交通系统中等专业学校试用教材

天文航海

（船舶驾驶专业用）

于长山 编著

人民交通出版社

交通系统中等专业学校试用教材

天 文 航 海

（船舶驾驶专业用）

于 长 山 编 著

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书主要介绍了球面三角、天文航海和卫星导航等有关基础知识、定位原理及各种定位方法，并对国内外常用的航海天文历和有关计算表册作了介绍。本书作为海运中等专业学校船舶驾驶专业的试用教材，亦可作有关专业和海运技术人员参考用书。

在编写过程中，曾蒙吴广华、佘祖德、方白正等同志认真进行审校，提出宝贵的修改意见，谨在此表示感谢。

交通系统中等专业学校试用教材

天 文 航 海

（船舶驾驶专业用）

于长山 编著

人民交通出版社出版

（北京市安定门外和平里）

北京市书刊出版业营业许可证出字第006号

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：20.25 字数：421 千

1980年12月 第1版

1980年12月 第1版 第1次印刷

印数：0001—4,300册 定价：1.65元

绪　论

船舶在海上航行，必须随时掌握船舶在海上的位置和航向，以保证船舶准确、迅速、经济和安全地航行。船舶在沿岸航行时，可以利用沿海的可测物标测定船位。当船舶航行在海洋上，超出了海岸物标的视距或助航仪器的有效范围时，便可以利用日月星辰等天体来测定船位。这种用天文方法确定船位和导航的应用科学叫天文航海学（Astronomical Navigation）。

天文航海学是应用天文学的一个分支，研究的内容有球面三角和球面天文的基础理论知识以及利用仪器、表册测定船位和罗经差等。掌握这些基本理论和基本技能是学习天文航海的任务。

天文航海与各种无线电定位系统比较，仪器简单、维护方便，不需要陆岸设备，具有独立性强、隐蔽性好的特点。我国劳动人民对天文学很早就有所研究，并卓有成就，对各种天文现象和天文观测也有过详细记载。如两千多年前日蚀的记录，公元前 611 年彗星的发现，公元前28年关于太阳黑子的纪事……等。又如汉朝天文学家张衡（公元 78～139 年）制造浑天仪，南北朝科学家祖冲之（公元429～500年）利用岁差来制历，元朝郭守敬（公元1231～1316年）算出一年的天数是365.2425天，比地球实际绕太阳运行的周期——365.2422天只差26秒等。

至于天文学在航海上的应用，远在2100多年前的《淮南子》中就有记载。公元五世纪初，晋僧法显从印度泾海回国，“大海弥漫无边，不识东西，惟望日月星宿而进。”到宋代，舟师“夜则观星，昼则望日，阴晦观指南针。”已经利用天体来引导船舶航行。明朝是我国古代航海事业最发达的时期，当时“驾舟洋海……或晦夜无月，惟瞻北斗为度。”很类似现代观测北极星高度求纬度的定位方法。郑和远航遗留一批《航海图》中，“过洋牵星图”载有许多实际的天文观测记录，利用它可以测算“……至某国回视北斗离地达几指，又至某国视牵牛星离地则二指半矣。”《明史·天文志》也载有“南极诸星，古所未有，近年浮海之人至赤道以南，往往见之因测其经纬度。”……凡此种种，都充分说明了勤劳、勇敢、富有创造才能的我国劳动人民，很早就把天文知识应用在航海上，对社会的科学文化发展作出过巨大的贡献。

到十八世纪，欧洲出现了测角仪器——六分仪和准确的计时仪器——天文钟后，又有美国船长沙姆纳发现用等高度线求经纬度的方法，最后在1875年改进为近代所广泛应用的“截距法”求船位线。及至1895年发明了无线电，对提高船舶定位的准确度又作出了新贡献，使天文航海学日趋完善。

现在，世界各国的科学技术迅猛发展，日新月异，现代航海技术，包括天文定位的计算方法和仪器表册，也不断革新。当前射电天文学的发展、无线电六分仪、快速电子计算机和卫星导航仪器在航海上的应用，已为海上天文观测开辟了广阔前途。随着我国海运事业的发展，对天文航海又不断提出了新的要求，如改革天文定位方法、改进航海仪器、简化计算程序、设计新型航用电子计算机以及提高定位的准确度……等，都还有待我们进一步研究和探讨。这些都是我们肩负的光荣历史使命。

目　录

第三篇　观测太阳定位

第四篇　测星定位

第五篇　天测罗经差和卫星导航

第一篇 球面三角

天文航海是以球面三角学为其数学基础的一门专业课。为了使学员既能理解本教材的主要内容，又能通过自学进一步提高专业水平，要求在学习普通数学的基础上，学习一些与天文航海有关的球面三角基础知识。在这一篇里将研究球面几何、球面三角形边和角间的函数关系以及球面三角形的解算方法。

第一章 球面几何

本章主要研究球面基本概念，理解球面三角形的构成、球面三角形和三面角的关系以及球面三角形的基本性质。至于球面三角形的作图，仅供参考。

第一节 球面基本概念

一、大圆、小圆

1.球

半圆绕它的直径旋转一周的旋转面叫球面。球面围成的几何体是球（Sphere）。球有球心、半径和直径。同球的半径或直径都相等。

2.大圆、小圆

任一平面和球面相截的截痕是一个圆。如图1-1，q 是截痕上任意点，联接 oq，再作 oo' 垂直平面 MM'。在直角三角形 $oo'q$ 中，$\angle oo'q=90°$，则

$$\overline{o'q}=\sqrt{\overline{oq}^2-\overline{oo'}^2}$$

因为 oq 是球的半径 R，q 在截痕上任意移动时，oq 总是定值。又 oo' 是定长，所以 $o'q$ 也是定值。可知截痕是以半径为 r 的一个圆周，圆心 o' 在球心到截面的垂直轴上。

当 $oo'=0$ 时，通过球心的平面所截的圆叫大圆（Great circle），如图1-1的 $\overset{\frown}{QQ'}$。它的一段弧叫大圆弧。

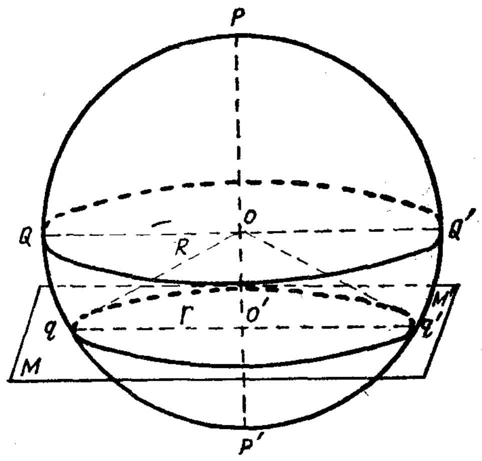

图 1-1

当 $oo'=d$ 时，不通过球心的平面所截的圆叫小圆，（如 $\overset{\frown}{qq'}$）。

由此可得大圆有如下几个特性：

（1）大圆把球和球面分成相等的两部分；

（2）两个大圆平面的交线是它们的直径，并且彼此平分；

(3)过直径两端，在球面上可以作无数个大圆；

(4)球面上不在直径两端的两点，只能作一个大圆。

由平面几何知道三点可定一平面。因为一个点是球心，不在直径端点的其它两点任取，过此三点只能定一平面，所以在球面上只能作一个大圆。

二、球面距离

球面上两点间的大圆弧长叫这两点间的球面距离，如图1-2的$\overset{\frown}{Aa}$和$\overset{\frown}{Bb}$。它用大圆弧所对应的球心角（度、分、秒）来表示，如$\angle AOa$和$\angle BOb$。航海上，把地球的球心角1′所对应的球面大圆——子午线的弧长，叫1海里（Nautical Mile），1海里等于1852米。

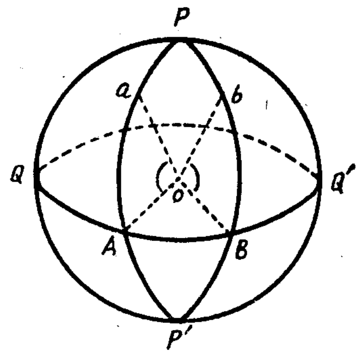

图 1-2

三、极距、极线

垂直于任意圆的平面的球直径叫该圆的轴。轴的端点叫圆的极，如图1-2的P和P'。从极到球面上任一点的球面距离叫极距，如$\overset{\frown}{Pa}$和$\overset{\frown}{Pb}$或$\overset{\frown}{PA}$和$\overset{\frown}{PB}$。同一圆的极距相等。

极距等于90°的大圆弧叫该极的极线。如图1-2的$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=90°$，则大圆弧$QABQ'$是$P$或$P'$的极线。

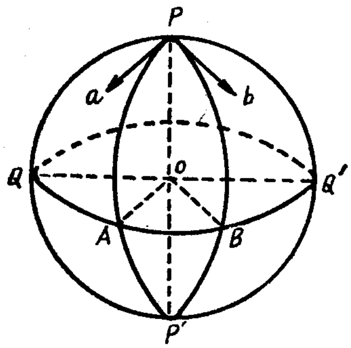

图 1-3

四、球面角及其度量

球面上两个大圆弧构成两角形，该角叫球面角。它的圆弧叫边，它们的交点叫顶点。如图1-3，$\angle APB$或$\angle AP'B$是两个大圆弧的球面角，P是球面角的顶点，$\overset{\frown}{PA}$和$\overset{\frown}{PB}$是球面角$\angle APB$的两个边。球面角有以下三种度量法：

1. 大圆平面所构成的两面角（$A—PP'—B$）；
2. 在顶点处大圆弧的切线夹角（$\angle aPb$）；
3. 顶点的极线被两个大圆弧所截的弧长（$\overset{\frown}{AB}$），或该弧段所对应的球心角（$\angle AoB$）。

第二节 球面三角形

一、球面三角形

球面上三个大圆弧所构成的三角形叫球面三角形（Spherical Triangle），如图1-4，球面三角形$\triangle ABC$由三个边（a、b、c）和三个角（A、B、C）构成，叫球面三角形的六个要素。

在球面上，三个大圆弧将构成四组对称三角形。我们选择边和角都小于180°而又大于0°的三角形叫欧拉球面三角形。

球面三角形分球面任意三角形、直角三角形、直边（或象限）三角形和初等三角形等。

初等三角形是指一个角及其对应边很小，或三个边都很小，因而又叫特殊球面三角形。

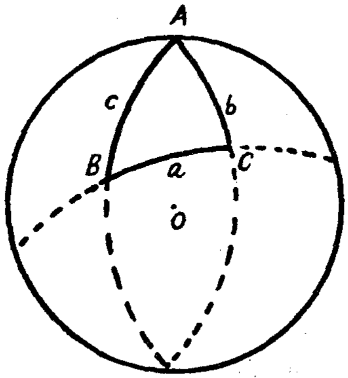

图 1-4

二、球面三角形相等和相似

当两个球面三角形的二边夹一角、二角夹一边、三边或三角对应相等时：

1. 在同一球面的或半径相等的两个球面三角形，它们相等；

2. 不在同一球面的或半径不等的两个球面三角形，它们相似。

三、极线三角形

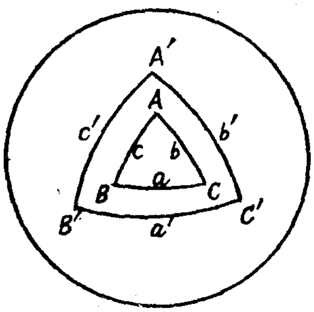

图 1-5

球面三角形，三个顶点的极线相交于三点所构成的三角形，是原球面三角形的极线三角形。如图 1-5，以原球面三角形的三个顶点 A、B、C 为极，作极距等于 $90°$ 的三个极线 $\overset{\frown}{B'C'}$、$\overset{\frown}{A'C'}$、$\overset{\frown}{A'B'}$，它们相交于三点构成球面极线三角形。我们用 A'、B'、C' 和 a'、b'、c' 分别表示它的三个角和三个边，这时：

1. 若球面三角形各边都小于 $90°$，极线三角形将在原三角形之外；

2. 若球面三角形各边都大于 $90°$，极线三角形将在原三角形之内；

3. 若球面三角形一边或两边大于 $90°$，极线三角形将和原三角形交叉形成。

第三节　球面三角形和极线三角形的关系

一、两个球面三角形的顶点，互为另一个球面三角形对应边的极

1. A 是 $\overset{\frown}{B'C'}$ 的极——原设，不证；

2. A' 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的极。

证明：如图 1-6，ABC 是原三角形，$A'B'C'$ 是极线三角形。联结 $\overset{\frown}{A'B}$ 和 $\overset{\frown}{A'C}$。

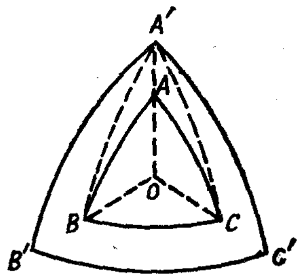

图 1-6

因为 B 是 $\overset{\frown}{A'C'}$ 的极，$\overset{\frown}{A'B} = 90° = \angle A'OB$，即 $BO \perp A'O$。

又 C 是 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的极，$\overset{\frown}{A'C} = 90° = \angle A'OC$，即 $CO \perp A'O$。

由立体几何可知：两线 BO、CO 可定一平面，即 $A'O \perp$ 平面 BOC。

原设 $\overset{\frown}{BC}$ 是过球心的平面 BOC 上的大圆，而 A' 是 $A'O$ 的一个端点，$\overset{\frown}{BC}$ 上任意点和 A' 的极距又都等于 $90°$，故

$$A' \text{是} \overset{\frown}{BC} \text{的极}$$

同理可证：B' 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的极，C' 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的极。

二、原球面三角形的角（边）和极线三角形的边（角）互为补角：

$$A+a'=180^\circ \quad B+b'=180^\circ \quad C+c'=180^\circ$$
$$a+A'=180^\circ \quad b+B'=180^\circ \quad c+C'=180^\circ$$

证明： 图1-7，延长 $\overset{\frown}{AB}$ 、 $\overset{\frown}{AC}$ 交 $\overset{\frown}{B'C'}$ 于D和E。已知：

$A=\overset{\frown}{DE}$ （球面角等于极线弧段之长）

$a'=\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{B'D}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC'}$

$A+a'=\overset{\frown}{B'D}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC'}=\overset{\frown}{B'E}+\overset{\frown}{DC'}$

B'是$\overset{\frown}{AE}$ 的极，C'是$\overset{\frown}{AD}$ 的极

$\therefore$ $\overset{\frown}{B'E}=90^\circ=\overset{\frown}{DC'}$

故 $A+a'=180^\circ$

同理可证其它。

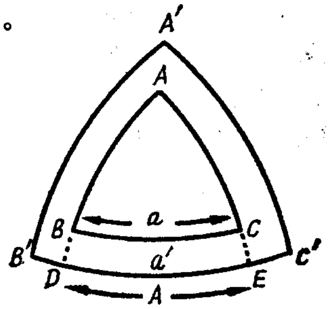

图 1-7

第四节 球面三角形的性质

一、球面三角形和三面角的关系

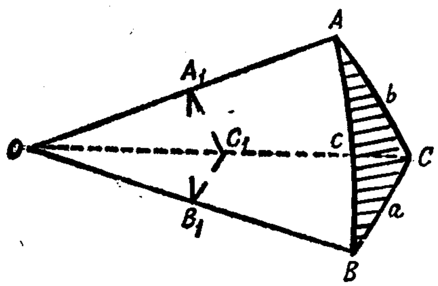

图 1-8

球面三角形和三面角有着密切的关系，它们可以相互度量。如图1-8，若将球面三角形的三个顶点A、B、C和球心O相联，便构成一个三面角。相反，若将三面角的顶点O作球心，用等长作半径围成球面，便构成一个球面三角形。显然：

1.球心便是三面角的顶点；

2.球半径是三面角的棱；

3.球面三角形的边是三面角的平面角；

4.球面三角形的角是三面角的两面角。

二、球面三角形边的性质

1.边必须是大圆弧

2.$180^\circ>$每一边$>0^\circ$

3.两边的和大于第三边，两边的差小于第三边——$a+b>c>a-b$

如图1-8，在立体几何中，三面角的两个平面角的和或差与第三个平面角的关系是：

$$\angle BOC+\angle AOC>\angle AOB>\angle BOC-\angle AOC$$

故 $$a+b>c>a-b$$

同理可证其它。

4. $360^\circ>a+b+c>0^\circ$

(1)因为球面三角形的每一边都大于0°，所以，$a+b+c>0^\circ$。

(2)如图1-9，由球面两角形知：

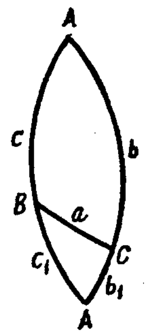

图 1-9

$$(b+b_1)+(c+c_1)=360^\circ$$

$$b_1+c_1=360^\circ-(b+c)$$

∵ $b_1+c_1>a$

∴ $360^\circ-(b+c)>a$

∴ $360^\circ>a+b+c$

三、球面三角形角的性质

1. $180^\circ>$每一角$>0^\circ$

2. $540^\circ>A+B+C>180^\circ$

由原三角形和极线三角形的关系

$A+a'=180^\circ$　即　$a'=180^\circ-A$

$B+b'=180^\circ$　即　$b'=180^\circ-B$

$C+c'=180^\circ$　即　$c'=180^\circ-C$

∴ $a'+b'+c'=540^\circ-(A+B+C)$

∵ $360^\circ>a'+b'+c'$

∴ $360^\circ>540^\circ-(A+B+C)$

∴ $A+B+C>180^\circ$

∵ $a'+b'+c'>0^\circ$

∴ $540^\circ-(A+B+C)>0^\circ$

∴ $540^\circ>A+B+C$

3.两角的和减去第三角小于180°——$A+B-C<180^\circ$

由两边的和大于第三边得$a'+b'>c'$

将　$a'=180^\circ-A$　$b'=180^\circ-B$　$c'=180^\circ-C$

代入上式：　$360^\circ-(A+B)>180^\circ-C$

∴ $A+B-C<180^\circ$

同理可证：　$B+C-A<180^\circ$

$C+A-B<180^\circ$

4.两角的和大于第三角的外角；两角的差小于第三角的外角——$A+B>D>A-B$

如图1-10，D 是球面三角形 C 的外角。

（1）　∵ $A+B+C>180^\circ$

而　$C+D=180^\circ$

∴ $A+B+C>C+D$

∴ $A+B>D$

（2）　∵ $C+A-B<180^\circ$

∴ $A-B+C<C+D$

∴ $A-B<D$

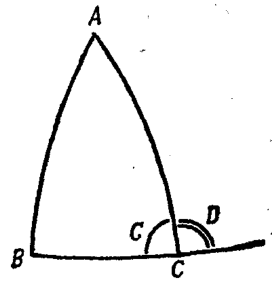

图 1-10

四、边和角的关系

1.等边对等角，等角对等边

2.大（小）边对大（小）角，大（小）角对大（小）边

第五节　球面三角形基本作图法

球面三角形作图属于透视投影。作图的目的，是为了了解天球坐标在平面上的投影图形，或作为球面三角形求解的参考，并不要求严格的准确度。为了简便起见，这里采用正射投影的作图方法。

一、已知圆的极的投影和极距，作小圆的投影——度量球面距离

设 P 是已知圆的极在投影面圆周上的投影，极距 $=\alpha°$（图1-11）。

1.取 A、B 二点，令 $\angle POA=\angle POB=\alpha°$，则 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=\alpha°$。

2.连 A、B，则 AB 是所求小圆的投影。这时，由 P 到 AB 上任意点的极距都等于 $\alpha°$。

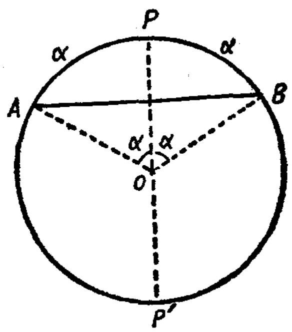

图　1-11

二、作与投影面成 β° 交角的大圆投影——度量球面角

依球面角的度量法，可以用极线段的弧长等于交角 $\beta°$ 来作图（如图1-12）：

1.在投影面圆周上取任意点 P，作 $PP'\perp QQ'$；

2.取 $\overset{\frown}{QK'}=\beta°$，作 $KK'\perp QQ'$ 交于 K；

3.作 PK（或 $P'K$）的垂直平分线交 QQ' 于 O'；

4.以 O' 为圆心，KO' 为半径，作大圆弧 $\overset{\frown}{PKP'}$，就是所求大圆弧的投影。

例题1-1：已知球面三角形的三边 $a=75°$，$b=45°$，$c=60°$，试作该球面三角形。

解：作球面三角形的边，关键在于作边长等于极距的小圆投影轨迹（图1-13）。

(1)以 O 为圆心，作投影面圆周，选 c 边在圆周上，取 $\overset{\frown}{AB}=60°$；

(2)分别以 A 和 B 为极，$a=75°$ 和 $b=45°$为极距，作两个小圆投影轨迹交于 C；

(3)作大圆弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的投影，则 ABC 是所求的球面三角形。

例题1-2：已知球面三角形的二边 $b=70°$，$c=45°$ 和夹角 $A=60°$，试作该球面三角形。

解：如图1-14：

(1)以 O 为圆心作投影面圆周，选 C 边在圆周上，取 $\overset{\frown}{AB}=45°$；

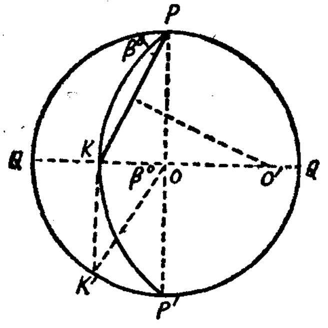

图　1-12

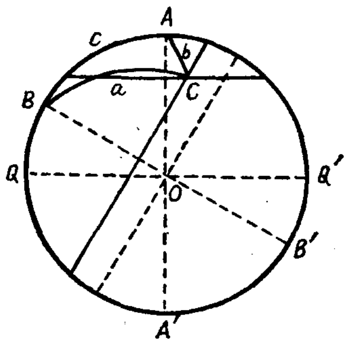

图　1-13

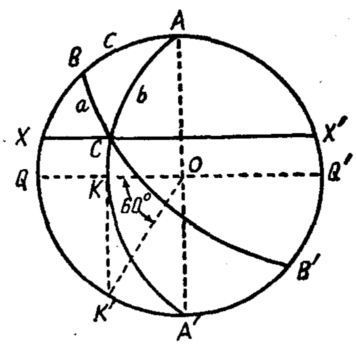

图　1-14

（2）以 A 为极，作极距 $b=70°$ 的小圆投影轨迹 XX'；
（3）作 $QK=\widehat{QK'}=60°(A)$ 的大圆弧投影 $\widehat{AKA'}$ 交 XX' 于 C，则 $\angle BAC=60°$；
（4）作大圆弧 $\widehat{BCB'}$ 的投影，则 ABC 是所求的球面三角形。

思考题1-1 球面几何

1.何谓大圆、小圆，主要区别在哪？过直径两端可作几个大圆，不在直径两端的二点可作几个大圆，为什么？

2.何谓球面距离和球面角，如何度量。

3.球面三角形和球面极线三角形是怎样构成的？它们的边和角，相互间各有什么关系。

4.球面三角形和三面角有何对应关系。球面三角形的边或角，有何主要特性。

5.为什么要作球面三角形的投影图。球面距离和球面角的画法，关键在那几方面。

第二章 解球面三角形

球面三角学的主要任务是研究球面三角形边、角的函数关系，并选择适当公式，由已知条件解算未知的边和角。

这一章除介绍球面三角基本公式外，也对与航海有关的几种公式，如球面直角、直边三角形，初等球面三角形等作适当介绍，供参考。

第一节 航海表三角函数对数表

打开航海表的三角函数表及其对数表，我们会发现，它与一般数学用表略有不同，主要有如下几个特点：

1.“度”在上下角，“分”在竖行，间隔为1′或0.′5。其中：

凡0°～45°，应由上往下查左行的“分”；

凡45°～90°，应由下往上查右行的“分”。

例如：查35°12′和54°48′。

35°12′：先看左上角的35°，再由左行从上往下查12′。

54°48′：先看右下角的54°，再由右行从下往上查48′。

2.每页上下横行列有六种三角函数（sin……cos）。其中：

凡0°～45°，应看上边横行；

凡45°～90°，应看下边横行。

例如：求 lgsin35°12′和 lgsin54°48′的对数值。

lgsin35°12′：度、分看左行（上→下），sin 看上行的，查得：

$$\lg\sin 35°12' = 9.76065$$

lgsin54°48′：度、分看右行（下→上），sin 看下行的，查得：

$$\lg\sin 54°48' = 9.91230$$

3.凡三角函数值小于1的，对数的首数是负数，为计算方便，制表时都加10，使首数都成正数：

例如：$\sin 35°12' = 0.5764$，因为$\lg 0.5764 = \bar{1}.76075$，所以$\lg\sin 35°12' = \bar{1}.76075$。

$$\bar{1}.76075 = (-1 + 0.76075 + 10) - 10$$
$$= 9.76075 - 10$$

本来对数值应写成

$$\lg\sin 35°12' = 9.76075 - 10$$

为了简化，对数表中省略了“-10”，没有列入。初学时，应把“-10”写上，包括它在内加以计算。但在实际运算时，可以省略不写，心目中知道有“-10”就行了。

4.为了查取整分以下的对数值，在两种函数对数值之间列有“内插比例”。在我国出版的航海表中，是每间隔10′为一组，最上边的粗体字是间隔1′的表差，其它9个数字分别为$0'.1$～$0'.9$的内插比例数值。

例如：求$\lg\sin 35°12'.7$的对数值。

在表中查得：

$$\left.\begin{aligned}\lg\sin 35°12' &= 9.76075\\ \lg\sin 35°13' &= 9.76093\end{aligned}\right\}\text{显然表差 } d = 18$$

这说明角度增加1′，对数值增加0.00018；角度减少1′，对数值也减少0.00018。

（1）先以35°12′为准：

查它旁边的“内插”$d = 18$那一组，当角度变动为$+0'.7$时，对应$0'.7$的内插值是$+13$，即$+0.00013$，所以

$$\lg\sin 35°12'.7 = 9.76075 + 0.00013 = 9.76088$$

（2）如以35°13′为准：

仍然查它旁边的“内插”$d = 18$那一组，但角度的变动为$35°12'.7 - 35°13' = -0'.3$，对应$0'.3$的内插值应是$-5$，即$-0.00005$，所以

$$\lg\sin 35°12'.7 = 9.76093 - 0.00005 = 9.76088$$

例如：查$\lg\cos 35°12'.7$的对数值。

在表中查得：

$$\left.\begin{aligned}\lg\cos 35°12' &= 9.91230\\ \lg\cos 35°13' &= 9.91221\end{aligned}\right\}\text{表差 } d = -9$$

这说明角度增加1′，对数值减少0.00009；角度减少1′，对数值却增加0.00009。

现以35°12′为准，查它旁边的“内插”$d = 9$那一组，当角度变动$+0'.7$时，对应$0'.7$的内插值是-6，即-0.00006，所以

$$\lg\cos 35°12'.7 = 9.91230 - 0.00006 = 9.91224$$

如果没有“内插”表，特别是小于5°或大于85°的三角函数对数值，表差较大，可以利用线性比例内插计算方法解决。

例如：求$\lg\sin 4°45'.4$的对数值。

在表中查得：

$$\left.\begin{aligned}\lg\sin 4°45' &= 8.91807\\ \lg\sin 4°46' &= 8.91959\end{aligned}\right\}\text{表差 } d = 152$$

由于角度增加1′，对数值增加152，内插值应为“正”。根据比例内插计算

$$1' : 0.00152 = 0'.4 : x$$

$$\therefore \qquad x = \frac{4}{10} \times 0.00152 = +0.00061$$

$$\therefore \qquad \lg\sin 4°45\overset{'}{.}4 = 8.91807 + 0.00061 = 8.91868$$

比例内插也可以用心算，简化为：

$$x = 152 \times 0.4 = 60.8$$

但必须注意，位数不要搞错。

例题：$\lg\mathrm{tg}\alpha = 0.15136$，求 α 值（$\alpha < 90°$）。

在表中查得：

$$\left.\begin{array}{l} \lg\mathrm{tg}54°48' = 0.15155 \\ \lg\mathrm{tg}54°47' = 0.15128 \end{array}\right\} \text{表差 } d = +27$$

这说明对数值和角度成正比例变化。现在以 $\lg\mathrm{tg}54°47'$ 为准，已知 $\lg\mathrm{tg}\alpha - \lg\mathrm{tg}54°47' = 0.15136 - 0.15128 = +8$。依内插表，$d = +27$，当对数的内插值为 $+8$ 时，角度为 $+0\overset{'}{.}3$，所以

$$\alpha = 54°47' + 0\overset{'}{.}3 = 54°47\overset{'}{.}3$$

第二节　球面余弦公式

一、推导公式

设 $\triangle ABC$ 是球面任意三角形（图2-1），O 是球心，由 A 作 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 的切线交 OB 和 OC 的延长线于 D 和 E，联 DE。

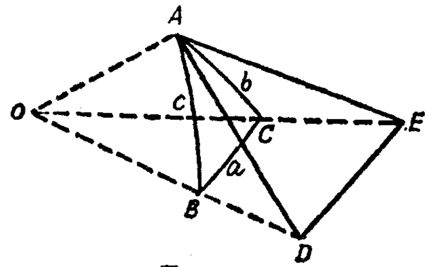

图　2-1

根据平面三角余弦定理可知：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

在 $\triangle ODE$ 和 $\triangle ADE$ 中：

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos a \qquad (1)$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos A \qquad (2)$$

(1)－(2)得

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 + 2AD \cdot AE\cos A - 2OD \cdot OE \cdot \cos a = 0 \qquad (3)$$

$\because$　　$\triangle OAD$ 和 $\triangle OAE$ 是直角三角形

$$\therefore \qquad \overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 \qquad (4)$$

(4)代入(3)得

$$2\overline{OA}^2 + 2AD \cdot AE \cdot \cos A - 2OD \cdot OE \cdot \cos a = 0$$

$$OD \cdot OE \cdot \cos a = \overline{OA}^2 + AD \cdot AE \cdot \cos A$$

$$\therefore \qquad \cos a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD} \cos A$$

球面三角形的边可以用球心角来度量，即：

$$a = \angle BOC \qquad b = \angle AOC \qquad c = \angle AOB$$

根据直角三角形的函数关系可得：

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \\ \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}1)$$