Riemann 对称空间

孟道骥 史毅茜 著

南开大学出版社

Riemann 对称空间

孟道骥　史毅茜　著

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

Riemann 对称空间 / 孟道骥，史毅茜著. —天津：南开大学出版社，2005.6

ISBN 7-310-02307-2

Ⅰ.R... Ⅱ.①孟...②史... Ⅲ.对称空间

Ⅳ.O186.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 016190 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

南开大学印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

880×1230 毫米 32 开本 7.25 印张 204 千字

定价:16.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书全面介绍 Riemann 对称空间的基本理论，包括 Riemann 对称空间、Riemann 对称空间的例子、正交对称 Lie 代数、Riemann 对称空间的分解和 Hermite 对称空间等五章。本书特别简要地介绍了我国在此方向的著名学者严志达、王宪钟和许以超先生的工作。本书是作者参加全国研究生暑期数学学校、南开大学数学所学术年、北京大学数学系讨论班及南开大学数学系讨论班等学术活动的心得体会。本书可供数学工作者参考，也可作为研究生的教材，还可供理论物理及相关专业的科技工作者参考。

序

几何学从 Euclid 几何到解析几何经历了很长的时期. 微积分问世后, 将其用于几何的研究, 产生了微分几何. 从研究具体的几何对象, 到研究抽象的几何对象, 于是有了 Riemann 几何, 以 Riemann 空间为其研究对象, 这是几何学发展史上的一次飞跃. 很自然的问题是, 什么样的空间是 Riemann 空间呢? 在研究中找到了很多 Riemann 空间, 如 Euclid 空间、球面空间等等, 这些空间中有很多都保持了很多对称性, 这类空间就是所谓 Riemann 对称空间.

群论产生之后, 对几何学也发生了深刻的影响, 如 19 世纪的 Klein 提出著名的"埃尔朗根纲领", 用变换群作出几何分类. 挪威数学家李 (Marius Shophus Lie, 1842–1899) 将微积分与群论结合起来, 长期从事连续变换群及其不变量的研究, 是连续变换群理论的创始人. Lie 群理论最早只与微分方程相联系, 与其他方面联系很少.

20 世纪, È. Cartan(1869–1951) 将 Lie 群用于 Riemann 对称空间的研究, 取得了非常突出的成就, 对很多常见的几何空间有了更明确的了解和很好的研究工具; 并且带动了复半单 Lie 代数与实半单 Lie 代数的研究, 促进了 Lie 群、Lie 代数在几何学、代数学、物理学、化学等领域中的应用和发展.

陈省身与华罗庚在西南联合大学任教时曾举办 Lie 群讨论班，当时正在西南联合大学学习的严志达、王宪钟参加了这个讨论班. 这是我国进行 Lie 群的学习与研究的开始. 后来他们在 Riemann 对称空间及相关领域都有很好的工作.

由于 Riemann 对称空间与许多领域联系，其应用越来越广泛，因此国内的数学界也日益认识到此学科的重要性.

本书分成五章. 第一章讲述 Riemann 对称空间的定义与基本性质. 第二章讲述 Riemann 对称空间的例子. 了解数学，不仅要知道定义、定理这些抽象的概念，而且需要知道具体的空间. 第三章讲述正交对称 Lie 代数. 这里充分表现了 Riemann 对称空间与 Lie 群、 Lie 代数的密切关系. 第四章讲述 Riemann 对称空间的分解. 特别地，我们在本章最后一节介绍了严志达、王宪钟的一些工作. 第五章讲述 Hermite 对称空间. 该章中除给出分类及 Lie 群的陪集的实现外，我们还介绍了这类空间与复空间中的对称有界域等的关系，特别是许以超教授的杰出工作.

作者之所以能撰写本书，除得益于长期在南开大学数学学院学习、讲授外，还由于有机会多次参加全国数学研究生暑期学校，南开数学所的学术年及北京大学数学系的讲学活动. 因此作者要衷心感谢这些活动的组织者与邀请者. 作者在撰写过程中还得到许多同事、同学如杨奇、邓少强等的帮助，南开大学出版社的李正明先生为此书的出版付出了辛勤劳动，作者在此向他们表示由衷的感谢.

因有国家自然科学基金 (102710176, 10371057) 和南开大学的支持与资助，使本书得以出版. 对此作者也要表示衷心的谢意.

作者还要感谢使用、阅读本书的读者. 特别欢迎读者给本书提出宝贵意见，使作者得以提高、长进.

孟道骥　史毅茜
2004 年 6 月

目 录

第一章 Riemann 对称空间

1.1 定义

众所周知，人类对几何事物的认识经历了一个长久的历史过程."几何"的希腊原名为" Geometry ", 乃"测地"之意. 这说明几何起源于对地面的测量. 但是, 在最初的测量中是把地面看成平面的. 因而人类首先认识了平面几何, 继而是立体几何. 然而, 人类所生存的空间, 并不是平面, 将其看作一个"球面"更为恰当. 随着人类活动范围的扩大, 航海学、天文学等学科日益发展, 人类对自己居住的空间有了越来越清楚的认识. 进而, 人类又认识了球面几何这一新的几何事物. 这可以说是几何学的范畴的扩大. 与此同时, 几何学的深度也日益深化, 由最初一些定性的研究到一些定量的研究, 终于达到了将几何对象数量化, 即建立了解析几何.

当然, 随着认识的深化, 人类在几何方面的知识不仅仅限于能够靠感官感觉到的对象 (低维空间的几何对象), 而且越来越深入地认识几何事物的本质. 因而也就发展了 n 维空间的几何理论, 即有了一般的 Euclid 空间与 n 维球面理论的建立与发展.

Euclid 空间与球面是有很大差别的. 例如前者是非紧致的, 后者是紧致的; 前者曲率为零, 后者曲率为正等等. 虽然如此, 但它们仍有许多共同点. 可度量性就是这些共同点中的一个. 把可度量

性抽象出来，人们在几何领域中又得到一个很有价值的研究对象，即所谓的 Riemann 流形. 自然， Euclid 空间、球面都是特殊的 Riemann 流形. 在 Riemann 流形中有许许多多的不同对象，人们理所当然对其中保持 Euclid 空间与球面共同性最多的对象尤感兴趣.

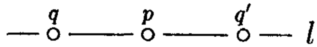
我们自然要问： Euclid 空间与球面除可度量性外，还有什么共同点？曲率为常数这是一个共同点. 在此基础上，人们讨论了常曲率空间. 其结果是大家熟知的 (根据曲率为正、负及零分为椭圆空间、双曲空间与 Euclid 空间三种类型). 从常曲率空间再发展应是什么呢？即比曲率为常数这一条件再弱一点的条件是什么呢？很容易想到“匀齐”性 (homogeneous)，即空间中任何一点的地位都是平等的. 在此基础上，人们发展了齐性空间的理论. 齐性空间中的对象也是五花八门. 我们再把范围缩小一点，也就是把条件加强一点来考虑，这就是“对称性”. 无论是 Euclid 空间还是球面，其中任何一点都是整个空间的对称中心. 可以证明，一个具有对称性的空间必然具有匀齐性. 保留有对称性 (因而也就保留了匀齐性) 的空间称为 **对称空间**. 我们在这里都是讨论有 Riemann 度量的对称空间，叫 **Riemann对称空间**.

让我们以数学的观点来看一看究竟什么是对称性，从而给对称空间一个严格的定义. 我们还是先从 Euclid 空间与球面这两个熟悉的对象入手.

以 E^n 表示 n 维 Euclid 空间. p 是 E^n 中的一点. 所谓关于 p 的中心对称，是 E^n 中的一个变换 σ_p，它是用下面办法做出的. 首先它保持 p 点不动；其次，对任一点 $q \neq p$，通过 q,p 可以作唯一的一条直线 l(即 E^n 的测地线)，在 l 上存在唯一的一点 q'，与 q 在 p 的异侧，且 qp 与 $q'p$ 有相同的长度，此时 σ_p 将 q 变为 q':

$$\sigma_p(p) = p, \quad \sigma_p(q) = q',$$

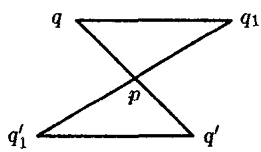
如下图所示.



显然, σ_p 有下面的性质:

1) $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$, 但 $\sigma_p \neq \mathrm{id}$; (id 表示恒等变换.)

2) σ_p 是保长变换 (即等距变换), 即对任何 q, q_1, 有 $qq_1 = q'q'_1$, 如下图.



3) p 是 σ_p 的唯一不动点, 因而是 σ_p 的孤立不动点.

事实上, 我们在 E^n 中建立以 p 为原点的标架. 以 $\mathrm{Crd}q$ 表示 q 点的坐标, 则有

$$\mathrm{Crd}p = 0.$$

此时 σ_p 有统一的表达式

$$\mathrm{Crd}\sigma_p(q) = -\mathrm{Crd}q.$$

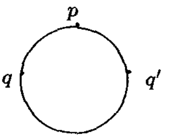
由此不难验证 σ_p 满足 1) $\sim$ 3).

从这里可以清楚地看到 E^n 关于 p 成中心对称. 此外, 从 3) 可以知道 $\sigma_p \neq \mathrm{id}$. 当然, 这里 p 只不过是 E^n 中的普通一员, 并没有任何特殊性.

我们再来看看球面的对称性. 设 S^n 是 E^{n+1} 中的一个 n 维球面. $p, q \in S^n$. 若 $p \neq q$, 则有唯一的大圆 (即 S^n 的测地线) C 通过 p, q. 在大圆 C 上有唯一的一点 q' 与 q 在 p 的 "异侧", 而且 $\widehat{pq}$ 与 $\widehat{pq'}$ 的弧长相同. 对 p 点, 我们可以作 S^n 的变换 σ_p

如下：

$$\sigma_p(p) = p,$$
$$\sigma_p(q) = q'.$$



显然， σ_p 有下面性质：

1) $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$, 但 $\sigma_p \neq \mathrm{id}$;

2) σ_p 是保长变换；

3) σ_p 有两个不动点，其一为 p, 另一个为过 p 的直径的另一端点 p'. 因而 p 是 σ_p 的孤立不动点.

事实上，不妨设 S^n 的半径为 1. 于是

$$S^n = \{(x_0, x) \in R \times E^n = E^{n+1} | x_0^2 + |x|^2 = 1\}.$$

可取 $p = (1, 0), p' = (-1, 0)$. 于是 S^n 有两个开集 $S^n \setminus \{p\}$, $S^n \setminus \{p'\}$ 覆盖了 S^n. 我们可以在 $S^n \setminus \{p\}$ 中建立卡 (Chart) 为

$$\mathrm{Crd}(x_0, x) = \frac{1}{1 - x_0} x.$$

这时有

$$\mathrm{Crd}\sigma_p(q) = -\mathrm{Crd}q, \quad q \in S^n \setminus \{p\}.$$

特别地

$$\mathrm{Crd}\sigma_p(p') = \mathrm{Crd}p'.$$

同样，在 $S^n \setminus \{p'\}$ 中建立卡为

$$\mathrm{Crd}(x_0, x) = \frac{1}{1 + x_0} x.$$

这时有

$$\mathrm{Crd}\sigma_p(q) = -\mathrm{Crd}q, \quad q \in S^n \setminus \{p'\}.$$

$$\mathrm{Crd}\sigma_p(p) = \mathrm{Crd}p.$$

由此不难看出，上面性质 1) $\sim$ 3) 成立. S^n 对于 p 点是成中心对称的. p 点是任意选取 M 的一点，没有任何特殊性.

下面我们可以给“中心对称 ”与“Riemann 对称空间”一个准确的定义了.

定义 1.1.1 设 p 是 n 维 Riemann 流形 M 中的一点. 如果存在 M 的一个变换 $\sigma_p : M \longrightarrow M$ 满足下面三个条件:

1) σ_p 是对合的，即 $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$;
2) σ_p 是保长的;
3) p 是 σ_p 的孤立不动点，即有 p 的邻域 U, 使得

$$\forall q \in U, \sigma_p(q) = q, \text{ 当且仅当 } p = q,$$

则称 M 对于 p 成 **中心对称**, σ_p 叫做关于 p 的 **中心对称**.

定义 1.1.2 如果一个 Riemann 流形 M 对于 M 中任一点 p 都成中心对称，则称 M 为 **Riemann 对称空间**.

以后将 Riemann 对称空间简单地叫做 **对称空间**. 除去 E^n 与 S^n 外，我们再举两个对称空间的例子.

例 1 双曲空间(The hyperbolic space)

我们在 $E^{n+1} = \mathbf{R} \times E^n$ 中引进 **Lorentz 度量**:

$$\langle (x_0, x), (y_0, y) \rangle_L = -x_0 y_0 + \langle x, y \rangle,$$

这里 $\langle x, y \rangle$ 是 E^n 中的 Euclid 度量. 令

$$H_1^n = \{(x_0, x) \in \mathbf{R} \times E^n | -x_0^2 + |x|^2 = -1,\ x_0 > 0\}.$$

于是 H_1^n 是 E^{n+1} 中的 n 维子流形.

事实上，我们可以在 H_1^n 中建立卡如下: $(x_0, x) \in H_1^n$, 令

$$\mathrm{Crd}(x_0, x) = \frac{1}{1 + x_0} x \in B_1^n \subset E^n,$$

这里 B_1^n 是 E^n 中半径为 1 的球. 反过来, 若有 $u \in B_1^n$, 显然,

$$\left(\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2}, \frac{2u}{1-|u|^2}\right) \in H_1^n,$$

而

$$1+\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2}=\frac{2}{1-|u|^2}.$$

对于 $p=(1,0)$, 令 σ_p 为

$$\sigma_p(x_0,x)=(x_0,-x),$$

则不难验证 σ_p 满足 1) ~ 3). H_1^n 叫**双曲空间**.

例 2 复射影空间(The complex projective space)

设 $\mathbf{E}=\mathbf{C}^n$ 为 n 维酉空间. $\langle x,y\rangle = x'\bar{y}$ 为其内积. 令

$$\begin{aligned} S\mathbf{E} &= S_1\mathbf{E} = \{N \in \mathbf{E} | \langle N,N\rangle = 1\}, \\ \mathbf{E}^* &= \mathbf{E} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

又设 $P\mathbf{E}$ 为 $\mathbf{E}$ 中所有一维子空间的集合. 建立 $\mathbf{E}^*$ 到 $P\mathbf{E}$ 的映射 F 如下:

$$F(N)=\mathbf{C}N=p, \quad N\in \mathbf{E}^*,$$

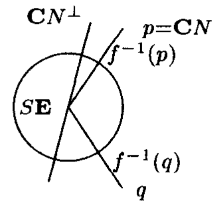
这里, $\mathbf{C}N$ 是 N 生成的一维子空间, 其正交补子空间记为 $\mathbf{C}N^{\perp}$. 由于 $S\mathbf{E}\subset\mathbf{E}^*$, 故可将 F 限制在 $S\mathbf{E}$ 上. 将此映射记为 f, 即

$$f=F|_{S\mathbf{E}}: S\mathbf{E}\to P\mathbf{E}.$$

f 称为 **Hopf映射**. 对于 $p=\mathbf{C}N\in P\mathbf{E}$, 其逆像是一个大圆 (great circle), 即 $S\mathbf{E}$ 与一复线 (也就是一个二维实平面) $\mathbf{C}N$

的交，即

$$f^{-1}(p) = S\mathbf{E} \cap \mathbf{C}N.$$



下面我们来看 $P\mathbf{E}$ 的流形结构．对 $N \in S\mathbf{E}$, 令

$$P\mathbf{E}_N = \{q | \langle N, f^{-1}(q)\rangle \neq 0\} = \{F(M) | \langle N, M\rangle \neq 0\}.$$

对于 $q = F(M) \in P\mathbf{E}_N$, 令

$$\mathrm{Crd}q = \frac{f^{-1}(q)}{\langle f^{-1}(q), N\rangle} - N = \frac{M}{\langle M, N\rangle} - N.$$

于是 $(\mathrm{Crd}, P\mathbf{E}_N)$ 构成一个卡．

从几何上看， $\mathrm{Crd}q + N = \dfrac{f^{-1}(q)}{\langle f^{-1}(q), N\rangle}$ 是复线 $\mathbf{C}f^{-1}(q)$ 与复超平面 $\{X | \langle X, N\rangle = 1\}$ 的交．

不难验证，如此定义的流形结构 $P\mathbf{E}$ 成为一个复流形（称为**复射影空间**）．可以将其看成实流形并赋予 Riemann 结构．因而 $P\mathbf{E}$ 是一个 Riemann 流形．设有 $p \in P\mathbf{E}$. 又设 $N_p \in F^{-1}(p)$, 首先在 $\mathbf{E}$ 中定义线性变换 σ_p^* 满足下面条件：

$$\sigma_p^*|_{\mathbf{C}N_p} = \mathrm{id}, \quad \sigma_p^*|_{(\mathbf{C}N_p)^{\perp}} = -\mathrm{id},$$

其中 $(\mathbf{C}N_p)^{\perp}$ 为 $\mathbf{C}N_p$ 的正交补子空间．显然 $\sigma_p^*(\mathbf{E}^*) = \mathbf{E}^*$; $F(\sigma_p^*(N)) = F(\sigma_p^*(N_1))$ 当且仅当 $F(N) = F(N_1)$. 于是有

$P\mathbf{E}$ 到 $P\mathbf{E}$ 的映射 σ_p 使得

$$\sigma_p \cdot F = F \cdot \sigma_p^*.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}^* \arrow[r, "\sigma_p^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{E}^* \arrow[d, "F"] \\
P\mathbf{E} \arrow[r, "\sigma_p"] & P\mathbf{E}
\end{tikzcd}$$

由 $\sigma_p^{*2} = \mathrm{id}$, 故 $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$. 同样可验证 2) 与 3) 成立, 即 $p = \mathbf{C}N_p$ 为 $P\mathbf{E}$ 的对称中心. p 是任意选取的. 故 $P\mathbf{E}$ 是 Riemann 对称空间.

例 1 与例 2 的讨论在这里是很简略的. 关于它们的详尽讨论, 例如可参考文献 [25]. 今后我们将用 Lie 群的观点来说明上面两个例子确为 Riemann 对称空间. 为什么可以用 Lie 群的观点来解释例 1 与例 2 呢? 或者, 更一般地, 为什么可以用 Lie 群的观点来研究 Riemann 对称空间呢? 从 Riemann 对称空间的定义可以看出, Riemann 对称空间不仅保留了 E^n 与 S^n 的可度量性, 而且保留了对称性, 即其中任意一个点都是整个空间的对称中心. 可想而知, Riemann 对称空间中任何点都处于平等地位. 因而它必然有匀齐性, 即 Riemann 对称空间应该是齐性空间. 故对称空间的理论不可避免地要与 Lie 群理论紧密相联.

我们将讨论对称空间的结构及其几何性质. 对于 Riemann 对称空间的结构与几何性质有了较多的了解之后, 自然会提出 Riemann 对称空间的分类问题. 关于 Riemann 对称空间的结构与分类问题, 这两方面都已有了较为满意的结果. 现在, 在这些结果的基础上许多有生命力的新问题, 如 Riemann 对称空间上的函数论, Riemann 对称空间到某些特定几何对象 (如球面、对称空间等) 的映射等问题的研究也迅速发展起来了, 而且有了很多好结果. 这些动向是值得注意的.

1.2 几何准备

为今后叙述方便，先回忆一下微分几何，尤其是 Riemann 几何的一些有关事实. 对这方面较为熟悉的读者也可以跳过这一节. 这里，大部分内容与符号都可参考文献 [23] 的第一章.

设 M 是一个 n 维微分流形 (C^∞ 流形). 以 $\mathcal{F}(M)$ 表示 M 上可微函数的集合. 自然，我们可视 $\mathcal{F}(M)$ 为实数域上的结合代数.

以 $\mathcal{D}^1(M)$ 表示 M 的所有可微 **向量场** 的集合. 也就是说，$\forall X \in \mathcal{D}^1(M)$ 是 $\mathcal{F}(M)$ 的一个变换，而且满足下面两个条件:

$$\begin{gathered}X(\alpha f+\beta g)=\alpha X(f)+\beta X(g),\\ X(fg)=f\cdot X(g)+g\cdot X(f),\\ \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R};\ f,g\in\mathcal{F}(M).\end{gathered}$$

即 X 是 $\mathcal{F}(M)$ 的导子.

$\mathcal{D}^1(M)$ 中可定义加法，也可定义 $\mathcal{D}^1(M)$ 与实数域 $\mathbf{R}$ 中元素的乘积，$\mathcal{D}^1(M)$ 成为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 如果再在 $\mathcal{D}^1(M)$ 中定义括积

$$[X,Y]=XY-YX,\quad \forall X,Y\in\mathcal{D}^1(M),$$

则 $\mathcal{D}^1(M)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数.

另一方面，也可以把 $\mathcal{D}^1(M)$ 看成一个 $\mathcal{F}(M)$ 上的左模. 但要注意，对于一般的 $f,g\in\mathcal{F}(M)$, $X,Y\in\mathcal{D}^1(M)$, 我们有

$$[fX,gY]=f(X(g))Y-g(Y(f))X+fg[X,Y].$$

即 $\mathcal{D}^1(M)$ 不是 $\mathcal{F}(M)$ 上的 Lie 环.

既然 $\mathcal{D}^1(M)$ 是左 $\mathcal{F}(M)$ 模，就可考虑它的对偶模 $\mathcal{D}_1(M)$. $\mathcal{D}_1(M)$ 中的元素称为 **一次微分形式**. 从 $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{D}^1(M)$ 与 $\mathcal{D}_1(M)$ 出发可以构造 M 上的混合张量代数，记为 $\mathcal{D}(M)$.