

JINGJI SHUXUE JICHU

21世纪

高职高专经济管理系列教材

经

济

数

学

基

础

经济数学基础(一)

Jingji Shuxue Jichu

- 主 编 周 铭
- 副主编 聂 华 肖海军
- 主 审 魏 莹

重庆大学出版社

• 主要目录 •

21 世纪高职高专经济管理系列教材

经济数学基础 (一)

主 编 周 铭
副主编 聂 华 肖海军
主 审 魏 莹

重庆大学出版社

• 内容提要 •

本书以“应用为目的,必须够用为度”为原则,按照《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》编写的。

本书内容为函数与数学模型、极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、常微分方程和数学软件 Mathematica。

本书突出应用思想、强化建模意识、加强直观解释、增加软件运用;说理浅显、例题丰富、特征明显、脉络分明,便于教学与自学;可作为高职高专院校、成人高校和本科院校的二级职业技术学院的经济和管理类专业的教材,也可作为经济管理人员的自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础. (一)/周铭主编. —重庆:重庆大学出版社,2002. 8
21 世纪高职高专经济管理系列教材
ISBN 7-5624-2518-3

I. 经... II. 周... III. 经济数学—高等学校:技术学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048805 号

21 世纪高职高专经济管理系列教材

经济数学基础(一)

主 编 周 铭

责任编辑:肖顺杰 谭敬 版式设计:邱 慧

责任校对:廖应碧 责任印制:张永洋

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400044

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本:787×960 1/16 印张:14.5 字数:260 千

2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5624-2518-3/F·243 定价:18.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

系列教材编委会

(以姓氏笔画为序)

王 珑	王学梅	王庆全	王庆国	朱 虹
吴跃平	张 矢	张 炜	张孝友	张举刚
张国梁	何 隽	安德利	吕何新	陈 跃
季 辉	周 铭	苟爱梅	姚建平	徐 阳
夏昌祥	黄启良	袁建平	傅志明	谢 红

系列教材参编学校

(排名不分先后)

天津职业大学	天津工业职业技术学院
石家庄经济学院	浙江树人大学
西南农业大学经贸学院	长沙民政职业技术学院
株洲职业技术学院	广西机电职业技术学院
武汉职业技术学院	贵州大学职业技术学院
昆明冶金高等专科学校	湖北十堰职业技术学院
湖北孝感职业技术学院	上海工会管理干部学院
湖北长江职业技术学院	重庆电子职业技术学院
广西职业技术学院	新疆机电职业技术学院
东南大学经济管理学院	西北工业大学金叶信息技术学院
成都电子机械高等专科学校	广东交通职业技术学院
浙江工业大学职业技术学院	重庆工业高等专科学校
南昌水利水电高等专科学校	重庆光彩职业技术学院

总序

总序

经过近 20 年的改革开放,我国已基本建立了市场经济体系,加入世界贸易组织,更加快了全球经济一体化的进程。国外先进的管理方法和理念、新的经济理论和符合国际惯例的贸易规则,必须在经济管理教材中得到充分体现。

市场经济和管理科学的发展,需要一大批懂理论、善操作、面向一线的经济管理专门人才,这是高等职业教育的重要任务。根据高等职业教育应定位为“理论够用,注重实际操作”的精神,适应高等职业教育教材建设的需要,教育部已经在全国着手教材建设,重庆大学出版社《21 世纪高职高专经济管理系列教材》便是在这种背景下产生的。

在教材方面,目前可供大学本科学学生选用的较多,适合高等职业教育学生需要的教材极少。重庆大学出版社已经于 2000 年出版了高职高专信息类、公共课程类两套系列教材,本系列教材是在吸收前两套系列教材编写经验的基础上,联合全国二十多所相关院校编写出版的(该系列教材首期出版共 20 种,以后将陆续出齐专业基础课和专业课)。首期出版的教材是:《经济学原理》《经济法概论》《现代企业管理》《市场营销学》《市场营销案例与分析》《实用公共关系》《管理学基础》《管理信息系统》《审计理论与实务》《金融概论》《国际金融》《统计学基础》《应用写作》《会计学基础》《成本会计》《财务会计》《会计模拟实训教程》《财务管理》《经济数学基础(一)》《经济数学基础(二)》。

本系列教材的特点,一是紧扣教育部高职高专培养目标和对各门课程的基本要求,编写目的明确,针对性强;二是理论精当,繁简适度,内容取舍合理,注意了知识的系统性、实用性和先进性;三是将案例融入相关理论,既使理论讲述生动、形象,又体现了高职高专应用性人才的培养目标;四是反映了最新

政策法规和制度,选用最新的数据资料,吸收了理论和实践的最新成果;五是各章末有小结并附有案例讨论题、复习思考题或习题,便于学生课后复习和练习。

经济管理类教材的编写涉及我国许多处于不断完善中的法规、政策和制度,各方面对这套教材的期望与要求又很高,尽管我们力求完美,但编写的难度较大,书中不免存在一些缺点和疏漏,恳请专家、读者批评指正,以便修订再版时进一步完善。

编委会

2002年1月5日

编者的话

编者 E.A 的话

本教材是 21 世纪高职高专经济类专业系列教材之一,本教材的编写是根据教育部高职高专培养目标和本课程的基本要求,结合全国高职高专经济类系列教材研讨会精神编写而成,并经系列教材编审委员会审定。

本教材编写的立足点放在“培养高级技术应用型人才的应用能力”上,突出“以应用为目的,必须、够用为度”的指导思想。引例、例题与习题的选取尽可能反映当今社会经济生活,突出经济类数学教材的特色。

本教材分(一)、(二)两册,共十三章,上册建议学时为 80 学时,下册建议学时为 70 学时。教学中可根据学生的学习情况适当安排一定数量的实训时间。

本教材经过拟纲定纲,分工编写,主编统稿,主审审阅,集体评稿,主编定稿几个环节编写而成。具有以下特色:

1. 结合高职高专经济管理类专业特点,淡化理论,力图以实例引出数学问题,进而分析、解决所要求解的问题,进行数学的概念、理论、方法、应用等内容的介绍与阐述。
2. 在不失教材内容的科学性与系统性的前提下,不刻意追求数学的完整性,理论的推导或证明尽可能简单明了,能用直观图形说明的则只用直观图形去说明,减少了严密理论证明的冗长与繁琐。
3. 突出实际应用,密切联系经济专业特点,尽力采用经济专业知识去讲解应用实例。
4. 文字叙述力求深入浅出,形象思维,注意培养学生的抽象思维、逻辑推理,观察综合、应用计算以及分析问题和解决问题的能力。

目 录

E.A 目录

1	第一章 函数	101
1	第一节 函数的概念	101
17	第二节 数学模型方法简述	104
25	小结	104
26	复习题一	111
28	第二章 极限与连续	130
28	第一节 极限的定义	135
38	第二节 极限的运算	141
45	第三节 函数的连续性	148
51	小结	151
54	复习题二	157
57	第三章 导数与微分	170
57	第一节 导数	173
63	第二节 导数的运算	179
73	第三节 微分	181
77	小结	181
78	复习题三	188
80	第四章 导数的应用	188
80	第一节 微分中值定理	192
85	第二节 函数的单调性 极值与最值	202
92	第三节 曲线的凹向与拐点	202
97	第四节 导数在经济上的应用	201

101	小结
102	复习题四
104	第五章 不定积分
104	第一节 不定积分的概念和性质
112	第二节 不定积分的计算方法
130	小结
132	复习题五
134	第六章 定积分
134	第一节 定积分的概念和性质
142	第二节 基本定积分公式
145	第三节 定积分的积分法
148	第四节 广义积分
152	第五节 定积分的应用
160	小结
162	复习题六
163	第七章 常微分方程
163	第一节 微分方程的基本概念
165	第二节 一阶微分方程
170	第三节 可降阶的高阶微分方程
173	第四节 二阶线性微分方程
179	第五节 常微分方程在数学建模中的应用
182	小结
184	复习题七
186	第八章 数学软件 Mathematica 简介
186	第一节 Mathematica 的基本操作
188	第二节 用 Mathematica 进行初等运算
195	第三节 用 Mathematica 进行微积分计算
202	第四节 解方程
205	习题答案
221	参考文献

第一章

函数

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象,是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型.其思想是:通过某一事实的信息去推知另一事实.在经济学、管理学及其他社会科学的研究中经常会遇到函数.本章将在中学数学已有的函数知识的基础上,进一步理解函数概念、并介绍反函数、复合函数及初等函数的性质,为微积分的学习打下基础.

第一节 函数的概念

一、变量

(一) 变量与常量

在我们观察自然现象或社会现象的过程中经常会遇到两种不同的量,其中一些量在观察过程中始终保持固定的数值,这种量称为常量,一般用字母 a, b, c 等表示;另一些量在观察过程中可取不同的数值,这种量称为变量,一般用 x, y, z 等表示.例如物体的重力加速度,某段时间内某种商品的不变价格等均是常量;一天的气温、湿度、生产过程的产量是在不断变化的,它们是变量.

(二) 区间

变量有时可取任意实数值,有时又要受到某种限制,这要根据问题的具体性质来决定.例如产量不能为负数,圆的内接正多边形的边数只能是不小于3的自然数…….

通常用“区间”来表示变量 x 的变化范围. 设 a, b 是两个给定的实数, 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数的全体叫做闭区间, 用记号 $[a, b]$ 表示; 满足 $a < x < b$ 的实数的全体叫做开区间, 用记号 (a, b) 表示; 满足 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的实数的区间叫做半开闭区间, 用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示.

以上这些区间叫做有限区间. 除了有限区间之外, 还有无限区间.

$(a, +\infty)$ 表示全体大于 a 的实数; $[a, +\infty)$ 表示全体不小于 a 的实数;

$(-\infty, b)$ 表示全体小于 b 的实数; $(-\infty, b]$ 表示全体不大于 b 的实数;

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数.

其中, $-\infty, +\infty$ 分别读成负无穷大, 正无穷大.

(三) 邻域

邻域是今后常用的一个概念, 在数轴上, 一个以 x_0 点为中心, 半径为 δ 的对称开区间称为 x_0 的 δ 邻域, 记为 $N(x_0, \delta)$. 很明显, 该邻域内任一点 x 到 x_0 的距离都小于 δ , 即 $|x - x_0| < \delta$.

二、函数概念

(一) 引例

例1 有一工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里, 它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b 公里, 工厂的产品必须经火车站 C 才能转销外地. 已知汽车运费

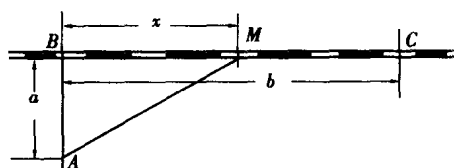


图 1-1

是 m 元/吨公里, 火车运费是 n 元/吨公里 ($m > n$), 为使运费最省, 想在铁路上另修一小站 M 作为转运站, 那么运费的多少决定于 M 的地点. 试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数, 如图 1-1.

解 设 $|BM| = x$, 运费为 y .

根据题意

$$|AM| = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$|MC| = b - x$$

则

$$y = m\sqrt{a^2 + x^2} + n(b - x)$$

$$0 \leq x \leq b$$

例2 某运输公司规定货物的吨公里运价为: 在 a 公里以内, 每公里 k 元; 超过 a 公里, 超过部分每公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关

系.

解 根据题意可列出函数关系如下

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a \end{cases}$$

例3 某工厂生产某产品,每日最多生产200单位.它的日固定成本为130元,生产一个单位产品的可变成本为6元.求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.

解 设日总成本为 C ,平均单位成本为 $\bar{C}$,日产量为 x .由于日总成本为固定成本与可变成本之和.根据题意,日总成本函数为

$$C = C(x) = 130 + 6x$$

平均单位成本函数为

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{130}{x} + 6 \quad (0 < x \leq 200)$$

(二) 函数的定义

上面三个例子的实际意义虽然不同,但它们都是通过一定的对应规则来反映两个变量之间相互依赖的对应关系,函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义1 设有两个变量 x 和 y ,变量 x 的变化范围为 $D(D \neq \Phi)$,存在一个对应规则 f ,使得对于 D 中的每一个值 x ,按照对应规则 f 都有惟一确定的 y 值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为

$$y = f(x), x \in D.$$

x 称为自变量, y 称为因变量, x 的变化范围 D 称为函数的定义域,记为 D 或 D_f .

对定义域 D 中的某一个值 x_0 ,按照对应规则 f 与之对应的 y_0 值称为 x_0 所对应的函数值或函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, $f(x)|_{x=x_0}$.全体函数值所构成的集合称为函数的值域,记为 Z 或 Z_f ,即:

$$Z_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

由函数的定义知函数是由两个要素决定的:一个是定义域,它是一个非空实数集合,描述自变量的变化范围;另一个是对应规则,常用符号 f, g, h 等表示,它反映因变量与自变量的相依关系.两要素均相同的两个函数为相同的函数,否则就是不同的(或不相等的).因此,只要函数的定义域与对应规则给定,无论自变量与因变量用什么符号表示,所给函数均为同一个函数,即当 x 和 t 的变化范围均为非空数集 D 时,函数 $y = f(x)$ 与 $u = f(t)$ 是相同的.

例4 下列各对函数是否相同?为什么?

$$(1)f(x)=x, \quad g(x)=\sqrt{x^2}; \quad (2)f(x)=|x|, \quad g(x)=\sqrt{x^2};$$

解 (1)不相同,因为对应规则不同,当 $x=-1$ 时, $f(-1)=-1 \neq g(-1)=1$;

(2)相同,因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规则相同,定义域均为 $(-\infty, +\infty)$.

例5 求下列函数定义域

$$(1)y=f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

$$(2)y=g(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$$

解 (1)要使 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 有意义,必须分母 $x^2-1 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域为 $D_f=(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,或 $D_f=\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq \pm 1\}$ (R 表示实数集合).

(2)要使 $g(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 有意义,必须 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0$,

$$\text{即} \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{所以}$$

$y=g(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为

$$D_g = [-1, 0) \cup (0, 1], \text{或 } D_g = \{x | -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$$

(三)复合函数

函数 $y=f(x)$ 中的“ f ”表示函数关系中的对应规则,即对每一个 D_f 中的 x 按规则 f 有一个确定的 y 值与之对应, $f(x)$ 表示将规则 f 施用于 x ,如把 $f(x)$ 中括号内的 x 替换成 D_f 中的某个具体数值或表示数值的字母以及数学式子,则表示将规则 f 施用于那个具体数值或表示数值的字母以及那个数学式子.

例6 设 $y=f(x)=x^2+3$,求 $f(2), f(a), f(t+1), f(\frac{1}{x}), f[f(x)], f[g(x)]$ (其中 $g(x)=\sin x+2x$)

$$\text{解 } f(2)=2^2+3=7, f(a)=a^2+3$$

$$f(t+1)=(t+1)^2+3=t^2+2t+4,$$

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2+3=\frac{1}{x^2}+3$$

$$f[f(x)]=(x^2+3)^2+3=x^4+6x^2+12,$$

$$f[g(x)] = f[\sin x + 2x] = (\sin x + 2x)^2 + 3$$

上式中 $y = f[g(x)]$ 确定了 y 是 x 的函数, 称它是函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成的 x 的复合函数.

定义 2 设 $y = f(u)$ 是 u 的函数, $u = \varphi(x)$ 是 x 的函数, 如果 $u = \varphi(x)$ 的值域 Z_φ 是 $y = f(u)$ 定义域 D_f 的子集 (更一般地 $Z_\varphi \cap D_f \neq \Phi$), 则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数, 称该函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的 x 的复合函数. 记做

$$y = f[\varphi(x)]$$

称 $y = f(u)$ 为外层函数, $u = \varphi(x)$ 为内层函数, u 为中间变量, x 为自变量.

由上可知 x 的复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 实际上是对应规则 f 施用于数学式子 $g(x)$ 的结果.

例 7 (1) $y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 - 1$ 复合而成 x 的复合函数 $y = \arcsin(x^2 - 1)$, 其定义域 $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

(2) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \cos x$, 通过两个中间变量 u, v 构成 x 的复合函数 $y = e^{\cos^2 x}$, 其定义域 $D = R$;

(3) $y = \lg u$ 与 $u = \sin x - 2$ 不能复合成 x 的复合函数, 因为外层函数 $y = \lg u$ 的定义域 $D_f = (0, +\infty)$ 与内层函数 $u = \sin x - 2$ 值域 $Z_\varphi = [-3, -1]$ 的交集为空集, 因此对应规则 f 施用于数学式子 $\varphi(x) = \sin x - 2$ 无意义. 但 $y = \sin x - 2$ 作为外层函数, $u = \lg x$ 作为内层函数可以复合成函数 $y = \sin(\lg x) - 2$, 其定义域 $D = (0, +\infty)$.

例 8 把下列复合函数分解成较简单的函数;

$$(1) y = \sin(\ln \sqrt{x^2 - 1}); \quad (2) y = \tan^5(3^{x^2 - 1} + 2)$$

$$\text{解 } (1) y = \sin u, u = \ln v, v = w^{\frac{1}{2}}, w = x^2 - 1$$

$$(2) y = u^5, u = \tan w, w = v + 2, v = 3^t, t = x^2 - 1$$

通过举例, 看出对复合函数进行分解是由外到内、逐层分解. 且分解后每一层应是简单函数.

(四) 反函数

设某种商品在一段时期内其价格 p 是不变的, 某经销商销售该商品的数量为 q 时, 其销售收入 R 为

$$R = pq$$

此时销售收入 R 是销售量 q 的函数, q 是自变量; 另一方面, 若要实现销售收入 R , 则该销售商需完成的销售量 q 为

$$q = \frac{R}{p}$$

此时销售量随销售收入而定, q 是 R 的函数, R 为自变量; 我们把函数 $q = \frac{R}{p}$ 叫做函数 $R = pq$ 的反函数.

定义 3 设 $y = f(x)$ 是 x 的函数, 定义域为 D_f , 其值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值, 都在 D_f 中存在惟一满足 $y = f(x)$ 的 x 值与之对应, 则 x 也是 y 的函数, 记作 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 也常记作 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Z_f$.

事实上, $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数. 习惯上, 用 x 表示自变量, y 表示因变量, 于是反函数常习惯地表示为 $y = f^{-1}(x)$ 形式.

给出一个函数 $y = f(x)$, 如何求它的反函数? 一般来说, 只要把 x 用 y 表示出来, 再按习惯用 x 表示自变量, y 表示因变量即可.

例 9 求 $y = 2x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 2x + 1$ 解出 x , 得 $x = \frac{y-1}{2}$, $y \in (-\infty, +\infty)$, 即为 $y = 2x + 1$ 的反函数, 则习惯表示的反函数为 $y = \frac{x-1}{2}$, 其图形见图 1-2(a).

可以证明, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-2(b) 所示.

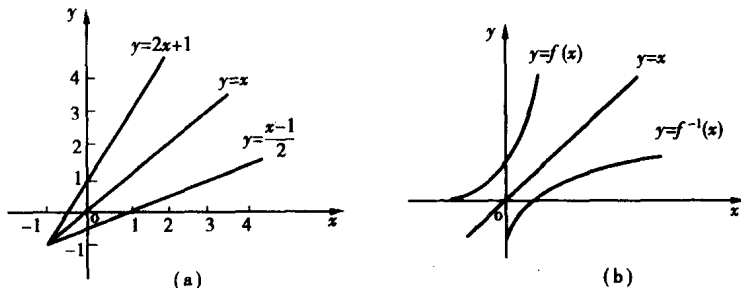


图 1-2

(五) 分段函数

有时一个函数关系要用两个或两个以上的式子来分段表示, 才能将一个函数完整而准确地表达出来, 这在例 2 中已见到, 运价 m 和里程 s 之间的函数关系:

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a \end{cases}$$

定义4 用两个或两个以上的式子表示的一个函数,叫做分段函数.

注意:分段函数仍表示一个函数,不要因分段函数用几个式子表示就误认为是几个函数,且分段函数的函数值是用自变量所在区间的式子来计算的.

(六) 常用经济函数举例

在解决一些实际问题时,经常需要根据实际意义建立变量之间的函数关系式.

1. 需求函数与供给函数 商品的需求量是消费者有支付能力且愿意购买的商品的数量,它受消费者收入、消费习惯、商品的价格等众多因素的影响,现将该商品价格以外的其他因素看做不变,则该商品的需求量 Q 就随着商品自身价格 P 的变化而变化,从而构成了 P 的函数,称为该商品的需求函数,记为 $Q=f(P)$. 一般地,商品的需求量 Q 随该商品价格 P 的增加而减少,即 Q 是 P 的单调减少函数. 需求函数 $Q=f(P)$ 的曲线称为需求曲线. 根据观察可得到一些价格与需求的数据 (P, Q) , 常用下列一些简单初等函数来拟合需求函数,建立经验曲线:

$$\text{线性函数 } Q = b - aP \quad a, b > 0$$

$$\text{反比函数 } Q = \frac{k}{P} \quad k > 0, P \neq 0$$

$$\text{幂函数 } Q = \frac{k}{P^\alpha} \quad \alpha, k > 0, P \neq 0$$

$$\text{指数函数 } Q = ae^{-bP} \quad a, b > 0$$

商品的供给量指生产者愿意提供且又能供给市场的商品的数量,它也受该商品及其相关商品价格等因素的影响,现假定其他因素固定不变,仅考虑商品的供给量 Q 与该商品价格 P 之间的函数的关系,称之为商品的供给函数,记为 $Q=g(P)$. 一般地它是 P 的单增函数,其曲线称为供给曲线. 供给曲线是从左至右逐渐上升的曲线,常用下列一些函数拟合供给函数,建立经验曲线:

$$\text{线性函数 } Q = aP - b \quad a, b > 0.$$

$$\text{幂函数 } Q = kP^\alpha \quad k, \alpha > 0.$$

$$\text{指数函数 } Q = ae^{bP} \quad a, b > 0$$

2. 成本函数、收益函数、利润函数 生产一定数量的某种产品所发生的支出称为成本,包括两类:一类随生产产品数量的变化而变化,如劳动力的工资、原材料的支出费用等,这类成本为可变成本;另一类成本不随产品产量的变化而变化,始终固定不变如房屋租金、设备的折旧费等,称为固定成本,从而有

总成本 = 固定成本 + 可变成本

设 Q 为产品的产量, C 为产品的总成本, 则易知 C 随 Q 的增加而增加, 即总成本是产量 Q 的单增函数, $C = C(Q)$ 称为产品的总成本函数, C_1 为固定成本, C_2 为可变成本, Q 为产量, 则有总成本函数

$$C(Q) = C_1 + C_2(Q)$$

平均成本

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$$

较简单的成本函数是线性成本函数

$$C = C_0 + aQ$$

其中, C_0 表示固定成本, a 表示单位变动成本.

生产者生产并销售 Q 单位产品所得的收益 $R = PQ$, 由需求函数 $Q = f(P)$ 知, 商品价格 P 是依赖于需求量 (即商品的销售量) Q 的函数, 故总收益 $R = P(Q) \cdot Q$ 是销售量 Q 的函数, 称该函数为总收益函数.

总收入与总成本之差称为总利润, 记为 L . 即

$$L = R - C = R(Q) - C(Q)$$

称为总利润函数.

例 10 某厂生产一种元器件, 设计能力为日产量 100 件, 每日固定成本为 140 元, 每件的单位变动成本为 10 元, 每件销售价格为 14 元, 试求每日的总成本、收益及利润函数.

解 由题意知, 成本函数 $C = C(Q) = 140 + 10Q$ ($0 < Q \leq 100$)

收益函数 $R = R(Q) = PQ = 14Q$

利润函数 $L = L(Q) = R(Q) - C(Q) = 4Q - 140$

令 $L(Q) = 4Q - 140 = 0$, 得 $Q_0 = 35$ 即为每日生产的保本产量.

三、函数的简单性质

(一) 函数的单调性

定义 5 设函数 $y = f(x)$ 在 D 上有定义, 从 D 中任取两点 x_1, x_2 , 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上单调增加 (或单调递增); 如对 D 中的任意两点 x_1, x_2 , 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上单调减少 (或单调递减).