 a 的绝对值 $|a|$ 等于数轴上的点 a 到原点距离. 绝对值具有以下的性质：$\forall a, b \in \mathbf{R}$，有

1. $|a| = \sqrt{a^2}$.
2. $|a| \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时，$|a| = 0$.
3. $|-a| = |a|$.
4. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
5. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.
6. $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.
7. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
8. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$，其中 $b \neq 0$.

练习 1.2

1. 证明：若一个数集有上(下)确界，那么它必然是唯一的.
2. 设 $A \subseteq \mathbf{R}$，$A \neq \varnothing$，证明：$\sup A = \inf A \Leftrightarrow A$ 是由一个元素组成的集.
3. 设 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 是非空有界集，证明：$A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B$.

§1.3　映射与函数

我们知道，世界上的所有事物都是运动的、变化的、相互依赖的. 因此，在我们抽象出的各种数学模型中的数量往往是变化的，我们称为变量. 而在一个相对固定的过程中保持不变的数量，我们称为常量. 两个变化的事物之间的依赖关系，即两个变量之间的依赖关系，我们又常常将其抽象为函数关系. 例如，圆面积 S 与其半径 r 的函数关系：$S = \pi r^2$，自由落体运动中下落的距离 s 与时间 t 的函数关系：$s = \frac{1}{2}gt^2$ 等等. 由于数学的发展变化，我们所