集合论初步

数理化基础知识丛书 任吉麟 刘久鉴

贵州人民出版社

集 合 论 初 步

任吉麟　刘久鉴 编

贵 州 人 民 出 版 社

责任编辑　何伊德
装帧设计　夏顺利
封面设计　曾布圣
　　　　　黄小祥

集合论初步　　任吉麟　刘久鉴

贵州人民出版社出版
（贵阳市延安中路5号）
贵州新华印刷厂印刷　　贵州省新华书店发行
787×1092毫米32开本　5.875印张　111千字
印数1—12,000
1980年12月第1版　　1980年12月第1次印刷

书号：7115·545　定价：0.48元

出版说明

本书是为了配合全日制十年制中学对集合运算和命题演算的教学而编写的。全书共分两章。第一章较系统而详细地介绍了集合论的基础知识，并讲述了集合论在初等数学中的一些应用。第二章在简要介绍了命题演算的基础上，着重应用合取和析取的观点讨论不等式（组）的解，内容丰富，讲解通俗。

本书可供中学数学教师教学参考及数学爱好者学习。

目　　录

第一章　集合论的基础知识

任　吉　麟

集合是现代数学中最基本的概念之一．集合论乃是研究集合的运算及其性质的数学分支．本世纪以来，集论对数学的发展产生了巨大的影响，这是举世公认的事实．由于集论的思想越来越扩大，它今天已成为数学各个分支不可缺少的基础和工具．集论的初步知识已编入现行中、小学数学教材，这将对中、小学数学教学现代化产生深远的影响．

为了适应当前中、小学数学教学改革的需要，省数学学会和贵阳市教育局为中学数学教师举办了数学讲座．本章就是以在这个讲座上介绍集合论的初步知识时所用的讲稿为基础整理而成的．全章共分五节，主要介绍集合的基本概念；集合的代数运算；集合的映射；集合的势；可数集与不可数集等．在编写时，试图紧密结合现行中、小学全日制十年制统编教材的内容，用集论的观点讨论了中学教材中有关方程的解集，解分式方程、无理方程的增根问题；解不等式，轨迹及有限集计数等问题，以供中、小学数学教师教学参考和高中学生课外阅读之用．

本章前三节包括了中学数学统编教材中与集合论有关的全部内容．这几节写得比较详细，对于即使尚未接触过集论

知识的读者来说，只要具有初中毕业的文化程度和一定的抽象思维能力，通过自学是不难理解的．鉴于教师所需要的知识，无论在深度与广度方面都应该超过所授教材的内容，方能举重若轻，运用自如．因此，第三节对现代数学的另一基本概念——映射，作了较为详细的讨论．同时，还把结合法作为一种特殊的映射介绍给读者．第四、五节稍难一些，初学者可以略去，而对中学数学教师来说，则是应该理解和掌握的．

由于时间限制，本章对有关序集的概念、基数运算及序数等未予讨论；本章的部分习题解答，是段应全同志给做的，特此说明并致谢意．同时，限于笔者水平，错误或不当之处在所难免，希望读者批评、指正．

§1 集合的概念

1 集合的概念

集合是数学中的一个原始概念．正如几何中的点、线、面、体一样，无法用更简单的概念给予精确定义，只能用它的同义语或与之等价的概念作适当的描述．这样的定义，也可以称为描述性定义．

任何具有某种属性的具体的或抽象的事物(研究对象)，把它们作为一个整体看待，这个整体就叫做一个**集合**，简称**集**．

例如“一班学生”的“班”、“一队人马”的“队”、

"一堆石块"的"堆"、"一群牛羊"的"群"等都是一些具体对象组成的集合．所有拉丁字母、所有自然数、所有实数、所有复数、一条直线上所有的点、一个平面上所有的直线、空间内所有的平面等又组成一些各式各样的集合．而组成这些集合的对象则都是抽象的．

组成某集合的每一个事物，叫做这个集合的**元素**．

若组成集合的元素是数，这个集合叫做**数集**．若组成集合的元素是点，这个集合叫做**点集**．

我们常用大写拉丁字母 A，B，M，N，……表示集合，用小写拉丁字母 a，b，x，y，……表示元素．

当事物 a 是某集合 A 的一个元素时，我们就说元素 a **属于**集合 A，并记作

$$a \in A \text{ 或 } A \ni a$$

读作"a 属于 A"或"A 包含 a"．

当对象 b 不是某集合 B 的元素时，我们就说元素 b **不属于**集合 B，并记作

$$b \notin B \text{ 或 } B \not\ni b$$

读作"b 不属于 B"或"B 不包含 b"．

2 集合的表示法

集合一般有两种表示方法．

第一种是**列举法**：就是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合．

例 1 "所有小于10的正整数"所组成的集合 A 可以写成

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$．

例 2　“所有两位素数”所组成的集合D可以写成

$D=\{11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$.

例 3　“全体自然数”所组成的集合N可写成

$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

虽然集合N的元素是列举不尽的，但是已经列出了其中有代表性的元素，省略号表示可以继续顺次地写出它的元素．又**自然数集**常用N表示之.

第二种是**描述法**：就是用描述集合元素的共同特征的方法来表示这个集合．例如前面所举的例 1 、例 3 亦可写成

$A=\{a|a$ 是小于10的正整数$\}$；

$N=\{n|n$ 为自然数$\}$.

一般用记号

$A=\{x|x\in B, P(x)\}$表示使命题 $P(x)$ 成立的集合 B 中元素的全体所组成的集合．例如前面所举的例 2 亦可写成

$D=\{x|x\in N, 9<x<100$，且 x 为素数$\}$.

现在我们用描述法举出一些常用的集合：

例 4　$Z=\{x|x=\pm y, y\in N$或$y=0\}$；

$Q=\{x|x=\dfrac{n}{m}, m, n\in Z, m\neq 0, m、n$互素$\}$；

$R=\{x|x$为实数$\}$；

$C=\{a+bi|a, b\in R\}$.

它们分别称为**整数集**、**有理数集**、**实数集**和**复数集**．上述符号均为数学中的惯用符号.

例 5 $B=\{x|x^2-5x+4=0\}$即表示方程 $x^2-5x+4=0$ 所有的解所组成的集合.

一般我们把一个方程所有的解组成的集合叫做这个方程的**解集**.

例 6 $E=\{(x, y)|x-2y=1, x, y\in R\}$ 即表示方程 $x-2y=1$的解集. 从几何上看, 方程 $x-2y=1$ 的解集就是直线 $x-2y=1$ 上的**点集**.

例 7 $F=\{(x,y)|x^2+y^2=1, x, y\in R\}$ 此即表示圆心在坐标原点的单位圆周上的点集。

例 8 设α与β表示两个实数, 并设$\alpha<\beta$, 则集合 $A=\{x|x\in R, \alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$ 或 $B=\{x|x\in R, \alpha<x<\beta\}$ 分别叫做以α, β为端点的**闭区间**或**开区间**, 并用记号 $[\alpha,\beta]$ 或(α,β)表示. 类似, 有**半开**(或**半闭**)**区间**$[\alpha,\beta)$ 及**无限区间** (α,∞) 等. 例如:

$$G=\{x|x\in R, 0<x<1\};$$

$$H=\{x|x\in R, 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

即分别表示开区间 $(0,1)$ 及闭区间 $[0,1]$ 内所有实数所成之集.

比较集合的两种表示方法, 可以看出, 列举法的好处是可以具体地看清集合的元素; 描述法的优点是能够刻划出集合中元素的共同特征. 究竟采用哪一种表示法, 要根据具体情况来确定. 譬如暂时只知道元素性质的集合, 就只好采用描述法表示. 例如:

$$M=\{x|x^2-5x+4=0\}$$

当求出方程$x^2-5x+4=0$的解后，则M也可用列举法表示，即$M=\{1, 4\}$.

3　子集

为了以后叙述方便，在讲子集之前，我们先引入下面的一些记号. 设p与q表示两个命题，我们用“$p\Longrightarrow q$”表示“如果有p则必有q”；用“$p\Longleftrightarrow q$”表示“如果有p则必有q，并且反过来也对”，即p与q等价.

定义 1　设有两个集A和B，若属于集A的每个元素也同时属于集B，即若对任一元素$a\in A\Longrightarrow a\in B$，则称集$A$是集$B$的**子集**，记为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

读作“A包含于B”或“B包含A”. 记号

$$A\nsubseteq B \text{ 或 } B\nsupseteq A$$

表示对$A\subseteq B$的否定，即表示集A不是集B的子集. 读作“A不包含于B”或“B不包含A”.

由此可见，$A\nsubseteq B$必须且只须A中至少有一个元素不属于集B，即

$$A\nsubseteq B \Longleftrightarrow A\text{中至少有一元素 } a\notin B$$

下面列举一些关于集合的子集与包含关系的例子：

例 9　{高二（1）班全体男学生}$\subseteq${高二（1）班全体学生}.

例10　{所有偶数}$\subseteq${所有整数}即

$$\{x \mid x=2y,\ y\in Z\}\subseteq Z.$$

例11　$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq C$.

例12　设$A=\{1,2,3\}$，则下面的集都是集A的子集：

$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$.

例13　{所有直角三角形}$\subseteq${所有三角形}$\subseteq${所有多边形}$\subseteq${所有平面图形}.

由定义1直接可得下述定理：

(1.1)　任何集都是它自己的子集，即$A\subseteq A$.

(1.2)　设有集A，B，C，若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$.

证　设任意元素$x\in A$，因$A\subseteq B$，故$x\in B$；又因为$B\subseteq C$，由$x\in B$，则$x\in C$. 由此可见，A的任意元素也都是C的元素，因此$A\subseteq C$.

由(1.1)可知，当$A\subseteq B$时并不排出$B\subseteq A$，从而有：

定义2　当$A\subseteq B$，但$B\nsubseteq A$，即B至少含有一个不属于A的元素时，称A为B的**真子集**. 表示为$A\subset B$或$B\supset A$.

例如，偶数集是整数集的真子集；在集N，Z，Q，R，C中，前者都是后者的真子集.

定义3　设有集A与B，若关系$A\subseteq B$及$B\subseteq A$同时成立，称集A与集B**相等**. 记作：

$$A=B.$$

换言之，当且仅当集A与集B由完全相同的元素组成时，才有记号$A=B$.

$$\text{记号}\quad A\neq B$$

是对$A=B$的否定. 显然，两个集合只当它们当中的一个至少有一个元素不属于另一个时它们才不相等.

注意：**定义3**是我们证明两个集合相等的根据.

例14 设 $A=\{1,2,3\}$；$B=\{x|x\leqslant 3$ 且 $x\in N\}$；

$C=\{x|x$是 6 的因数，6 除外$\}$；

$D=\{1,2,3,4\}$。

则 $A=B=C\subset D$。

例15 $\{x|x^2-5x+4=0\}=\{1,4\}$。

由上述几个定理还可得下述诸定理：

(1.3) A为B的真子集的充要条件是 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$。

(1.4) 对每个集A，总有 $A=A$。

(1.5) 若$A=B$，则$B=A$。

(1.6) 若$A=B$，$B=C$，则$A=C$。

以上四个定理的真实性是显而易见的，故证明从略。

在集合论中，为了叙述方便，把不含任何元素的集合称为**空集**．空集只有一个，用记号ϕ表示。

例如 $A=\{x|x\in R,\ x^2+1=0\}$

$B=\{n|n\in N,\ n>10$且$n<5\}$

都是空集。

值得注意的是，要是不把空集当作集，则势必在很多情况下，只要我们一讲到集，就得声明一句"如果此集存在的话"，这样就太烦琐了．因此，空集的引入，正如数"0"的引入一样，是由于实际需要，以后还可以进一步看出来。

(1.7) 空集是任一集的子集。

证 用反证法，设空集ϕ不是某集A的子集，即$\phi\nsubseteq A$，则存在$x\in\phi$而$x\notin A$，此与空集的定义矛盾，因此，$\phi\subseteq A$.

4 几点说明

集合作为一个数学概念，应有所规范．因此，对于集合这一基本概念，还有必要作以下几点说明：

1） 集合是指某一类事物的“整体”．“整体”其实是集合的同义语．此外常用的集合同义语还有“全体”、“总体”、“系”、“族”、“类”等等．

2） 集合中的元素必须是相异的和确定的．

例如$A=\{1,2,3,4\}$是一个集合，而 a，a，b，c 这四个字母不组成一个集合，但其中三个字母 a，b，c 组成一个集合$\{a, b, c\}$．

又如$A=\{x|x^3-x^2=0\}$是集$\{0, 1\}$，而不是$\{0, 0, 1\}$．因后者不是一个集合．

再如“一切非负实数”有确定的界限，组成一个集合，而“绝对值很小的全体实数”无确定的界限，不能组成一个集合．

3） 集合与组成它的元素之间的次序无关．

例如集$\{a,b,c\}$；$\{b,a,c\}$；$\{a,c,b\}$；$\{c,b,a\}$与$\{c,a,b\}$都是同一集合．

4） 由单独一个元素 a 所组成的集$\{a\}$叫做**单元素集**．

注意不要把单元素集与它所含的唯一元素混为一谈，混淆了有时会在逻辑上产生混乱．例如，令 $a=\{1, 2, 3, 4\}$，集$A=\{a\}$．若不区别单元素集A与它的唯一元素 a，就会引出矛盾．一方面作为单元素集A只含有唯一元素 a，另一方面若把A看成就是 a，则A又包含有四个元素了．

5) 关于集合的集合

一个集合的元素本身也可以是由其他元素组成的集合。例如银河系由星球所组成，而银河系的每个元素——星球，又可以看成是由构成它们的一切原子所组成的集合。又如平面上所有的直线组成一个集合 A，而 A 的每个元素 l（直线）又是由它上边的点组成的集合。这就是说，如果一个集合的元素是集合，那么，这个集合的元素的元素也仍然可以是集合。以此类推。

然而，"包罗一切的集合"或"由一切集合组成的集合"或与此类似的术语，我们必须避免使用，因为这会导致集合论中的悖论。为了说明这个问题，我们来看下面著名的**罗素悖论**。

我们通常所遇到的集合都不包含它自身作为元素。例如上面所提到平面上所有的直线组成的集合 A，它由平面上一切直线所组成，而 A 并非直线，所以它不以它自身（即 A）作为元素：$A \notin A$。同样，A 的每个元素 l（直线）作为集合，它是由它上边的点所组成的，但直线并不是点，所以 l 也不包含它自身（即 l）作为元素：$l \notin l$。我们把凡是不包含自身作为元素的集合，都叫做**寻常集**。但是，以**一切集合**作为元素的集合 S 却包含其自身作为元素。这是因为，由于一切集合都是 S 的元素，S 既然是集合，那就应该有 $S \in S$。我们把凡包含自身作为其元素的集合，都叫做**不寻常集**。于是可知，一个集合或者是寻常集，或者是不寻常集，二者必居其一，且只居其一。由于不寻常集的性质古