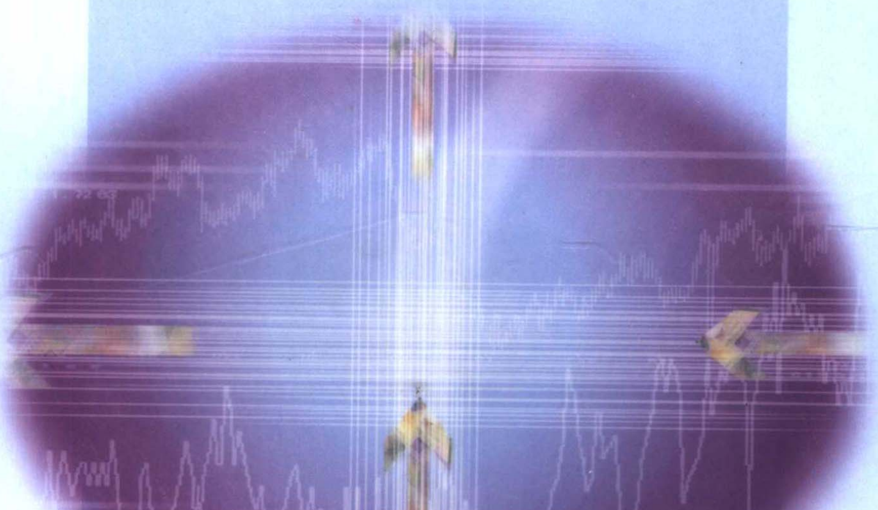
全国高等农业院校教材

概率论与数理统计学习指导书

吕振环　冯大光　主编



中国农业出版社

全国高等农业院校教材

概率论与数理统计学习指导书

吕振环 冯大光 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导书 / 吕振环，冯大光主编．—北京：中国农业出版社，2004.1
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-08792-1

Ⅰ．概…　Ⅱ．①吕…②冯…　Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第119555号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100026）
出版人　傅玉祥
责任编辑　毛志强

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2004年1月第1版　　2004年1月北京第1次印刷

开本：787mm×960mm 1/16　　印张：10.75
字数：183千字
定价：15.40元

编　写　人　员

主　　编　吕振环　冯大光

副 主 编　王　倩　李丽峰　鲁春铭　李喜霞

参　　编　丰　雪　张　远　于　淼　董建国

主　　审　惠淑荣

前　言

概率论与数理统计是数学的一个极具特色的分支.它的思想方法别具一格,它所研究的问题别开生面,它的解题技巧更是多种多样.在这门课程的学习中,通过做习题可以帮助学生正确理解和熟练掌握书中的理论,同时也是引导学生走向研究数学和应用数学的一座桥梁.所以掌握学习的要领,做一定数量的习题是学习概率论与数理统计的一个重要环节.

然而,大多数初学者对于学习概率论与数理统计知识、解决其习题,往往不得要领,常常感到无从下手,能有一本实用的学习指导书是广大教师和学生的一个共同愿望.我们编写《概率论与数理统计学习指导书》正是为了实现这个愿望.

本书共分八章,前五章为概率论部分,后三章为数理统计部分.由于本书主要面对的是72学时教学的本科生及考研究生复习的考生,因此数理统计部分只编写了前三章.每章分为内容精要、典型例题解析、课后习题解答及总复习题解答四部分.其中:内容精要部分是为了帮助学生清楚地理解书中的理论,将一章的主要内容归纳总结;典型例题解析部分,编者选择了本章中相应知识的基本训练类和综合考研类等不同层次的典型例题,并附有详细的分析解答过程;课后习题及总习题解答部分.与中国农业出版社出版,吴素文、张丽梅主编的《概率论与数理统计》一书相配套,对书中的习题及总复习题做出全面的解答.

本书为《概率论与数理统计》一书的配套辅导书,不仅对使用该教材的教师和学生有极大的辅助作用,而且对于使用其他教材的师生及考研究生复习的考生也有很强的指导意义.

本书由沈阳农业大学惠淑荣教授主审,策划、编写中得到了沈阳农业大学及编者所在院校的大力支持,在此一并表示诚挚的谢意!

由于编者水平有限,加之时间紧迫,书中难免有错误和不妥之处,恳请各位同仁及读者批评指正.

编　者

2003.11

目　　录

第一章　事件与概率

一、内容精要

(一) 主要概念

1. 随机试验　一个试验如果满足下述条件:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确知道的,并且不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但试验前不能确切知道会出现何种结果.

这样的试验称之为随机试验,用字母 E 表示,简称试验 E.

2. 样本空间　随机试验的每一个不可再分解的可能结果称为基本事件.一个随机试验 E 的所有基本事件组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω.集合中的元素即基本事件,有时也称为样本点,常用 ω 表示.

3. 随机事件　在随机试验中,把一次试验中可能出现也可能不出现,而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情称为随机事件(简称事件).通常把必然事件(记作 Ω)与不可能事件(记作 $\varnothing$)看做特殊的随机事件.

4. 概率的定义　综上所述,概率是随机事件发生可能性大小的度量.记事件 A 发生的概率为 $P(A)$.

(1) 概率的统计定义:在不变的一组条件下进行大量重复试验,随机事件 A 出现的频率 $\frac{\mu}{n}$ 会稳定地在某个固定的数值 p 的附近摆动,我们称这个稳定值 p 为随机事件 A 的概率,即 $P(A)=p$.

(2) 古典概率定义:设样本空间 Ω 包含有 n 个基本事件,且在试验中,每个基本事件出现的可能性相同,若事件 A 包含 k 个基本事件,则定义

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

为概率的古典定义.

(3) 几何概率定义:设在可测区域 Ω 内,任一具有度量的子区域被取到的

可能性相等,且从 Ω 中随机取一点属于子区域 A 的可能性只与 A 的测度成正比,而与 A 的形状及位置无关,则事件 $A=\{$点属于 $A\}$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{子区域 } A \text{ 的测度}}{\text{区域 } \Omega \text{ 的测度}}$$

这个测度可以是长度、面积、体积等.

(4) 概率的公理化定义:设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对于 E 的每一事件 A,赋予一个实数 $P(A)$,如果对应法则 P 满足下列三条公理,则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率:

公理 1(非负性):对任意一个事件 A,$P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性):$P(\Omega)=1$;

公理 3(可加性):如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容,那么 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

(5) 条件概率:设 A、B 为随机试验 E 的两个事件,且 $P(B)>0$,则称 $\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率. 记作

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

(6) 贝努里概率(二项概率):设一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次重复独立的试验中事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n$$

5. 事件的关系

(1) 事件的包含和相等:若事件 A 发生必然导致事件 B 的发生,则称 B 包含 A,记为 $B\supset A$. 若 $B\subset A$ 且 $A\subset B$,则称 A 等于 B,记为 $A=B$.

(2) 和事件:称事件 A、B 至少有一个发生所构成的事件为事件 A 与事件 B 的和事件,记作 $A\cup B$.

类似地,称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生构成的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

称事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生所构成的事件为 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

(3) 积事件:称事件 A、B 同时发生所构成的事件为事件 A 与 B 的积事件,记作 $A\cap B$ 或 AB.

类似地,可以定义 $n(n>2)$ 个事件的积:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

及可数个事件的积：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

(4) 差事件：称事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件为 A 与 B 的差事件，记作：$A-B$.

(5) 互斥(互不相容)事件：若事件 A、B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥(或互不相容)事件.

类似地，如果 $A_iA_j=\varnothing, i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$ 则称可列个事件 $A_1, A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容.

(6) 互逆(对立)事件：如果事件 A 与事件 B 满足：$AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为逆事件或对立事件，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

(7) 完全事件系：如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：它们两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是完全事件系.

(二) 主要定理

1. 乘法定理 两事件积的概率等于其中一事件的概率乘以该事件发生条件下另一事件发生的条件概率.即

$$P(AB)=P(A)P(B|A), P(A)>0$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A|B), P(B)>0$$

用数学归纳法可推得任意有限个事件积的乘法定理：

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

2. 独立性定理

(1) 事件 A、B 独立的充要条件是：

$$P(B|A)=P(B), P(A)>0$$

或

$$P(A|B)=P(A), P(B)>0$$

(2)若事件 A、B 独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立.

可推广到有限个事件相互独立的情形.

(三) 主要公式

1. 事件的运算律

(1) 交换律： $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(4) 对偶律：　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

说明：对偶律将和事件运算转化为积事件运算，从而利用事件的独立性简化概率计算.

2. 概率的基本公式

(1) 技巧公式：　$P(A)=1-P(\overline{A})$

(2) 加法公式：

①$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

②$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)$
$\quad -P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$

③若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

④若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$
$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)$$

(3) 乘法公式：

①$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$其中 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$

②若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

③若 A,B 互不相容，则 $P(AB)=0$

(4) 减法公式：

①　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

②若 $B\subset A$，则　$P(A-B)=P(A)-P(B)$

③若 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$，即概率的单调性.

④$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=P(B)-P(B\overline{A})$(特别有用)

(5)全概率公式：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完全事件系，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对样本空间中的任一事件 B，恒有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)$$

(6)贝叶斯公式：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完全事件系，且 $P(A_j)>0,j=1,$

$2,\cdots,n$，B 为样本空间的任一事件，$P(B)>0$，则恒有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}$$

说明：使用全概率公式或贝叶斯公式时，必须检查 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是否构成完全事件系，否则盲目使用，结果必错.

(四)重要结论

1. 事件包含的判断

(1)在实际问题中，事件 A 发生必然导致 B 发生 $\Longrightarrow A\subset B$.

(2)对任何事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(3)对任何事件 A,B，有 $AB\subset A\subset(A\cup B)$.

(4)下列五个关系等价：

$$\begin{array}{c}\bar{A}\supset\bar{B}\\ \Updownarrow\\ A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A\\ \Updownarrow\\ A\cap\bar{B}=\varnothing\end{array}$$

2. 事件独立性的判断

(1) 设 $P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B)\Longleftrightarrow P(A|B)=P(A).$$

(2) 若随机试验 E_1、E_2 相互独立，A_1、A_2 分别是它们的事件，则 A_1 和 A_2 相互独立.

(3) 若随机变量 ξ,η 相互独立，则事件 $\{\xi\in G_1\}$ 和 $\{\eta\in G_2\}$ 相互独立.

(4) 定理：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，将它们分成没有公共事件的 k 个组，每个组用事件运算产生一个新的事件，则这 k 个新的事件相互独立.

3. 事件的互不相容与相互独立的关系

设 $P(A)>0,P(B)>0$.

(1) 若事件 A、B 相互独立，则 A、B 不可能互不相容(或称 A,B 相容).

(2) 若事件 A、B 互不相容，则 A、B 不可能相互独立.

说明：在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的条件下，事件 A、B 的互不相容和相互独立不可能同时成立！也即

两个关系至多只有一个成立.

二、典型例题解析

例 1 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\bar{A}$ 为( ).

(A) 甲种产品滞销,乙种产品畅销;

(B) 甲、乙两种产品均畅销;

(C) 甲种产品滞销;

(D) 甲种产品滞销或乙种产品畅销.

解 设 $B=$"甲种产品畅销",$C=$"乙种产品滞销",则 $\bar{A}=\overline{BC}=\bar{B}\cup\bar{C}=$"甲种产品滞销或乙种产品畅销",故选(D).

说明:在讨论事件关系或求事件的概率时引进一些"简单"的随机事件是一个必须掌握的方法.

例 2 对于任意事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是( ).

(A) $A\subset B$;(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$;(C) $A\bar{B}=\varnothing$;(D) $\bar{A}B=\varnothing$.

解 根据内容精要中(四)重要结论之五个等价关系,故选(A).

例 3 设 A,B,C 是三个事件,则与事件 $A\bar{B}$ 互不相容的事件是( ).

(A) $\bar{B}C-A$;(B) $\bar{B}C\cup A$;(C) $\overline{\bar{A}\cup B\cup C}$;(D) $\overline{A\cap\bar{B}\cap C}$.

解 由于 A 与 $\bar{A}$ 互不相容,所以 $A\bar{B}$ 和 $\bar{A}\ \bar{B}C=\bar{B}C-A$ 互不相容,故选(A).

例 4 设事件 A 和 B 互不相容,且 $P(A)P(B)>0$,则( ).

(A) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 互不相容;(B) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 不是互不相容;

(C) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 相互独立;(D) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 不是相互独立.

分析 因为 $P(A)P(B)>0$,所以 $A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$,则不能选(A),(B),举反例:

若 $A\cup B\neq\Omega$,则 $\bar{A}\ \bar{B}=\overline{A\cup B}\neq\varnothing$,故不选(A);若 $A\cup B=\Omega$,则 $\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing$,故不选(B);余下的(C)(D),只需考察 $P(\bar{A}\ \bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$是否成立.

解
$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-P(A)-P(B)$$

而
$$P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)>P(\bar{A}\bar{B})$$

即 $P(\bar{A}\bar{B})\neq P(\bar{A})P(\bar{B})$故 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相互独立,应选(D).

例 5 下列( )命题是正确的.

(A) 若 A,B 互不相容,则 $\bar{A},\bar{B}$ 也互不相容;

(B) 若 A、B 互不相容,则 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 相互独立;

(C) 若 A、B 构成完全事件系,则 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 也构成完全事件系;

(D) 若 A、B、C 构成完全事件系,则 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 也构成完全事件系.

解 (A)(B)显然错误.若 A、B 构成完全事件系,即 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,分别用对偶原理可得:

$$\overline{AB}=\overline{\varnothing}\text{ 即 }\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega;\overline{A\cup B}=\bar{\Omega},\text{即 }\bar{A}\bar{B}=\varnothing$$

因此 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 构成完全事件系,故选(C).

而 A、B、C 构成完全事件系推不出 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 两两互不相容,故(D)也错.

例 6 设 A、B、C 三个事件两两独立,则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是(　　).

(A)A 与 BC 独立;(B)AB 与 $A\cup C$ 独立;

(C)AB 与 AC 独立;(D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

解 已知 A,B,C 两两独立,则 A,B,C 相互独立只需考察 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 是否成立.

若 A 与 BC 独立,则 $P(ABC)=P(A)\cdot P(BC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$,故选(A).

例 7 已知两事件 A、B 满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,且 $P(A)=p$ 则 $P(B)=$(　　).

解
$$\begin{aligned}P(B)&=P[B(A\cup\bar{A})]=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(\bar{A}\bar{B})+P(\bar{A}B)\\&=P(\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B)=P(\bar{A})=1-p\end{aligned}$$

例 8 设两两相互独立的三事件 A、B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$(　　).

解
$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3P(A)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)\\&=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

解此方程得:$P(A)=\frac{1}{4}$,$P(A)=\frac{3}{4}$(与已知矛盾,舍去)

例 9 已知 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.5$,$P(C)=0.5$,$P(AB)=0.3$,$P(BC)=0.3$,$P(AC)=0.2$,$P(ABC)=0.1$,则 $P(C|\bar{A}\bar{B})=$(　　).

解 $P(C|\bar{A}\bar{B})=\dfrac{P(C\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}$

$$=\frac{P(C)-P(C\overline{\overline{A}\overline{B}})}{1-P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(C)-P(CA\cup CB)}{1-P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(C)-[P(CA)+P(CB)-P(ABC)]}{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}=\frac{1}{2}$$

例 10　设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取 2 件,已知 2 件中有 1 件是不合格品,则另 1 件也是不合格品的概率是多少?

分析　本题难点在于如何利用所设的随机事件将所求条件概率表达清楚.

解　方法一:设 $A_i=\{$第 i 次取出的那件是不合格品$\}$,$i=1,2$,则所求概率为

$$P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P[A_1A_2(A_1\cup A_2)]}{P(A_1\cup A_2)}$$
$$=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1\cup A_2)}$$
$$=\frac{P(A_1A_2)}{1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)}$$
$$=\frac{\dfrac{P_4^2}{P_{10}^2}}{1-\dfrac{P_6^2}{P_{10}^2}}$$
$$=0.2$$

方法二:设$A=\{2$ 件中至少有一件是不合格品$\}$,

$B=\{2$ 件都是不合格品$\}$,则

$$P\{B|A\}=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-P(\bar{A})}=0.2$$

例 11　假定报考研究生要依次进行 4 次考试,如果至少有 3 次及格即可考取.某学生第一次考试及格的概率为 p,当他前一次考试及格时,下次考试及格的概率仍为 p;当他前一次不及格时,下一次及格的概率是$\frac{1}{2}p$,则他考取研究生的概率是多少?

分析　该生考取的情况分为四种:即前三次全及格和前三次有一次不及格而其他三次均及格.

解　设 $A_i=\{$第 i 次考试及格$\}$,$i=1,2,3,4$.

$$P\{\text{考取}\}=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3A_4)+P(A_1\bar{A}_2A_3A_4)+P(A_1A_2\bar{A}_3A_4)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$P(A_3|\bar{A}_1A_2)P(A_4|\bar{A}_1A_2A_3)+(\cdots)+(\cdots)$$

$$=p\times p\times p+(1-p)\times\frac{p}{2}\times p\times p+p\times(1-p)\times\frac{p}{2}\times p$$

$$+p\times p\times(1-p)\times\frac{p}{2}$$

$$=\frac{5}{2}p^3-\frac{3}{2}p^4$$

例 12 袋中装有 50 枚正品硬币,50 枚次品硬币(次品硬币的两面都印成了国徽).

(1) 从袋中任取一枚硬币,将它投掷 3 次,已知每次都出现国徽,问这枚硬币是正品的概率?

(2) 若在袋中任取 1 枚硬币,将它投掷 k 次($k\geqslant1$),问至少出现 1 次国徽的概率?

解 (1) 设 $A=\{$取到正品硬币$\}$,$B=\{$投掷 3 次都出现国徽$\}$,A 与 $\bar{A}$ 构成完全事件系,则

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\times1}=\frac{1}{9}$$

(2) 设 $C=\{$没有出现国徽$\}$,则

$$P\{\text{至少出现 1 次国徽}\}=1-P(C)$$

$$=1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{2}\times0\right]=1-2^{-1-k}$$

例 13 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,已知目标被击中,则它是甲射中的概率为多少?

分析 本题乍一看好像是用贝叶斯公式,但能否使用需要看是否构成完全事件系.

解 设 $A=\{$目标被击中$\}$,$B=\{$甲命中目标$\}$,

$C=\{$乙命中目标$\}$,则 B、C 独立,$B\subset A$,

$A=B\cup C$(显然,B 与 C 独立则 B、C 不能互斥,另外,$B\cup C\neq\Omega$,故 B 与 C 不构成完全事件系,不能用贝叶斯公式).

所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(B\cup C)}=\frac{P(B)}{P(B)+P(C)-P(BC)}$$