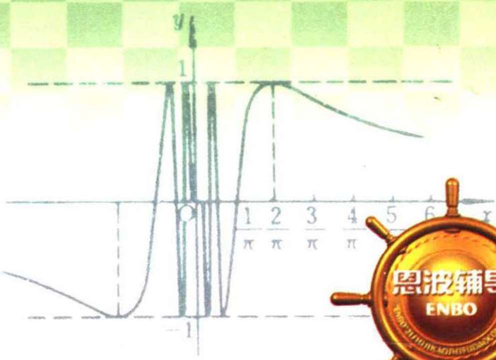
恩波学校21世纪学习辅导系列

高等数学复习指南

同济大学《高等数学》(第四版)

同济大学数学教研室　陈兰祥主编



审订/恩　波

学苑出版社

高等数学复习指南

主编:同济大学数学教研室陈兰祥教授

编委:(按姓氏笔画为序)

东 南 大 学　王海燕

同 济 大 学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

同 济 大 学　陈兰祥

学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学复习指南/陈兰祥等著. —北京：学苑出版社，2000.10
ISBN 7—5077—1772—0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 71382 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号 100036
北京市通县长凌营印刷厂印刷 新华书店经销
850×1168 开本 23.75 印张 594 千字
2000 年 10 月北京第 1 版 2000 年 10 月北京第 1 次印刷
印数:0001—5000 册 定价:23.80 元

内 容 提 要

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学考试要求编写的，是与《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》配套的复习参考书。

本书侧重于基本概念的探讨和分析，通过各种类型的典型题解析帮助学员打下扎实的基础。利用综合例题拓宽解题思路和提高分析解决问题的能力。

本书可供理、工、医、农（非数学专业）大学生学习高等数学同步复习使用，也可供参加硕士生入学考试的考生复习使用。另外也可作为从事高等数学教学的教师和非数学专业的研究生的参考书。

前　言

高等数学课程对于大学生的重要性是不言而喻的，已出版的多种高等数学复习参考书和习题解答曾给予了广大学生众多的帮助。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，我们根据在同济大学、交通大学、东南大学多年的教学实践以及研究生高等数学入学考试辅导的经验，听取了广大学员的意见，决定编写一套把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接的新的高等数学复习资料，在“恩波二十一世纪考试辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下，这套复习资料终于出版了，如果这套复习资料能对广大学生在高等数学学习和复习过程中达到节约复习时间，加深理解基本概念，拓宽解题思路和提高分析解决问题的能力有所帮助，就是对我们的工作的最大安慰。

本套复习资料由《高等数学复习指南》和《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》两本书组成，它们各成体系又紧密联系。

《高等数学复习指南》是与大学生学习同济大学数学教研室编写的《高等数学》教材同步配套的复习参考书，其章节次序、术语、符号均参照该书。

《高等数学复习指南》以讲清讲透基本概念为主线，并介绍与其相关的各种典型例题，并通过综合例题的讲解和综合练习的训练提高学生分析解决问题的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. 本书“基本概念”以框图形式列出，是全书的精髓，要求

逐字逐句深刻理解，并在理解基础上随时都能正确表达。

2. 各章节的“知识网络图”指出了各知识点的有机联系，应该予以充分理解。

3. “概念的内涵，重点和难点”在于帮助学员深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路。

4. “典型例题解析”中介绍了与基本概念有关的各种题型。在学习时应带着三个问题去思考：

① 这种题型是怎样提出的？

② 它反映了基本概念的什么内涵？

③ 用什么途径解决的。

5. “综合例题”是涉及多个知识点的题目，在学习时应着重考虑该题目究竟与那些知识点相关连，是如何解决的，这对于基本概念的融会贯通，提高分析问题的能力起到十分重要的作用，其中包括了同济教科书中的大部分难题和部分研究生入学试题。

6. “综合练习”是供学员自我考核的。“参考答案及其提示”应该在独立思考解题以后再予以核对检查。

《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》仍按相同的章排列，但“节”的编写有所变动，它是以题型为主线，介绍解决此种题型的各种方法和有关概念的灵活运用。目的在于拓宽解题思路，提高分析解答的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. 由于本书是以“题型”为主线，涉及的概念包含高等数学教材中各个章节的知识点，应积极探索一个题目的多种解法，它往往使您对各个有关概念的相互关系有更深刻的理解，通过各种解法的比较，掌握如何用最简捷的方法去解决问题。

2. 针对各种题型，本书还介绍了许多新的更简捷的解题方法（在大纲知识点要求范围内）这些内容对提高解题能力十分有帮助的。

3. 本书中大部分例题都有一定的难度，它包括了大部分历

届研究生入学试题，。“解题思路”和“分析”能帮助您迅速地找到解决问题的关键，应仔细体会并学会这些思维方法。

由于这两本书是同步编写的。两本书的相应章是紧密联系，难度由浅入深。但由于主线不一样，可以帮助学员从不同侧面深入理解基本概念并达到知识点的融会贯通。

两本书可以分别使用。然而同时两本书在手更为有利，对于在学学生来说通过后面一册可及时了解到研究生入学时应达到的要求；而对于报考研究生的学生在复习过程中能随时从前面一册中查找需要的基本概念和基本例题，减少下册中学习的困难。

本套复习资料由同济大学数学系陈兰祥教授主编。负责全书的统一协调、编纂和定稿，由同济大学陈兰祥、刘庆生、上海交通大学李铮、东南大学王海燕共同编写。

其中第一、四、十一章由李铮执笔；第二、三、十二章由陈兰祥执笔，第五、六、十章由王海燕执笔，第七、八、九章由刘庆生执笔。

由于四位同志分别撰写，各自章节按排和风格可能略有不同，虽经协调，存在一定差异仍在所难免。另外由于编者的水平所限，难免有错误与不妥之处。欢迎来信批评指正。

本套复习资料属于恩波二十一世纪考试辅导丛书系列，对于恩波编辑部的大力支持，编者表示衷心的感谢。

编者

目　　录

第一章　函数与极限

本章主题词

函数、极限、无穷小、连续

本章大纲要求

1. 理解函数的概念

2. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性

3. 了解反函数和复合函数的概念

4. 熟悉基本初等函数的性质及其图形

5. 能列出简单实际问题中的函数关系

6. 了解极限的 ε-N、ε-δ 定义（对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求），并能在学习过程中逐步加深对极限思想的理解.

7. 掌握极限四则运算法则

8. 了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限

9. 了解无穷小、无穷大的概念. 掌握无穷小的比较.

10. 理解函数在一点连续的概念，会判断间断点的类型.

11. 了解初等函数的连续性. 知道在闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大值最小值定理）.

本章知识网络图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义（定义域、对应规律）
    - 性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）
    - 复合函数（中间变量、复合函数的分解）
    - 反函数
    - 初等函数（基本初等函数的图形）
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
        - ε-N 定义
        - 收敛数列的性质
      - 函数的极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$　ε-X 定义
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　ε-δ 定义
        - 左、右极限
          - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
          - $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
    - 极限存在准则
      - 单调有界必有极限
      - 夹逼定理
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 性质
        - 无穷小的和、积仍是无穷小
        - 无穷小与有界量的积仍是无穷小
      - 比较（高阶、低阶、同阶、等价、k 阶）
    - 连续与间断
      - 定义
      - 间断点的分类
      - 闭区间连续函数的性质

第一节　函数及其基本性质

【基本概念】

表 1.1　函数及相关的定义

名　　称	定　　义
函　数	设 X,Y 是两个非空集合，若存在对应法则 f，使得，对于任给的 $x\in X$，存在唯一点 y，则称 f 是 X 到 Y 的函数，记作 $y=f(x)$，X 称为定义域，$W=\{y\mid y=f(x),x\in X\}\subset Y$，称为函数 f 的值域
反函数	设 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 W，若对于任给 $y\in W$，在 X 中只有一个数 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，x 看作函数，得到的一个新函数，称为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}，$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$
复合函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U^*\subset U$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 或 $f\circ\varphi$ 为定义在 X 上的复合函数，u 为中间变量

表 1.2　函数的几种特性

性　质	定　　义
有界性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 k_1，使得对于任给 $x\in X$，有 $f(x)<k_1$，则称 k_1 为 $f(x)$ 的上界. 若存在 k_2，使得对于任给 $x\in X$，$f(x)>k_2$，则称 k_2 为 $f(x)$ 的下界. 若存在 $M>0$，使得对于任给 $x\in X$，有 $\lvert f(x)\rvert<M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 为 X 上的有界函数. 反之称 $f(x)$ 无界.
单调性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若对于任意 $x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增；若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调增. 当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减；若 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调减.
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称. 若对于任给 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对于任给 $x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.
周期性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 $T\neq 0$，使得对于任给 $x\in X$，有 $x\pm T\in X$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 通常把 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期.

【概念的内涵、重点及难点】

1. 函数的定义的两个要素：定义域 X 及对应法则 f

(1) 当两个函数的定义域及对应法则均相同时，表示两个函数相同.

(2) 函数表示法与变量用什么字母无关，即 $y=f(x)$，$u=f(v)$，$s=f(t)$ 等均表示同一函数，这一性质又称为函数表示法的“无关特性”.

2. $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 图象关于直线 $y=x$ 对称，f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若存在 $X^*\subset X$，使得 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^*\subset U$，而 U 为 $y=f(u)$ 的定义域，则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 X^*. 若 $\varphi(x)$ 的值域不含在 $f(u)$ 的定义域内则不能复合. 例如 $y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

4. $f(x)$ 有界则 $f(x)$ 必有下界 $(-M)$ 和上界 (M)；反之若 $f(x)$ 既有上界 k_1，又有下界 k_2. 则 $f(x)$ 必有界 $(M=\max\{|k_1|,|k_2|\})$

$f(x)$ 无界的严格定义：对于任给 $M>0$，总存在 $x_M\in X$，使得 $|f(x_M)|\geqslant M$. 即任何一个正数 M 都不可能是 $f(x)$ 的界.

5. 一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期，如 $y=\sin x$ 的周期为 2π，$y=\tan x$ 的周期为 π 等，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数 $f(x)=C$，狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 等均为周期函数，但均不存在最小正周数.

【典型例题解析】

例 1.1 下列各题中 $f(x)$、$g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=x+1$，　$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

解 (1) 不相同，因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$，而 $g(x)$ 的定义域为 $x>0$.

(2) 不相同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|\geqslant 0$. $g(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 为相同的函数.

(3) 不相同. 因为定义域不相同. $g(x)$的定义域为 $x\neq 1$,但若补充定义 $g(1)=2$,则 $f(x)$与 $g(x)$相同.

例 1.2 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$

(2) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$

(3) $y=\frac{1}{\ln|x-1|}$

(4) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x}$

解 求函数的定义域一般主要针对一些基本形式来确定其定义,然后综合考虑. 基本形式可分为$\sqrt{A}$,$\frac{1}{A}$,$\ln A$,$\arcsin A$,$\arccos A$ 等,其相应的定义域为 $A\geqslant 0$,$A\neq 0$,$A>0$,$|A|\leqslant 1$,$|A|\leqslant 1$ 等.

(1) $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$ 定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$

(2) $\begin{cases}x+1>0\\ x-1\neq 0\end{cases}$ 定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(3) $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\ |x-1|>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1\neq 1\\ x-1\neq -1\\ x-1\neq 0\end{cases}$

$\therefore$ 定义域为 $x\in R,x\neq 0,x\neq 1,x\neq 2$

或$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

(4) $\begin{cases}\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1\\ 1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|\\ x\neq -1.\end{cases}$ 定义域为$\left[-\frac{1}{3},1\right]$

例 1.3 求下列函数的反函数

(1) $y=1+\ln(x+2)$ (2) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) $x+2=e^{y-1}$ $\therefore x=e^{y-1}-2$

反函数为 $y=e^{x-1}-2$

(2) $2^x=\frac{1+y}{1-y}$ $x=\log_2\frac{1+y}{1-y}$

反函数为 $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$

(3) $x+\sqrt{1+x^2}=e^y, e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-x+\sqrt{1+x^2}$

$\therefore\ x=(e^y-e^{-y})\div 2\quad \therefore$ 反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

例 1.4 下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=\sin x e^{x^2}$　　　　(2) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

(3) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　　　(4) $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})\quad (a>0,a\neq 1)$

解 (1) 因为 $\sin x$ 为奇函数,x^2 为偶函数

所以 $y=\sin x e^{x^2}$ 为奇函数

(2) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数

(3) $f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数

(4) $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.5(选择题) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是(　　)

(A) 以实数为周期的周期函数

(B) 以有理数为周期的周期函数

(C) 以无理数为周期的周期函数

(D) 不是周期函数

解 因为有理数+有理数仍为有理数,有理数+无理数仍为无理数,设 r 为有理数,则 $D(x+r)=D(x)$,故有理数均为 $D(x)$ 的周期,故选(B),注意:不存在最小的正的有理数.而无理数+有理数为无理数,无理数+无理数可能为有理数也可能为无理数,故无理数不是 $D(x)$ 的周期.

例 1.6 证明:定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何一个非奇非偶函数 $f(x)$ 必

可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 设 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

因为 $g(-x)=\dfrac{f(-x)+f[-(-x)]}{2}=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$

所以 $g(x)$ 为偶函数.

而 $h(-x)=\dfrac{f(-x)-f[-(-x)]}{2}=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$

所以 $h(x)$ 为奇函数.

故 $f(x)=h(x)+g(x)$ 可表示奇函数与偶函数的和. 证毕.

例 1.7 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界, 又有下界.

证 "⇒"设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即

存在 $M>0$, 使得对于任给 $x\in X$, 有 $|f(x)|<M$

所以 $-M<f(x)<M$, 取 $k_1=M$, $k_2=-M$. 则 $f(x)>k_2$ 且 $f(x)<k_2$, 故 k_1, k_2 分别为 $f(x)$ 在 X 上的上界和下界

"⇐"设 $f(x)$ 在 X 上既有上界 k_1, 又有下界 k_2, 即对于任给 $x\in X$, 有 $f(x)<k_1$ 且 $f(x)>k_2$.

取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$ (表示取 $|k_1|$, $|k_2|$ 中大的一个数), 则 $f(x)>k_2\geqslant -M$ 且 $f(x)<k_1\leqslant M$

故
$$-M<f(x)<M$$

即 $|f(x)|<M$, 所以 $f(x)$ 有界.

例 1.8 一球的半径为 r, 作外切于球的圆锥, 试将其体积表示为高的函数, 并说明定义域.

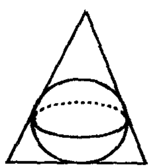


图 1-1

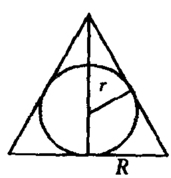


图 1-2

解 设圆锥的高为 h, 体积为 V, 则

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h, \text{由于} \frac{r}{R}=\frac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}}$$