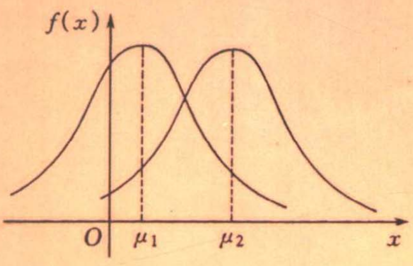
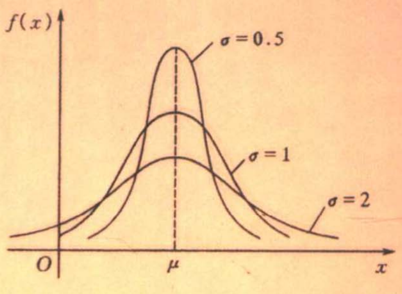
工科高等学校教学用书

# 概率论与数理统计

（第二版）

李莉　王凯　陈岩　编著




NEUPRESS
东北大学出版社

工科高等学校教学用书

# 概率论与数理统计

（第二版）

李 莉 王 凯 陈 岩 编著

东 北 大 学 出 版 社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/李莉，王凯，陈岩编著．—2版．沈阳：东北大学出版社，2002.5

ISBN 7-81054-251-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.①李…②王…③陈…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

---

出 版 者：东北大学出版社
（邮编：110004　地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号）
出 版 人：李毓兴
印 刷 者：东北大学印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
开　　本：850mm×1168mm　1/32
字　　数：195千字
印　　张：7.5
出版时间：2002年5月第2版
印刷时间：2002年5月第1次印刷
责任编辑：郭爱民
封面设计：唐敏智
责任出版：秦　力

---

定　　价：12.80元

垂询电话：024—83687331（发行部）　　024—83680265（传　真）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com

# 前　　言

本书是根据原国家教委1995年修订的工科高等学校本科《概率论与数理统计》课程的教学基本要求，并参考了近几年工科硕士研究生入学考试大纲编写的，内容分为两部分，第1～5章为概率论部分，第6～8章为数理统计部分．本书可作为工科高等学校本科生的教材，也可作为工程技术人员的参考书．

本书在确保所要求的基本内容叙述清晰、透彻、完整的基础上，适当增加了应用方法方面的内容，以适应科学技术的飞速发展及社会主义市场经济体制的建立对高等学校工科学生处理实际问题能力越来越高的要求．同时，在概念的引入时尽力做到从分析实际问题出发，由浅入深，由具体到抽象，符合人们的一般认识规律，便于读者阅读和理解．

本书第1，2，5章由王凯执笔；第3，4章由李莉执笔；第6，7，8章由陈岩执笔．

郭嗣琮教授、盖如栋教授审阅了全部书稿．他们提出了很多宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，书稿虽经几次修改，但仍难免有不足之处，诚请各位专家和读者批评指正．

编著者

2002年5月

# 目　录

# 第 1 章 随机事件及其概率

在自然界和人们的社会活动中，经常遇到各种各样的现象，这些现象大致上可以分成两大类：必然现象和随机现象．所谓必然现象，是指在一定条件下肯定会发生或肯定不会发生的现象．例如，“在标准大气压下，纯水加热到100℃沸腾”，“同性电荷互相排斥”，等等．过去所学的各门数学课程基本上是研究和处理这类必然现象的．除了必然现象，自然界和社会上还存在着另一类现象，即所谓的随机现象．例如，在相同条件下抛掷一枚硬币，可能出现两种结果：正面朝上或反面朝上，但是最终出现哪种结果，在抛掷之前无法确定；检测流水线上的一件产品，结果可能是合格品也可能是不合格品，但是检测之前无法确定出现哪种结果；某电话交换台在每天早晨8:00到9:00收到的呼唤次数，是一个非负的整数，但是事先无法预知呼唤的确切次数．这类现象的共同特点是，即使在完全相同的条件下，它们出现的结果也不尽相同，或不能确切预言．但经过长期的观察与研究之后，人们发现这类随机现象在大量重复试验或观察下，它们的结果具有一定的规律性．通常称这种规律性为随机现象的统计规律性．

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科．由于随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计已成为最重要与最活跃的数学学科之一，并且在自然科学、社会科学、工农业生产、工程技术和军事科学等各个学科和领域都得到了广泛的应用．

## 1.1 样本空间与随机事件

### 1.1.1 样本空间

研究随机现象，首先必须进行大量的观察或试验，以便从中

发现统计规律性. 为方便起见, 通常把对某一事件的观察或试验统称为试验.

一个试验, 如果满足下述条件:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确知道的, 并且不只一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

就称这样的试验是一个随机试验, 记为 $E$. 后面所说的试验均指随机试验.

随机试验的每一个可能结果称为样本点, 记为 $\omega$. 因为随机试验的所有可能结果是明确的, 从而所有的样本点也是明确的, 它们的全体组成的集合称为样本空间, 通常记为 $S$. 由样本空间的单个元素即一个样本点构成的集合称为基本事件. 显然, 基本事件与样本点一一对应. 为方便起见, 基本事件也可用 $\omega$ 表示.

**【例 1-1】** 随机试验 $E_1$: 掷一枚硬币, 把出现正面和出现反面作为可能结果, 并分别记作 $\omega_1$ 和 $\omega_2$. $E_1$ 的样本空间为: $S_1=\{\omega_1, \omega_2\}$.

**【例 1-2】** 随机试验 $E_2$: 先后掷两次硬币, 把依次所得结果作为一个样本点. 记

$\omega_{00}=$"第一次出现正面, 第二次出现正面",

$\omega_{01}=$"第一次出现正面, 第二次出现反面",

$\omega_{10}=$"第一次出现反面, 第二次出现正面",

$\omega_{11}=$"第一次出现反面, 第二次出现反面".

$E_2$ 的样本空间: $S_2=\{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$.

**【例 1-3】** 随机事件 $E_3$: 先后掷两次硬币, 把两次(不计次序)所得结果作为一个样本点. 记

$\omega_0=$"两次均出现正面",

$\omega_1=$"一次出现正面, 一次出现反面",

$\omega_2$ =“两次均出现反面”.

$E_3$ 的样本空间：$S_3 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

【例 1-4】 随机试验 $E_4$：一个盒子中有 10 个形状、大小、重量完全相同的球，分别标以号码 1，2，…，10，从中任取一球，把所取得球的号码作为样本点.

$E_4$ 的样本空间：$S_4 = \{1, 2, \cdots, 10\}$.

上述例子有两点值得注意：

(1) 要知道样本空间，就得首先给定随机试验. 所谓“给定”随机试验，就是指明“把什么作为一个样本点”.

(2) 样本空间的元素，即样本点，是由试验的目的决定的. 例 1-2 与例 1-3 中同是将一枚硬币抛掷两次，但由于试验的目的不同，因此样本空间也不一样.

### 1.1.2 随机事件

在随机试验中，有时关心的是带有某些特征的基本事件是否发生. 如在例 1-3 中，可以研究

$A$ =“正好有一次出现正面”，

$B$ =“至少有一次出现正面”.

这样的结果是否发生？其中，$A$ 是由样本点 $\omega_1$ 组成的，$B$ 是由两个样本点 $\omega_0$ 与 $\omega_1$ 组成的. 它们在试验中是否发生都不一定，带有不确定性，即随机性，所以称为随机事件(简称事件). 随机事件是由样本点组成的集合，并且显然是样本空间的子集. 前述的事件 $A$，$B$ 可以简单地表示成 $A = \{\omega_1\}$，$B = \{\omega_0, \omega_1\}$. 由此可见，概率论中的随机事件不过是赋予了具体含义的集合罢了. 正因如此，人们常习惯于用“集合”的记号 $A$，$B$，$C$ 等大写英文字母表示随机事件. 在试验中，当且仅当事件 $A$ 所含的某一样本点 $\omega$ 出现时，称事件 $A$ 发生，记 $\omega \in A$.

因为样本空间 $S$ 是由所有样本点组成的，它是自身的子集，所以 $S$ 是事件. 又因在任一次试验中，必然要出现 $S$ 中的某一样

本点 $\omega$，即 $\omega \in S$，也就是说，$S$ 必然会发生，故称 $S$ 为必然事件. 相应地，空集$\varnothing$可看成 $S$ 的子集，在任一次试验中，不可能有 $\omega \in \varnothing$，也就是说$\varnothing$不可能发生，称$\varnothing$为不可能事件，必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情形.

### 1.1.3 事件间的关系及运算

前面指出了概率论中的随机事件是赋予了具体含义的集合，所以事件之间的关系及运算可以用集合之间的关系及运算来描述.

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$，而 $A$，$B$，$A_k(k=1, 2, \cdots)$是 $S$ 的子集，即随机事件.

#### 1.1.3.1 事件的包含关系

若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$，或称事件 $B$ 包含事件 $A$，记为 $A \subset B$. 如前面提到过的事件 $A$ =“正好有一次出现正面”包含于事件 $B$ =“至少有一次出现正面”.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记作 $A = B$. 对任意事件 $A$，约定$\varnothing \subset A$.

#### 1.1.3.2 事件的和

称“事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生”构成的事件为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和，和事件记作 $A \cup B$. 如在例 1-4 中，若事件 $A$ =“球的标号为偶数”，事件 $B$ =“球的标号$\geqslant 8$”，则 $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

推广之，若有 $n$ 个事件$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$，则称这 $n$ 个事件至少有一个事件发生所构成的事件为这 $n$ 个事件的和，记为

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

#### 1.1.3.3 事件的积

称由事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生所构成的事件为事件 $A$ 与事

件$B$的积，记作$A\cap B$，或简记为$AB$. 如在例1.4中，若$A$，$B$同上，则$A\cap B=\{8, 10\}$. 而$n$个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生所构成的事件称为这$n$个事件的积，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，简记作$A_1A_2\cdots A_n$.

#### 1.1.3.4 事件的差

称事件$A$发生而事件$B$不发生构成的事件为事件$A$与$B$的差，记作$A-B$. 如在例1-4中，若$A$，$B$同上，则$A-B=\{2, 4, 6\}$.

#### 1.1.3.5 对立事件

在一次试验中，若事件$A$与事件$B$必发生其一，但$A$，$B$不能同时发生，即$A\cup B=S$，$A\cap B=\varnothing$，则称事件$A$与事件$B$互为对立事件. 事件$A$的对立事件记作$\bar{A}$. 如在例1-4中，若事件$A=$"球的标号为偶数"，则$\bar{A}=$"球的标号为奇数".

显然　　$\bar{A}=S-A$.

#### 1.1.3.6 不相容事件

在一次试验中，若事件$A$与事件$B$不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件$A$与事件$B$是互不相容事件. 如在例1.4中，若事件$A=$"球的标号为偶数"与事件$B=$"球的标号为5"是互不相容的. 注意：互为对立事件的两个事件必为互不相容事件，反之则不然. 基本事件之间是互不相容的.

上述事件间的关系与运算可用几何图形作出直观的解释. 设样本空间$S$用一个正方形内的点集表示，事件用圆内的点集表示，如图1-1所示的$A$与$B$是$S$的两个子集，即两个事件，且$A\subset B$. "$A$发生必导致$B$发生"意味着"属于$A$的$\omega$必然属于$B$"，即$A$中的点全位于$B$内. 再如图1-3中的阴影部分表示事件$A$与事件$B$的积$A\cap B$，等等.

如同集合运算的规律一样，事件的运算遵从下面的规律.

交 换 律　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结 合 律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

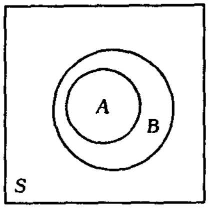



图 1-1

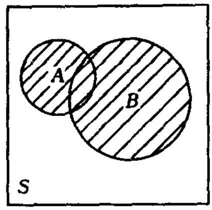



图 1-2

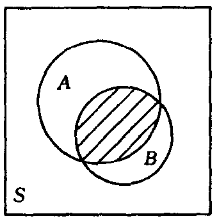



图 1-3

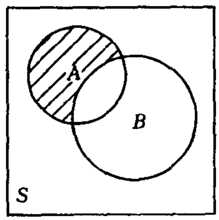



图 1-4

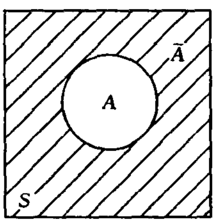



图 1-5

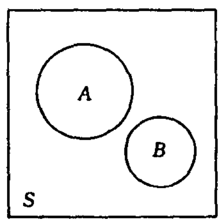



图 1-6

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

分 配 律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$;

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

## 1.2 频率与概率

随机事件在一定条件下可能发生，也可能不发生．人们也许要问，对随机事件发生或不发生的可能性大小能否作出断言呢?

这便是概率论研究的课题. 众所周知, 几何学中线段的长度、平面图形的面积等都可以用一个实数来度量. 在概率论中, 随机事件在一试验中发生的可能性的大小是由其自身决定的, 并且是客观存在的, 这正如线段有长度、图形有面积一样. 因此, 随机事件在一试验中发生的可能性大小也应该可以用一个数来度量. 通常把度量随机事件在试验中发生的可能性大小的量, 称为**随机事件的概率**. 一个根本的问题是, 对一个给定的随机事件, 如何定义它的概率呢? 为回答这个问题, 首先引入频率的概念, 进而给出随机事件的概率的定义.

### 1.2.1 频　　率

**定义**　设在相同的条件下, 进行了 $n$ 次试验, 事件 $A$ 在这 $n$ 次试验中发生了 $n_A$ 次, 称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 $A$ 发生的**频率**.

由定义, 容易证明频率具有下列性质:

(1) 非负性: 对于任意事件 $A$, $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性: $f(S)=1$;

(3) 可加性: 对于任意有限个两两互不相容的事件 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_m$, 有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

事件 $A$ 发生的频率反映了在一定条件下, 事件 $A$ 出现的频繁程度. 可以设想, 事件 $A$ 在每次试验中发生的可能性越大, 则它在 $n$ 次试验中出现的频率也越大. 反之, 由频率的大小也应该能判断事件 $A$ 发生的可能性的大小. 于是, 很自然的想法是以事件 $A$ 发生的频率来表示其在一次试验中发生的可能性大小——概率. 但这是否可行呢? 请看下面的例子 .

【例 1-5】 将一枚硬币接连掷 $n$ 次，观察正面出现的次数. 表 1-1 是试验结果的记录.

表 1-1 掷硬币几次的试验结果

| 试验者 | 掷的次数 $n$ | 正面出现的次数 $n_A$ | 正面出现的频率 $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 浦　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 杰万斯 | 20 480 | 10 379 | 0.506 8 |
| K. 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| K. 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 6 |
| 费　勒 | 10 000 | 4 979 | 0.497 9 |
| 罗曼诺夫斯基 | 80 640 | 39 699 | 0.492 3 |

从上述数据可以看出，频率具有波动性，当掷硬币次数较大时，正面出现的频率稳定在 0.5 附近.

【例 1-6】 检查某工厂产品质量，其结果见表 1-2.

表 1-2 产品质量检查结果

| 抽取产品数 | 5 | 10 | 60 | 150 | 600 | 700 | 1 200 | 2 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 次品数 | 0 | 3 | 7 | 19 | 52 | 100 | 109 | 248 |
| 次品率 | 0 | 0.3 | 0.117 | 0.127 | 0.087 | 0.111 | 0.091 | 0.103 |

从表 1-2 可以看出，抽到次品数的多少具有偶然性，但当抽取产品数逐渐增多时，可以发现次品率逐渐稳定在 0.1.

经过长期的观察和研究后人们发现，虽然随机事件的频率随试验次数的改变而变化，但是随着试验次数的无限增大，事件发生的频率总是稳定在某个数值的附近. 因此，应该用这个数值来表征事件发生的可能性大小. 频率这种趋于稳定的性质通常称为频率的稳定性.

但是在实际中，不可能对每一个随机事件都做大量的试验，以便从中得到频率的稳定性. 同时，为了理论研究的需要，人们从频率的性质得到启发，给出下面的概率定义.

### 1.2.2 概　　率

**定义**　设 $S$ 是随机试验 $E$ 的样本空间，对于试验 $E$ 的每一个事件 $A$，赋予一个实数，称做事件 $A$ 的概率，记作 $P(A)$. 如果事件函数 $P(\cdot)$满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性：$P(S)=1$;

(3) 可列可加性：若 $A_1$，$A_2$，…是两两互不相容事件，即对于$i\neq j$，有 $A_iA_j=\varnothing$，$i$，$j=1$，2，….

则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

由概率的非负性、规范性和可列可加性，可以证明它的一些重要性质：

(1) 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证：令 $A_n=\varnothing$，$n=1$，2，…，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$. 由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

而

$$P(\varnothing)\geqslant 0,$$

故

$$P(\varnothing)=0.$$

(2) 概率具有有限可加性，即若 $A_iA_j=\varnothing$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1-1}$$

证：因为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

由可列可加性及 $P(\varnothing)=0$，得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 对任一随机事件 $A$，有

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{1-2}$$

证：因为 $A\cup\bar{A}=S$，$A\bar{A}=\varnothing$，所以

$$1=P(S)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}).$$

(4) 对两个随机事件 $A$，$B$，若 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B), \tag{1-3}$$

$$P(A)\geqslant P(B).$$

证：因为当 $B\subset A$ 时，有

$A=B\cup(A-B)$且 $B\cap(A-B)=\varnothing$，由有限可加性有：

$$P(A)=P(B)+P(A-B).$$

移项即得欲证之等式；又从概率的非负性，由 $P(A-B)\geqslant 0$ 知：

$$P(A)\geqslant P(B).$$

(5) 对任意两个随机事件 $A$，$B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1-4}$$

证：因为 $\qquad A\cup B=A\cup(B-AB)$，

且 $\qquad A\cap(B-AB)=\varnothing$，

所以有 $\qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$.

又因为 $AB\subset B$，从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由归纳法可将此性质推广到任意有限个随机事件，设 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 是 $n$ 个随机事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)$$

这个公式通常称为概率的一般加法公式.

## 1.3 古典概型(等可能概型)

上节中介绍了概率的定义，对于一个随机事件 $A$，如何寻求