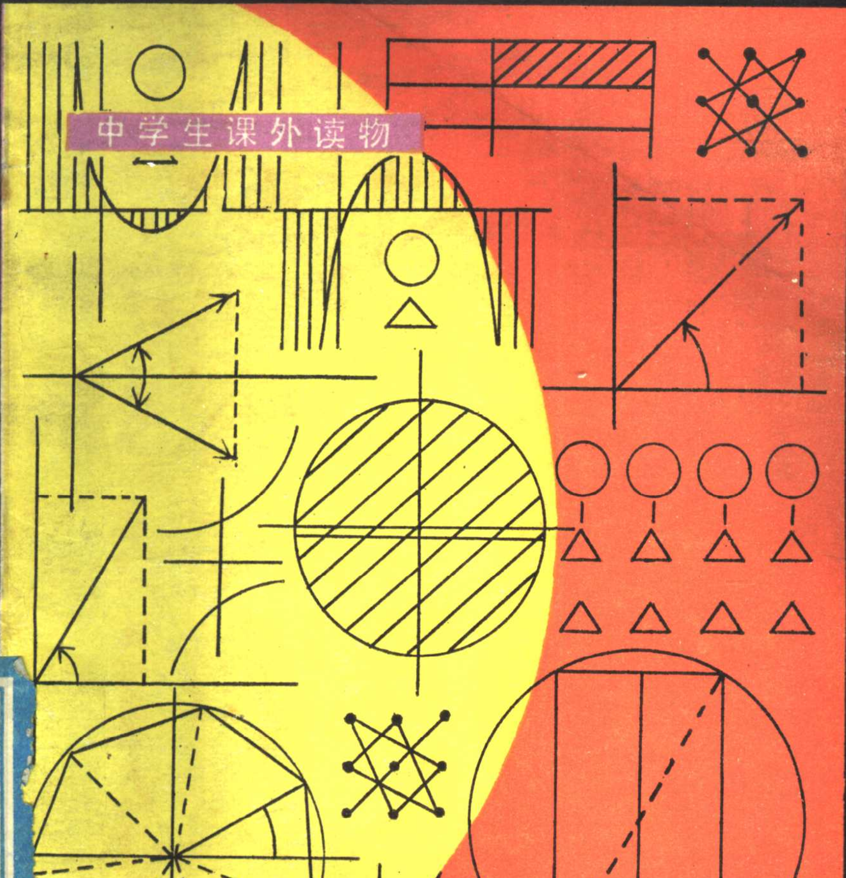
代数学习指导

中学生课外读物



吉林人民出版社

中学生课外读物

代数学习指导

彭继光 编

吉林人民出版社

内 容 提 要

这是一本学习代数的指导性书籍。主要内容包括：数及其运算、式及其运算、方程式、不等式、函数、数列和极限、解应用题、排列组合与二项式定理等。本书适于中学生的单元复习或总复习时使用，也可作为自学者或教师的教学参考资料。

中学生课外读物

代 数 学 习 指 导

彭继尧　编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

浑 江 市 印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　8 ½印张　189,000字

1978年10月第1版　1978年 3月第2次印刷

印数：200,001—500,000册

书号：7091·1006　定价：0.60元

目　　录

第一章　数及其运算

数的概念是人类社会实践的产物，并且随着人类社会实践的发展而不断地扩大的概念。在中学数学中，首先，引入负数后，把数的概念扩大到有理数；其次，引入无理数后，又把数的概念扩大到实数；最后，引入虚数，把数的概念扩大到复数。其间的关系如下：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{虚数}\end{cases}$$

§1　自 然 数

1、2、3、……等数是自然数，也叫做正整数。

1　质数与合数

除1和它本身以外，不能被其他整数整除的大于1的自然数，叫做质数；

除1和它本身以外，还能被其他整数整除的自然数，叫做合数。

例如：2、3、5、7、……等是质数；4、6、8、9、10、

……等是合数。

问题 1　写出小于100的质数和合数。

定理：每个合数都可以分解成若干个质数的乘积。

例如：$616 = 2^3 \times 7 \times 11$。

问题 2　把4752和1575分解为质因数的积。

2　倍数和约数

如果 $m = nR$，其中 m、n 与 R 是自然数，那么我们说 m 是 n 的倍数，n 是 m 的约数。同样 m 也是 R 的倍数，R 也是 m 的约数。

例如：$12 = 3 \times 2^2$. 1、2、3、4、6 和12都是12的约数；而12是 1、2、3、4、6 和12等数的倍数。

问题 3　45的倍数有多少个？并写出其中较小的五个倍数。

问题 4　45的约数有多少个？并把这些约数写出来。

3　2、3 和 5 的倍数

（1）末位数是偶数的整数是 2 的倍数；

（2）末位数是 0 或 5 的整数是 5 的倍数；

（3）各位数字的和是 3 的倍数的整数，是 3 的倍数。

例题 1　试判定201420是否能被 2、3、5整除。

解：因为 201420 的末位数是 0，所以它是 2 和 5 的倍数。

又因为 $2+0+1+4+2+0=9$，9 是 3 的倍数，所以它是 3 的倍数。

例题 2　把201420分解为质因数的积。

解：

$$\begin{array}{r|l}
2 & 201420 \\ \hline
2 & 100710 \\ \hline
3 & 50355 \\ \hline
3 & 16785 \\ \hline
3 & 5595 \\ \hline
5 & 1865 \\ \hline
 & 373
\end{array}$$

$\therefore\quad 201420 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 373$

问题 5　试判定 2、3、5 是不是23208的约数。

4　最大公约数和最小公倍数

例如：12的约数有：1，2，3，4，6和12。18的约数有：1，2，3，6，9和18。其中 1、2、3和 6，既是12的约数，又是18的约数。即 1、2、3 和 6 是12与18的公约数。而 6 是12与18的最大公约数。

4 的倍数有：4,8,12,18,……，6 的倍数有：6,12,18,24,……。其中12,24,36,……既是 4 的倍数,又是 6 的倍数。既12,24,36，……是 4 与 6 的公倍数。而12是最小公倍数。

例题 3　求18、24、36的最大公约数和它的最小公倍数。

解：

$$\begin{array}{r|lll}
2 & 24, & 18, & 36 \\ \hline
3 & 12, & 9, & 18 \\ \hline
 & 4, & 3, & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lll}
2 & 24, & 18, & 36 \\ \hline
2 & 12, & 9, & 18 \\ \hline
3 & 6, & 9, & 9 \\ \hline
3 & 2, & 3, & 3 \\ \hline
 & 2, & 1, & 1
\end{array}$$

$2 \times 3 = 6$　　　　$2^3 \times 3^2 = 72$

答：最大公约数是 6，最小公倍数是72。

注（1） 在例题3中用的方法，叫做短除法。用短除法求最小公倍数时，要注意从最小的质数2试除，不能用2整除后，再顺次用质数3、5、7、……等试除。

例如：求12、18和36的最小公倍数。

$$\begin{array}{r|lll} 4 & 12\text{、} & 18\text{、} & 36 \\ \hline 3 & 3\text{、} & 18\text{、} & 9 \\ \hline 3 & 1\text{、} & 6\text{、} & 3 \\ \hline & 1\text{、} & 2\text{、} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|lll} 2 & 12\text{、} & 18\text{、} & 36 \\ \hline 2 & 6\text{、} & 9\text{、} & 18 \\ \hline 3 & 3\text{、} & 9\text{、} & 9 \\ \hline 3 & 1\text{、} & 3\text{、} & 3 \\ \hline & 1\text{、} & 1\text{、} & 1 \end{array}$$

$$4\times3^2\times2=72 \qquad\qquad 2^2\times3^2=36$$

很显然左面短除所得的72并非最小公倍数。而右面短除所得的36才是最小公倍数。

注（2） 要分清求几个整数的最大公约数和最小公倍数有什么不同。

（a）求最大公约数，试除时要求必须能整除每个整数，而求最小公倍数，试除时只要求能整除其中的两个数就可以；

（b）最大公约数等于每个除数的相乘积，而最小公倍数等于每个除数的相乘积再乘以每个最后的商。参看例题3.

问题6 求下面两组数的最大公约数和它的最小公倍数。

（1）30、18、24； （2）25、63、90。

问题7 试求能被小于12的每个正整数整除的最小的自然数。

问题8 如果自然数$R=m\cdot n\cdots\cdots l+1$，$m$、$n$、……

l 是质数，试证明 R 是一个质数。

练　习（一）

在（　）中填写适当的数：

1．不大于 3 的自然数有（　）；

2．满足不等式 $3 < x \leqslant 6$ 的自然数有（　）；

3．45的约数有（　）；

4．30和45的公约数有（　），它们的最大公约数是（　），最小公倍数是（　）；

5．三位数 4（　）3 是 3 的倍数；

6．大于30而小于50的质数有（　）；

7．同时能被 2 、5 整除的整数的末位数是（　）；

8．$\frac{1}{15}$，$\frac{3}{20}$，$\frac{5}{18}$的公分母是（　）.

§2　整　　数

正整数、负整数和零统称为整数。

1　偶数和奇数

能被 2 整除的整数叫做偶数。

不能被 2 整除的整数叫做奇数。

通常偶数用 $2n$ 表示，奇数用 $2n+1$ 表示。其中 n 是整数。

例题 4　如果相邻的两个奇数的积是 195，求这两个奇数。

解：设相邻的两个奇数分别是 $2n-1$ 和 $2n+1$，根据题意，得

$$(2n-1)(2n+1)=195$$
$$4n^2-1=195$$
$$4n^2=196$$
$$n=\pm 7$$

故相邻的两奇数是13、15或者是-13、-15。

注：求有关相邻的整数时，要注意到怎样设能使运算较简单。

问题 9　已知相邻的三个整数的和是-27，求这三个数。

任何两个整数的和、差、积仍然是个整数。

例题 5　用 4 米长的钢筋，截成长400、700两种不同规格的料，问各裁几根，才能最节约钢筋？

解：设 400 和 700 的钢筋各 x、y 根．依题意，得 $400x+700y=4000$

$$\therefore \quad x=10-\frac{7}{4}y.$$

因为x、y都是正整数，所以y是 4 的倍数，且$y<5\frac{5}{7}$，故$y=4$。

即 $x=10-\frac{7}{4}\times 4=3$。

答：400的裁 3 根，700的裁 4 根。

§3 有理数

整数和分数统称为有理数。

任何两个有理数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是有理数。

1　小数与分数互化

凡是分数都可以化为有限小数或者无限循环小数。反

之，有限小数和无限循环小数都可以化为分数。

例如：$-2\frac{1}{8}=-2.125$；

$1\frac{2}{7}=1.\dot{2}8571\dot{4}$；

$3.24=3\frac{24}{100}=3\frac{6}{25}$；

$-0.\dot{2}0\dot{1}=-\frac{201}{999}=-\frac{67}{333}$。

注：化无限循环小数为分数，是根据无穷递缩等比数列的求和公式。

$$s=\frac{a}{1-q} \qquad |q|<1$$

s：无穷递缩等比数列的和；

a：第一项；q：公比。

例题 6　化$1.2\dot{3}\dot{4}$为分数。

解：$1.2\dot{3}\dot{4}=1.2343434\cdots\cdots$

$$=1.2+0.034+0.00034+\cdots\cdots$$

$$=1\frac{2}{10}+\frac{34}{1000}+\frac{34}{100000}+\cdots\cdots$$

$$=1\frac{2}{10}+\frac{\frac{34}{1000}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=1\frac{2}{10}+\frac{34}{990}$$

$$=1\frac{232}{990}$$

$$=1\frac{116}{495}.$$

问题10　化$-\frac{4}{11}$，$2\frac{5}{16}$，$-1\frac{5}{7}$，$\frac{9}{13}$为小数。

问题11　化0.3264，$-0.\dot{2}\dot{4}$，-2.304，$-1.3\dot{1}0\dot{2}$为分数。

§4　实　　数

无限非循环小数叫做无理数。

例如：$0.1010010001\cdots\cdots$，

$-3.121121112\cdots\cdots$，

以及　π、$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$等都是无理数。

有理数和无理数统称为实数。

任何两个实数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是实数。

问题12　下面各数$-2\frac{1}{4}$、$0.\dot{2}\dot{1}$、0、$-\sqrt[3]{27}$、$8\frac{2}{3}$、π、$\sqrt{5}$和2^{-2}，那些是自然数，那些是整数，那些是有理数，那些是实数？

§5　相反数、倒数和绝对值

1　相反数

a与b是实数，如果$a+b=0$（即$a=-b$）时，我们说a与b是互为相反数。

例如：$-\sqrt{2}$的相反数是$\sqrt{2}$；

$\sqrt{3}-2\sqrt{5}$的相反数是$-(\sqrt{3}-2\sqrt{5})$

$=-\sqrt{3}+2\sqrt{5}$。

问题13　写出下面各数的相反数：

-2.04、$2\sqrt{5}$、$-1+\sqrt{2}$、$\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$、0。

2　倒数

a与b是非零的实数，如果$ab=1$（即$a=\frac{1}{b}$）时，我们说a与b是互为倒数。

例如：$-\frac{2}{3}$的倒数是$-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$；

$\sqrt{2}-\sqrt{3}$的倒数是$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}$

$=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

问题14　写出下面各数的倒数：

-2、$2\frac{1}{4}$、$\sqrt{5}$、$a-b$、$\sqrt{3}+2$。

3　绝对值

正数和零的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数。a的绝对值用符号"$|a|$"表示。

$$\boxed{|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}}$$

例如：$|3\frac{1}{2}|=3\frac{1}{2}$；$|0|=0$；

$|-3.24|=3.24$。

注：求含有字母的式子的绝对值，要根据绝对值的定义，从正、负、零三个方面分别进行讨论。

例题7　求：(1) $|x-9|$；(2) $|\sqrt{3}-2|$。

解：(1)　$x-9\geqslant 0$，即$x\geqslant 9$时，

$|x-9|=x-9$，

$x-9<0$。即$x<9$时，

$|x-9|=-(x-9)=-x+9$。

(2)　$\because\ \sqrt{3}<2$，

$\therefore\ |\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$。

问题15 化简：（1） $|9-x|$；（2） $|1-\sqrt{2}|$；

（3） $|x^2|$；（4） $|-a|$。

练 习（二）

1．分别写出：-1、$\sqrt{3}$、0、$-3\frac{2}{3}$、1、0.3、$0.\dot{3}$和$\sqrt{2}-\sqrt{3}$等数的相反数、倒数、绝对值．

2．计算：$\left|-3\frac{1}{2}\right|-\left|2\frac{1}{3}\right|-3\left|-2\frac{5}{6}\right|$。

3．求：$|2-a|$，其中 $a>2$．

4．a是什么数时，$a-|a|=2a$？

5．实数的绝对值都是正数吗？为什么？

6．实数有无最小数？它的绝对值有无最小数？

7．某数与它的倒数和的平方等于4，求这个数。

8．化简：（1） $x-|x-3|$；

（2） $|2-\sqrt{5}|-|2+\sqrt{5}|$；

（3） $\frac{|a|}{a}$；

（4） $|x-1|-|x-2|$。

§6 数 轴

1 数轴

把规定了原点、单位和方向的直线叫做数轴。

对同一数轴来说，数轴上的每一个点都有且只有一个实数和它对应；反之，每个实数在数轴上也都有且只有一个点和它对应。

注（1）“有且只有一个……”是数学中一个重要，而又不好理解的逻辑语言．“有一个”只是说明“有”，但并没有指出有几个．亦即至少有一个。“只有一个”意思是最多有

一个."有且只有一个……" 首先肯定了有，其次指明了有的数量。

注（2） 数轴上任意两个不相重合的点，位置在右的点所对应的实数，大于位置在左的点所对应的实数。

问题16 用数轴上的点表示： -2.5、 $3\frac{1}{4}$、 $\sqrt{2}$、 $|-2|$.

2 实数的大小

正数大于一切负数和零；负数小于一切正数和零；

两个负数比较大小，绝对值较大的负数小于绝对值较小的负数。

例题 8 比较 $-\sqrt{2}$ 与 -1.41 的大小。

解：$\because$ $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$,

$|-1.41|=1.41$,

$|-\sqrt{2}|>|-1.41|$,

$\therefore$ $-\sqrt{2}<-1.41$

问题17 把 0、$-2\frac{2}{3}$、-0.6、1.4、$\sqrt{2}$、2 等数由小到大次序排列起来。

问题18 用"<"或">"号，连结下面每组的数。

（1） -2.342, -2.3421； （2） $\frac{7}{23}$, $\frac{7}{25}$；

（3） $-\frac{4}{7}$, $-\frac{5}{7}$； （4） $0.\dot{2}0\dot{4}$, 0.204；

（5） $-2\sqrt{3}$, $-3\sqrt{2}$； （6） $\sqrt{2}$, $1\frac{9}{20}$；

（7） $|a|$, $-a$； （8） $-\frac{5}{6}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{3}$.

§7 实数运算定律

1.	加法交换律	$a+b=b+a$
2.	加法结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$
3.	乘法交换律	$a\cdot b=b\cdot a$
4.	乘法结合律	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
5.	乘法分配律	$a\cdot(b+c)=ab+ac$

注（1） 除法不满足交换律和结合律。

例如：$10\div5\neq5\div10$；

$12\div4\div3\neq12\div(4\div3)$。

因为 $12\div4\div3=3\div3=1$，

$$12\div(4\div3)=12\div\frac{4}{3}=12\times\frac{3}{4}=9.$$

（2） 掌握运算定律后，可以简化运算的过程。

例如：$1.926\times825+1.926\times175$

$=1.926\times(825+175)$

$=1.926\times1000$

$=1926$；

$$-2\frac{4}{11}+3\frac{5}{6}-4\frac{7}{11}-1\frac{5}{6}$$

$$=\left(-2\frac{4}{11}-4\frac{7}{11}\right)+\left(3\frac{5}{6}-1\frac{5}{6}\right)$$

$=-7+2$

$=-5$。