面向21世纪高校教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

吴有炜 高洁·主编

苏州大学出版社

面向21世纪高校教材

概率论与数理统计

主　编　吴有炜　高　洁
副主编　杨永清　郭进峰　曹菊生

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吴有炜,高洁主编. —苏州：苏州大学出版社,2004.8
面向21世纪高校教材
ISBN 7-81090-289-X

Ⅰ.概… Ⅱ.①吴…②高… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第066121号

概率论与数理统计
吴有炜　高　洁　主编
责任编辑　董张维

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号　邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇　邮编：214217)

开本 720mm×940mm　1/16　印张 17.25　字数 392千
2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷
ISBN 7-81090-289-X/O·18(课)　定价:22.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67258835

前　　言

“概率论与数理统计”是高等学校理科、工科、文科各专业本科阶段普遍开设的一门处理随机现象数量规律性的数学课程. 由于随机现象存在的普遍性、研究方法的独特性和教学内容的实用性,这门课越来越受到人们的重视. 该门课程研究的目的是从大量数据中研究随机现象蕴含的统计规律性. 由于理论方法的应用涉及到大量的计算,其中过于深奥的抽象理论、复杂的公式、陈旧的计算手段限制了它的实用性. 为了结合现代化教学和计算机软件应用手段,结合理科、工科、文科各专业的教学实际,我们编写了《概率论与数理统计》这本书,作为理科、工科、文科各专业的基础数学教材.

本书分三部分. 第一部分为概率论(第 1 章至第 5 章),是后面应用部分的理论基础. 第二部分为数理统计(第 6 章至第 8 章),重点阐述了参数估计和假设检验,并介绍了方差分析和回归分析两个常用的统计方法;为加强实用性,引入了 Excel 进行统计计算,以提高学生的实际应用能力. 第三部分为随机过程(第 9 章至第 10 章),介绍了一些基本理论和常见的几个随机过程,并着重讨论了马尔可夫链. 数理统计和随机过程内容相互独立,可根据专业的需要选用. 学时较少的(如 34、36、48、54 学时)可只讲前两部分,其中 34、36 学时的还可适当删减部分内容(如 §3.5、§7.3、§7.4、§8.2);学时较多的(如 64、72 学时)可全部讲. 计算机操作部分建议学时较多的专业采用多媒体进行教学.

本书在应用例题和习题的选择上尽量做到涉及工程技术、生物医学、经济管理、人文科学等各领域,以便更好地适应各专业的需要.

参加教材和习题编写的人员有吴有炜、高洁、杨永清、郭进峰、曹菊生、吴树忠、唐旭清、魏国强、谢文龙、胡满峰、霍新霞、张景祥、尤芳、黄芳、马玉琴、席莉静、范增明等. 全书由吴有炜统稿.

本书承无锡江南大学理学院徐振源教授审阅,提出了很多宝贵的意见,对此我们表示衷心的感谢.

由于水平有限,书中难免存在不尽人意之处,恳请读者指正,以便再版时及时修正.

编　者

2004 年 7 月

目录

第4章 随机变量的数字特征

第5章 大数定律与中心极限定理

第6章 统计估值

第7章 假设检验

第8章 统计分析

第 9 章　随机过程的基本理论

第 10 章　马尔可夫链

第1章

随机事件与概率

§1.1　随机事件及其运算

一、随机试验与样本空间

人们在观察和研究客观世界时，常接触两类不同现象. 一类现象称为确定性现象，即在一定条件下此类现象肯定会发生，譬如，在一个标准大气压下加热到100℃的水必然会沸腾；又如，同性电荷必定相斥，异性电荷必定相吸，等等. 而客观世界还存在着另一类现象，由于受诸多不可控因素的影响，其结果的发生是不确定的，不可预知的，譬如，抛一枚硬币正、反面哪一面朝上，股市中股票行情的涨跌，某地下一个年度的降雨量，等等. 称此类结果的发生与否呈现不确定性的现象为**随机现象**. 概率论和数理统计是研究随机现象中数量规律性的一门数学学科.

在随机现象中，每个结果是否会发生呈现不确定性，但是，经过人们长期的观察与研究，发现这些结果发生的可能性大小呈现某种规律性，这种规律性称之为**统计规律性**. 比如自由地向地面抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在抛硬币之前，无法准确地知道其结果. 但是多次重复地抛，可以发现出现正、反面朝上的次数基本相同，即可能性各占一半，这就是抛硬币这个随机现象中所蕴含的统计规律性.

为对随机现象的统计规律性加以研究，就必须要对随机现象进行观察或实验. 在概率论中，把满足下列条件的观察或实验称为**随机试验**，记为 E：

(1) 在相同的条件下可重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且试验前可以知道所有可能结果；

(3) 每次试验前不能确定试验后会出现哪一种结果.

今后所指的试验都是指随机试验.

在随机试验 E 中，每一种可能的(不可再分解的)结果称为**样本点**，所有样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**. 样本点与样本空间分别用字母 ω 与 Ω 表示.

例如：

E_1　抛掷一颗骰子，观察点数出现的情况：

试验有六种可能结果，即出现的点数分别为 1,2,3,4,5,6，所以样本点有六个，因此，样本空间为 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

E_2　观察某城市某个月内交通事故发生次数：

每个城市每个月发生交通事故次数是有限的，不会非常大，但一般来说，人们从理论上很难定出一个交通事故次数的有限上限，为了数学上的处理方便，总把上限视为∞，这样的方法在理论研究中经常被采用. 因此，E_2 的样本空间为 $\Omega_2=\{0,1,2,3,\cdots\}$. 以后称数量是离散的无限个为可列个，故可以称样本空间 Ω_2 有可列个样本点.

E_3　在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命，以小时为单位：

显然，每只灯泡的寿命是一个非负实数，所以，每一个非负实数 t 是一个样本点，因此，样本空间为无穷区间 $\Omega_3=\{t|t\geqslant 0\}$.

二、随机事件

在进行随机试验时，常常关心满足某种条件的样本点所组成的集合.

样本空间 Ω 中的子集即样本点的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示. 特别地，试验的每一个样本点也是随机事件，称为**基本事件**. 例如，在随机试验 E_1 中，如果讨论事件 A:“出现奇数点”，则事件 A 包含三个样本点，即 $A=\{1,3,5\}$. 在随机试验 E_3 中，如果讨论事件 B:“灯泡的寿命不低于 600 小时”，则事件 B 是由不小于 600 的实数组成的集合，即区间 $B=\{t|t\geqslant 600\}$.

在一次试验中，随机事件可能发生也可能不发生. 称事件发生当且仅当事件包含的一个样本点发生. 例如，在一次抛骰子的试验 E_1 中，若 A 表示事件“出现奇数点”，当抛出了“点数 3”，则认为在这次试验中事件 A 发生了；当抛出了“点数 2”，则认为随机事件 A 在这次试验中没有发生.

有两种特殊情况：一是由样本空间 Ω 的全体样本点组成的集合称为**必然事件**，记为 Ω，它在每次试验中总是发生的. 另一个是不含任何样本点的空集称为**不可能事件**，记为$\varnothing$，它在每次试验中都不可能发生. 例如，在试验 E_1 中，出现

"点数不大于 6"就是一个必然事件,而出现"点数大于 6"就是一个不可能事件.本质上,必然事件与不可能事件没有不确定性,即它们不是随机事件.但为了今后讨论方便起见,仍把它们当作特殊的随机事件.

三、事件的关系与运算

随机事件是样本空间的某个子集,因此,事件之间的关系与运算也可以按照集合论中集合的关系与运算来处理.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subseteq B$.

如果事件 B 包含事件 A 且事件 A 包含事件 B,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

2. 并事件(和事件)

事件:"事件 A 与事件 B 中至少有一个事件发生"称为事件 A 与 B 的**并事件**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$,它是事件 A 与事件 B 的并集.

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件中至少有一个事件发生.

3. 交事件(积事件)

事件:"事件 A 与事件 B 同时发生",称为 A 与 B 的**交事件**,记为 AB 或 $A\cap B$,它是事件 A 与 B 的交集.

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,它表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

4. 差事件

事件:"事件 A 发生而事件 B 不发生"称为 A 与 B 的**差事件**,记为 $A-B$,它是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成.

5. 互不相容事件(互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B **互不相容**或**互斥**.

事件 A 与事件 B 互不相容当且仅当 $AB=\varnothing$.

对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们**两两互不相容**是指 $\forall i, j=1,2,3,\cdots,n$，有 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$.

显然，基本事件是两两互不相容的.

以上关于事件的并、交、互斥的概念还可以推广到所谓可列个事件的情况，即涉及 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 无穷个事件的并、交、互斥.

6. 对立事件(逆事件)

对每次试验中的事件 A，事件"A 不发生"称为 A 的**对立事件或逆事件**，记为 $\bar{A}$，显然有：

(1) $A\cup\bar{A}=\Omega, A\bar{A}=\varnothing$；

(2) A 与 $\bar{A}$ 互为对立事件，即 $\bar{\bar{A}}=A$；

(3) 对立事件一定互不相容，但互不相容的事件不一定对立.

事件的运算服从以下规律(其中 A、B、C 均为试验 E 的事件)：

交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$；

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

　　　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

德·摩根定律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

顺便指出，如同讨论集合的关系和运算一样，讨论事件的关系和运算时也可借助文图(Venn 图)来帮助理解.

例 1　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B,C 不发生；　(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；　(4) A,B,C 恰好有一个发生；

(5) A,B,C 不多于两个发生；　(6) A,B,C 中至少有一个发生；

(7) A、B 中至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A,B,C 恰好有两个发生.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$；　(2) $AB\bar{C}$；

(3) ABC；　(4) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$；

(6) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$ 或 $A\cup B\cup C$；

(7) $(A\cup B)\bar{C}$；　(8) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

例 2　抛掷一颗均匀的骰子，观察它出现的点数：(1) 写出样本空间；

(2) 若$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,$C=\{2,4\}$,求 $A\cup B$,$A-B$,AC,AB,$A\cup\overline{C}$,$\overline{A\cup B}$,$\overline{AB}$.

解 (1) 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

(2) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$,$A-B=\{5\}$,$AC=\varnothing$,$AB=\{1,3\}$,

$A\cup\overline{C}=\{1,3,5,6\}$,$\overline{A\cup B}=\{6\}$,$\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$.

§1.2 随机事件的概率

一、事件的频率与概率的统计定义

随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,即有其偶然性的一面. 在实际问题中,常常需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大,以便揭示这些事件的内在规律性,更好地认识客观事物. 这种可能性大小是事件本身固有的一种属性,它是可以用数字来度量的. 概率就是刻画随机事件发生的可能性大小的数量指标. 为此,首先引入频率的概念,它描述事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数字度量——概率.

定义 在相同的条件下,重复进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**,比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义,频率具有如下性质:

(1) 对任意事件 A,有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$,$f_n(\varnothing)=0$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_n(A_i)$.

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率就是它发生的次数与总试验次数之比,其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大,意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 因此,频率与事件在一次试验中发生的可能性大小必然存在某种关系.

例 1 在历史上,曾有人做过大量的抛硬币试验,其结果如表 1-1 所示.

表 1-1 抛硬币试验数据表

试验者	抛硬币次数 n	正面朝上(A)的次数	频率 $f_n(A)$
D. Mogen	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.4984
K. Pearson	24000	12012	0.5005

由表 1-1 可知,事件 A"出现正面朝上"的频率 $f_n(A)$具有随机波动性,但只是在 0.5 这个数值附近摆动,而且随着试验次数的增加逐渐稳定于 0.5.

例 2 考虑某种产品的合格率,从一大批该种产品中抽取 9 批产品做质量检验,其结果如下:

表 1-2 产品合格率试验数据表

抽取产品数 n	5	10	70	150	310	600	900	1800	3000
合格产品数 n_A	5	7	60	131	282	548	820	1631	2715
合格率 $f_n(A)$	1	0.7	0.857	0.873	0.910	0.913	0.911	0.906	0.905

在本例中,将检验一件产品是否合格视为一次试验. 从表 1-2 中,事件 A"产品合格"的频率 $f_n(A)$具有随机性,且 n 较小时,它随机波动的幅度较大,但随着每批抽取的产品数的增多,产品合格率 $f_n(A)$逐渐稳定于 0.9.

由此可见,事件的频率反映了事件在一定条件下发生的可能性大小. 不难理解,一个事件在每次试验中出现的可能性越大,那么它在 n 次试验中发生的频率也就越大. 反之,由频率的大小也能判断事件发生的可能性大小. 从上面两个试验记录可以看出,尽管各次试验中频率不是一个固定的数,但当试验的次数 n 增大时,频率 $f_n(A)$会趋于稳定,这种性质称为**频率的稳定性**. 正是频率的这种稳定性使人相信,当 n 较大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$相当真实地反映了事件 A 发生的可能性大小,它揭示了蕴含在随机现象中的统计规律性.

概率的统计定义 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A,若当试验次数 n 很大时,频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定在某一数值 p 的附近摆动,且随着试验次数 n 的增加,其摆动的幅度越来越小,则称数 p 为随机事件 A 的**概率**,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

概率的统计定义有相当直观的试验背景,易被人们接受. 但定义本身存在很大的缺陷,即定义中的"稳定在某一数值 p 的附近摆动"以及"摆动的幅度越来越小"等内容含义不清,数值 p 或多或少地带有人为的主观性,其存在性就是问

题. 况且，在实际问题中，不可能也没有必要对每个事件都要做大量的重复试验，从中得到频率的稳定值. 为了理论研究与实际应用的需要，从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出以下概率的公理化定义.

概率的公理化定义　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个满足以下三条公理的实数 $P(A)$：

(1) 非负性　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性　$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(3) 可列(完全)可加性　对于 Ω 中任意可列个两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

在概率论的发展史上，概率的公理化定义的提出是一个里程碑. 自从人们开始研究随机现象以来，关于如何对随机事件的可能性即概率进行明确的定义讨论了近两个世纪. 虽然用概率的统计定义来说明概率有一定的科学性，但定义中所谓频率的稳定性让人感到不踏实，而且，事实上也不可能做无数次试验去确定某一事件的概率. 因此，如何更好地提出概率的一般定义成为一个难题，直到 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)从古典概率、几何概率以及频率的有关性质中概括出三条公理，即非负性、规范性和可列可加性，指出凡满足这三条公理的集合函数都可作为概率，且由这三条公理推出的概率性质又为利用简单事件来计算复杂事件的概率提供了运算法则. 柯尔莫哥洛夫创立的概率论公理化体系，为近代概率论奠定了严密的理论基础，极大地推动了概率论的发展，并在此基础上又产生了许多新的数学学科如数理统计、随机过程、排队论、信息论与金融数学等. 对于学习概率论的读者而言，了解这一点是很有必要的.

由概率的公理化定义可推得概率的一些性质：

(1)(有限可加性)　对于 Ω 中任意一列两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i); \tag{1.2.1}$$

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$；　(1.2.2)

(3) 设 A, B 为两个事件，$A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(B) \geqslant P(A)$；

(4) 加法定理　设 A, B 为两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.3}$$

证 (1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，由公理3，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(2) 因为 $\Omega=A\cup\overline{A}$，$A\overline{A}=\varnothing$，所以 $1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，即 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(3) 因为 $B=A\cup(B-A)$，且 A 与 $B-A$ 互不相容，所以 $P(B)=P(A)+P(B-A)$，而 $P(B-A)\geqslant 0$，所以 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(B)\geqslant P(A)$.

(4) 因为 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$，$A$ 与 $\overline{A}B$ 互不相容，故有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B).$$

又因 $\overline{A}B=B-AB$，$AB\subset B$，所以 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$，代入上式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

利用数学归纳法可将性质(4)推广至多个事件的情形.

例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意三个随机事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \tag{1.2.4}$$

一般地，对任意 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.2.5}$$

例3 某人外出旅游两天，根据天气预报，第一天下雨的概率为0.6，第二天下雨的概率为0.3，两天都下雨的概率为0.1，试求：

(1) 事件 B："第一天下雨而第二天不下雨"的概率；

(2) 事件 C："至少有一天下雨"的概率；

(3) 事件 D："两天都不下雨"的概率；

(4) 事件 E："至少有一天不下雨"的概率.

解 设 A_i 表示"第 i 天下雨"的事件，$i=1,2$，由题意有

$$P(A_1)=0.6,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_1A_2)=0.1.$$

(1) 因为 $B=A_1\overline{A_2}=A_1-A_2=A_1-A_1A_2$，又 $A_1A_2\subset A_1$，所以

$$P(B)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.6-0.1=0.5.$$

(2) 因为 $C=A_1\cup A_2$，所以

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$=0.6+0.3-0.1=0.8.$$

(3) 因为 $D=\overline{A}_1\overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}$，所以

$$P(D)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2.$$

(4) 因为 $E=\overline{A_1A_2}$，所以 $P(E)=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9.$

例 4　已知事件 A、B 的概率为 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，求证 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

证　$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=$

$1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)\right]=P(AB).$

§1.3　古典概型

一、古典概型

概率的统计定义实际上提供了近似计算概率的一种方法. 但某些特定问题本身所具有的某种"均匀性"或"对称性"导致各样本点发生的可能性相等，可以直接用理论分析的方法计算事件的概率.

如果试验 E 的样本空间的元素只有有限个，且试验中每个基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验模型为**古典概型(古典概率模型)**.

设试验 E 的样本空间只有有限个样本点，不妨记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，在每次试验中，各个样本点出现的可能性相同，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，由于样本点两两互不相容，由概率性质，有

$$1=P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)=nP(\omega_i),i=1,2,\cdots,n,$$

故　$P(\omega_i)=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$

所以，若事件 A 由 n_A 个样本点构成，则其发生的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本空间包含的样本点数}}. \tag{1.3.1}$$

可见，古典概型的概率计算完全归结为对样本空间 Ω 中样本点总数 n 和事件 A 中所含样本点数 n_A 的计算. 由于样本空间的设计可有各种不同的方法，因此，古典概型的计算就变得五花八门、纷繁多样了.

一般地，当样本点总数较大时，可利用排列、组合以及乘法原理、加法原理的

知识计算样本点数，进而求得相应的概率.

例 1 袋中有 6 只红球、3 只白球，从中任取 3 只，求：

(1) 事件 A“恰好取得 3 只红球”发生的概率；

(2) 事件 B“恰好取得 2 只红球 1 只白球”发生的概率.

解 此类试验被认为任意 3 只球被取出的可能性都一样，试验属于古典概型. 视任意取出的 3 只球为一个样本点，则样本点总数为 $n=C_9^3$，事件 A 含有样本点数为 $n_A=C_6^3$，所以，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21}.$$

在计算事件 B 含有样本点数时，利用乘法原理可得 $n_B=C_6^2C_3^1$，所以，事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}.$$

例 2 将例 1 中的取球方式改成以下有放回抽样方式：每次取出 1 只球，记下球的颜色后放回袋中，作下次抽取，连续取 3 次.

解 在放回抽样中，样本点可视为重复排列，因此，样本空间样本点总数为 $n=9^3$，事件 A 含有样本点数为 $n_A=6^3$，所以，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{6^3}{9^3}=\frac{8}{27},$$

事件 B 含有样本点数为 $n_B=C_3^1\cdot 3\cdot 6^2$，所以，事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{C_3^1\cdot 3\cdot 6^2}{9^3}=\frac{4}{9}.$$

例 3 设有 N 件产品，其中有 M 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率是多少？

解 在 N 件产品中抽取 n 件(这里是指不放回抽样)，所有可能取法即样本空间样本点总数有 C_N^n，根据问题要求，设事件 A：“其中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品”. 事件 A 相当于从 M 件次品中取 k 件，从 $N-M$ 件正品中取 $n-k$ 件，由乘法原理，所有可能的取法数为 $C_M^kC_{N-M}^{n-k}$，于是，所求事件的概率为

$$P=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{1.3.2}$$

此公式称为**超几何分布的概率公式.**

例 4 设有 n 个形状相同的球，每个球都等可能地落在 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中的每一个盒子里，且每个盒子能容纳的球数是没有限制的，试求下列事件的概率：