教育科学"十五"国家规划课题研究成果

大学数学——微积分

杜忠复　主编
蔡淑云　魏运才　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

大学数学

——微积分

杜忠复　主　编
蔡淑云　魏运才　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"数学类子课题项目成果之一。全书共有十章:函数与极限、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、常微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数的微分学、多元函数的积分学和场论初步。

本书是作者多年教学改革研究和实践的成果,注重数学思想方法的渗透,淡化计算,将数学实验与理论教学有机地融于一体,增加了数学建模的训练内容,并充分利用了现代的教学手段,从而全面培养学生解决问题的能力。

本书可作为培养应用型人才的高等学校微积分课程的教学用书,以及其他理工科专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——微积分/杜忠复主编 .—北京:高等教育出版社,2004.8
ISBN 7-04-014420-4

Ⅰ.大… Ⅱ.杜… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第057784号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 李卫青
责任绘图 吴文信 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 王效珍
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004年8月第1版
印　　张	29	**印　　次**	2004年8月第1次印刷
字　　数	530 000	**定　　价**	30.10元

总　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21 世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国 100 余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002 年 11 月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有 63 所高校申报了近 450 项课题。2003 年 1 月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格把关，确定了首批 9 项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003 年 3 月至 4 月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　言

本书是教育科学"十五"国家规划课题——"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"数学类子课题研究成果。全书分成微积分、线性代数、概率论与数理统计三册。针对本科应用型人才培养目标，结合我们多年在教学改革中的研究与探索，以教学方法改革及现代教学手段的引入作为突破口，在内容体系构建上做了大胆的调试。

本书将数学实验与理论教学有机地融于一体，充分利用一些现代教育技术，把一些抽象的、不易教又不易学而学生又必须要了解的内容借助实验或演示来处理。

对一些繁杂的计算问题，不要求学生去做过多的训练，只需学生掌握其内容思想方法，大量的运算可通过计算机(软件)完成，让学生从繁琐的计算中解放出来。实验内容在整个教材体系上有承上启下的作用，理论与实验前后呼应。

本书注重数学与实际应用问题的联系与结合，增加数学建模的训练内容，使学生了解数学在解决实际问题中的作用，提高数学建模的能力，掌握对数学理论知识与实验技术的初步运用。

书中侧重于数学的思想方法，运用实验手段处理书中的一些重要但在教学中不易于展开的问题，运用实验处理计算问题。

对一些思想性、方法性较强的内容进行适当的扩展，以开扩学生的视野。

本书在教学中，如教师将理论与实验处理得当可降低教学时数，而收到较好效果。

本册是微积分部分，这里我们注重介绍变与不变、"直"与"曲"的辩证关系，使学生能真正体会到常量数学与变量数学的关联。我们注重介绍微积分思想方法上的内容，侧重理论与实际的联系，淡化繁杂的计算，借助 Mathematica 软件解决相应问题。

编写本册的具体分工如下：第一章至第四章的理论内容由杜忠复编写；第五章至第六章的理论内容和第一章至第五章的实验内容，以及附录一由蔡淑云编写；第七章至第八章的理论内容和第六章至第九章的实验内容，以及附录二由王光辉编写；第九章至第十章的理论内容由魏运才编写。最后由杜忠复统一定稿。

全书由杜忠复担任主编。蔡淑云和魏运才同志担任本册的副主编。北京航空航天大学的李心灿教授等详细审阅了本册书稿，提出了许多宝贵的意见，我们向他们表示深深的谢意。

本书可作为高等学校应用型本科人才培养的理工科及相关专业的全日制大学生教材，也可供有关专业技术人员作为自学参考书。

书中带“*”号的内容，可作为选学。

本书编写过程中，得到我校教务处处长罗速教授等几位领导和教材科全体人员的大力支持和帮助；我校的冯莹女士为此书的编排做了大量的工作。高等教育出版社高等理工分社的高级策划李艳馥同志和策划编辑马丽同志，多年来对我们从各个方面都给予了大力的支持、鼓励和帮助，在这里一并向他们表示最真诚的感谢！

本书在教学改革中仅是初步尝试，限于学识水平，书中疏漏、谬误之处在所难免，敬请同行和专家们指正。

作　者

2004年3月11日于北华大学

目　录

第一章　函数与极限

微积分学是以变量为研究对象的一门数学学科，变量之间的相互依赖关系，称为函数．函数是微积分学的一个基本概念．极限理论是微积分学的基础，它从方法论上突出地表现了微积分学不同于初等数学的特点．本章将介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

作为现代计算和学习及解决问题的工具，介绍 Mathematica 软件的使用．它将帮助学生解决许多难以处理的问题，我们将在以后各章运用其处理、解决相应问题．

第一节　函　数

一、映射与函数

把具有某种共同属性的事物的全体称为一个**集合**，集合中的事物称为**元素**．通常用大写 J 字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示集合中的元素．

表示集合的常用方法为：(1)列举法；(2)描述法．列举法是把集合中的元素一一列举出来，两端用花括号括起来；描述法是在花括号内描述元素所具有的性质，即可表示成$\{x|x$ 具有性质$P(x)\}$，简记为$\{x|P(x)\}$．

例如，$A=\{a,b,c\}$；$B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$；$C=\{x|x^2-1=0\}$为三个集合，集合 A、B 采用的是列举法；而集合 C 采用的是描述法．

若元素 a 在集合 A 内，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$；否则

称 a 不属于 A,记为 $a\notin A$.若集合 A 中的元素均在集合 B 中,则称 B 包含 A,或称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$.若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$.若 $A\subseteq B$ 且有 $b\in B$ 但 $b\in A$,然而 $B\neq A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$.不含任何元素的集合称为空集,常用 $\varnothing$ 表示.任何集合均包含空集.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$,其中 a , b 为实数,a 称为区间**左端点**,b 为区间**右端点**.

集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记为 (a,b);集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称为**左闭右开区间**,记为 $[a,b)$;集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为**左开右闭区间**,$(a,b]$;集合 $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 为整个实数轴,记为 $(-\infty,+\infty)$.

集合 $\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为以 x_0 为中心、δ 为半径的**邻域**,记为 $N(x_0,\delta)$.

定义 1 设 A,B 是给定的两个集合,如果有一个规则 f,通过它对于每一个 $x\in A$,有唯一确定的一个 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**,记为 $f:A\to B$;y 称为 x 的**像**,记为 $y=f(x)$,x 称为**原像**,A 叫做映射 f 的**定义域**;像 $f(x)$ 的全体称为 f 的**值域**.

特别,当集合 A 与集合 B 均是数的集合时,则由 A 到 B 的映射 f 称为**函数**.

当 A 是数轴上的数集时,f 称为**一元函数**;当 A 是平面上的点集时,f 称为**二元函数**;类似可以得出三元及 $\boldsymbol{n}$ **元函数**,二元以上的函数统称为**多元函数**.关于多元函数将在第八章介绍.

在函数定义中,原像 x 称为**自变量**,像 y 称为**因变量**.如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0,因变量 y 能够得到一个确定的值,就称函数 f 在点 x_0 处**有定义**,其函数 f 的函数值记为

$$y\big|_{x=x_0},f(x)\big|_{x=x_0}\quad 或 f(x_0).$$

实数集合 $B=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.这里 $f(x)$ 是函数 f 在 x 点处的函数值,$f(x)$ 与 f 二者并不相同.但是,我们往往是通过函数值研究函数的,因此习惯上常称 $f(x)$ 是 x 的函数,或者说 y 是 x 的函数.

不难看出,函数是由定义域与对应规则所确定的.因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时,它们才表示同一函数.而与自变量及因变量用什么字母表示无关.

有时会遇到给定 x 值对应的 y 值有多个的情形,为叙述方便称之为**多值函数**.而定义所述的函数称之为**单值函数**.本书我们主要研究的是单值函数.

函数的定义域是我们所熟知的问题,这里不再多述.下面就函数常见的几个问题作一介绍.

1. 函数的表示法

表示函数通常有公式法、表格法、图示法等方法.

用数学公式表示自变量和因变量之间对应关系的方法称为**公式法**.表示函数的数学公式也常称为**解析式**.

将一系列的自变量与对应的函数值列成表,如平方表、对数表、三角函数表等等.此种表示函数的方法称为**表格法**.

对于函数 $y=f(x)$,根据 x 与 y 的对应关系,在平面直角坐标系内一般可以定出一条曲线,这条曲线称为函数 $y=f(x)$的**图形**.用该种图形表示函数的方法称为**图示法**.

这三种表示法是相互等价的,即相互可以转化的.

以后我们讨论函数,常用公式法表示.需要指出的是,用公式法来表示函数时,有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数,这样的函数称为**分段函数**.例如:

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ x-1, & x<0\end{cases}$$

是确定在区间$(-\infty,+\infty)$上的函数,当 x 取区间$(-\infty,0)$内的数值时,对应的函数值由公式 $y=x-1$ 确定;当 x 取 0 时,对应的函数值为 0;当 x 取区间$(0,+\infty)$内的数值时,对应的函数值由公式 $y=x+1$ 确定.

2. 函数的基本性质

函数的基本特性通常包括奇偶性、周期性、单调性、有界性四种.

(1) 设函数 $y=f(x)$的定义域关于坐标原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$称为**偶函数**;如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$称为**奇函数**.不是偶函数也不是奇函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

例 1 证明函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$).

证 因为该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\\&=\log_a\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

又如,函数 $y=\sin x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数,函数 $y=\cos x+\sin x$是非奇非偶函数.

易见,偶函数的图形是关于(平面直角坐标系的)y 轴是对称的;奇函数的图形是关于(平面直角坐标系的)坐标原点是对称的.

(2) 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不为零的数 l,$x\pm l$ 在定义域内,使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任何 x 值都成立,则函数 $y=f(x)$称为**周期函数**,l 称为函数 $y=f(x)$的**周期**.通常,我们说周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(3) 如果函数 $f(x)$的值在开区间(a,b)内随着 x 增大而增大,即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内是**单调递增的**(图 1.1.1);如果函数 $f(x)$的值在开区间(a,b)内随着 x 增大而减小,即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2.当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内是**单调递减的**(图 1.1.2).

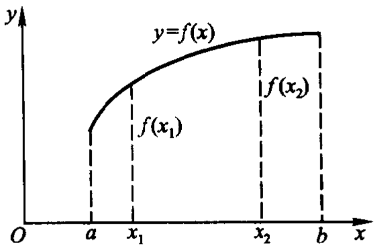

图 1.1.1

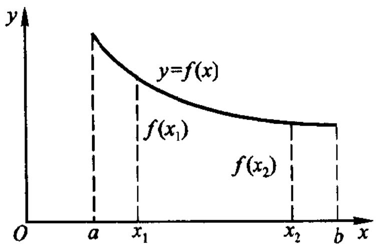

图 1.1.2

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的;在区间$(-\infty,0]$上是单调递减的;在区间$(-\infty,+\infty)$内 $y=x^2$ 不是单调递增的,也不是单调递减的.

单调递增或单调递减的函数统称为**单调函数**.

(4) 设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义,如果存在数 $M>0$,使对于任意的 $x\in I$,$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内有界;否则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内无界.

例如,函数 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界,即$|\cos x|\leqslant 1$,这里可取 $M=1$.显然,当取 $M=2,3,8.5$ 等等时,仍然有$|\cos x|\leqslant M$,即这样的 M 一般说来不是唯一的,可以有无限多个.函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$区间内无界,但在$(1,2)$区间内有界.

3. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$为定义在数集 A 上的函数,其值域为 B.若对于数集 B 中的每个 y,数集 A 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$,即是说变量 x 是变

量 y 的函数.这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.其定义域为 B,值域为 A.

函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图形在同一坐标系内是重合(相同)的.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示因变量;因此,往往用 $y=f^{-1}(x)$ 表示 $x=f^{-1}(y)$.这时 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形在同一坐标系内关于直线 $y=x$ 对称.

例如,函数 $y=2x-1$ 的反函数为 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ 或改写成 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

二、初等函数

1. 复合函数与初等函数

定义 3 如果 y 是 u 的函数,即 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数,即 $u=\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,那么,y 通过 u 的联系也是 x 的函数.我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

例如,函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数为 $y=\cos^2 x$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

有时,一个复合函数可能由三个或更多个函数构成.例如,由函数 $y=\ln u$,$u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以构成复合函数 $y=\ln\sin(x^2+1)$,其中 u 和 v 都是中间变量.需要注意的是,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 所对应的 u 值均大于或等于 2,这时 $y=\arcsin u$ 无定义.

幂函数 $y=x^\mu$(μ 是常数);指数函数 $y=a^x$(a 是常数且 $a>0, a\neq 1$);对数函数 $y=\log_a x$(a 是常数,$a>0, a\neq 1$);三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\ x$ 是我们中学里所熟知的函数.这五种函数统称为**基本初等函数**.关于它们的各种性质这里不再叙述.

定义 4 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学式子表示的函数,称为**初等函数**.

如,$y=\sqrt{\ln x-3^x+\cos x}$,$y=\dfrac{\sqrt{x}+\tan x}{x^2\sin x-7^x}$ 等均是初等函数.但分段函数一般不是初等函数.

2. 双曲函数与反双曲函数

(1) 双曲函数及其图形

在工程技术中,常遇到一类初等函数——双曲函数.双曲函数是由指数函数 e^x 和 e^{-x} 构成(e 为自然对数的底,e = 2.718 28…).

定义 5 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,称为**双曲正弦函数**;

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,称为**双曲余弦函数**;

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,称为**双曲正切函数**.

容易验证,$\sinh x$,$\tanh x$ 都是奇函数(它们的图形关于原点对称),$\cosh x$ 是偶函数(它们的图形 y 轴对称).

双曲正弦函数和双曲余弦函数的图形,可由函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 和 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 的图形经过"迭加"得到.具体作图过程如下:

如图 1.1.3,先作出 $y = \frac{1}{2}e^x$ 与 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 的图形,再将这两条曲线上对应于同一个 x 值的点的纵坐标相加,便得 $y = \cosh x$ 的图形.类似地,将两条曲线上对应点的纵坐标相减可得 $y = \sinh x$ 的图形,如图 1.1.4.

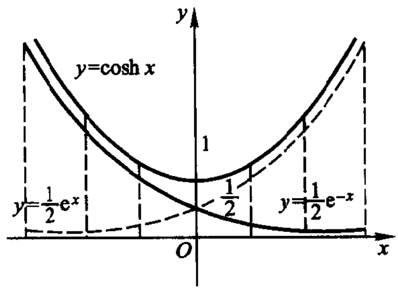

图 1.1.3

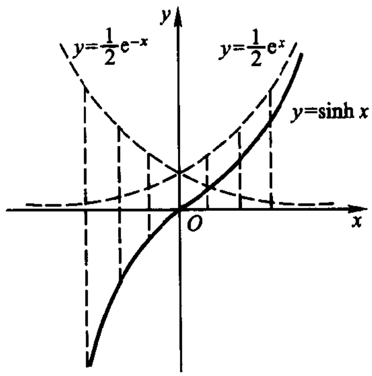

图 1.1.4

由于 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$,当 x 由 0 增大时,$\sinh x$,$\tanh x$ 都取正值,且 $\cosh x > \sinh x$,故 $\tanh x$ 的值总是介于 0 与 1 之间,并且当 x 很大时,$\tanh x$ 很接近于 1.由此就容易画出 $y = \tanh x$ 在右半平面的曲线部分.再由奇函数对称性,就可以作出整个图形,如图 1.1.5 所示.

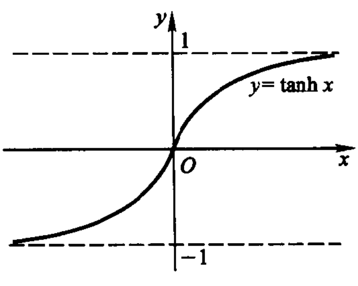

图 1.1.5

与三角函数相似,容易证明,双曲函数有下列基本恒等式: