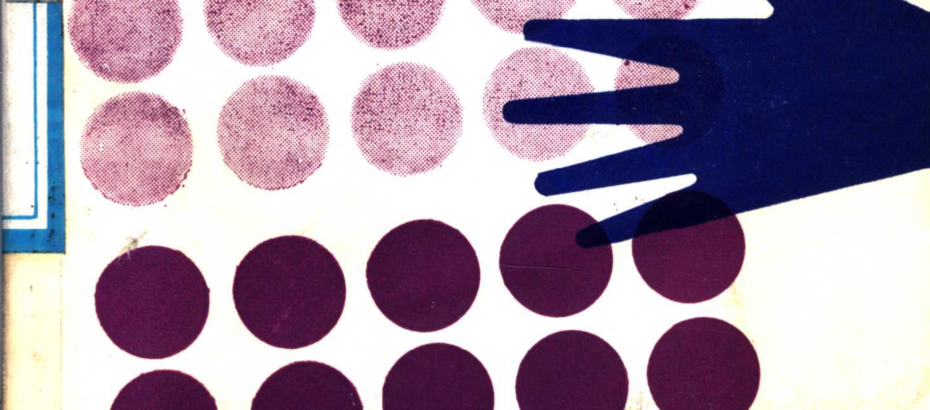
[英] 帕梅拉·利贝克 著

儿童怎样学习数学

父母和教师指南

方未之 译

人民教育出版社



[英] 帕梅拉·利贝克 著

儿童怎样学习数学

——父母和教师指南

方未之 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书根据儿童心理发展特点，以深入浅出的语言、内容丰富的实际活动和图表，生动地分析和讲述了儿童是怎样学习数学的，以及怎样去教儿童们学习数学。本书还简要地介绍并分析了皮亚杰、布鲁纳等人的学习理论，把儿童学习数学的过程归纳为体验、语言、图画和符号等四个阶段，并且贯穿全书始终。每章末还给读者列出了儿童学习数学所需的器材和给读者的建议。另有一章简要地介绍了计算器和计算机教学以及作者对这些问题的看法。

本书是儿童的父母们，幼儿园、小学教师，幼儿教育和小学教育研究工作者，中等师范和高等师范教育系、心理系师生的一本难得的参考读物。此书译自企鹅图书公司1984年初版本。

儿童怎样学习数学

——父母和教师指南

［英］帕梅拉·利贝克　著

方未之　译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山区印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 9.625　字数 196,300

1986年11月第1版　1987年9月第1次印刷

印数　1—12,000

书号 7012·01160　定价 1.50 元

引 言

《库克罗夫特报告·数学问题》(英国皇家出版局 1981 年出版)把重点集中在学校的数学教学上。其中"小学低年级数学"这一章是篇幅最长的几章之一。报告赞扬小学教师们:"我们收到了大量材料，证明小学的工作做得好。我们相信绝大部分小学教师都明白他们的职责，要给他们所培育的孩子打下一个坚实的数学基础。"报告还说到:"有一些教师对我们说,他们欢迎给他们的工作以指引。""我们也收到过一些对小学的数学教学的批评。"

在过去的二十年里,对于数学教师们,有过什么样的指引与批评呢?六十年代到七十年代初,数学教育的改革者们十分强调孩子们一定要懂得数学的结构①，但不很重视让他们具有做日常计算工作的能力。有一个反对这些开拓者的典型笑话是:他们坚持说孩子们应该懂得 $5\times3=3\times5$。至于孩子们知不知道"三五一十五",他们倒是不在乎。于是,教学重点当然就放到了数学结构上，而不在计算技能上了。到七十年代末，反作用又使天平倒向了另一侧。雇主们埋怨说他们招收

① 原文为"structure",哲学名词,通常译作"结构"。指一个体系(如语言体系)内各成分之间的关系。详见辞海"结构主义"条。

到的青年人不会计算。他们给学校开的处方是："使孩子们有计算能力，理解就随它去吧。"

雇主们所需要的，当然并不是不用心思的计算技能，而是运用数学来解决实际问题的能力。可是，除非既懂得有关的数学结构，又学会了相应的计算技能，否则在解决实际问题上就不可能有多大的进展。要求出五厘米长三厘米宽的长方形的面积，如果不懂相应的算法，光知道 $5\times3=15$ 和 $5+3=8$，也没有用处。又如，如果不懂得 $5\times3=3\times5$，就不可能决定拿三张五英磅的钞票去买五棵单价三英磅的玫瑰花。

要是我们只教计算能力，就会有人提出需要理解；要是我们只教孩子们理解，又会有人提出需要计算能力。其实是两者都需要。通过这两方面才得以解决实际问题。我们要解决实际问题，就需要对数学的理解；反过来说，要做到理解，又需要探究实际问题。孩子们在学习数学时，需要用他们感兴趣的事物，一面做游戏一面探究。这本书里提出了一些帮助孩子的方法，通过恰当的活动来使他们一步又一步地打好在数学上取得进展的重要基础。在理解和计算能力之间，则是力求建立适当的平衡。

第一章是介绍引导孩子们形成数学概念的基本方针。第二至第七章和第九至第二十章是课程内容以及引导孩子们学习这些课程时所进行的活动。各章之后都列出了进行教学活动所需要的器材，还有给读者的建议。第八章和第二十一章则是简述几位心理学家在儿童的智力成长理论和学习理论方面所作出的一些贡献。

我在写这本书的过程中，曾得到从事小学教育的吉列

安·利贝克，感兴趣的学生家长马里恩·乔丹和专业数学家汉斯·利贝克的大力协助。他们三位都用老鹰一样锐利的目光阅读了手稿，指出了冗杂的、前后不一的、或是尚需阐明的地方。如果还留下了什么毛病，那当然就得责备他们了。我感谢他们，也感谢露丝·伊格尔，约翰·斯洛博德和约翰·阿姆斯特朗，他们阅读了部分手稿并提了意见。我也感谢企鹅图书公司的编辑们，他们对这本书的出版一直乐于协助。

帕梅拉·利贝克

目　录

第一章

为什么学数学以及怎样学的六个问题

（一）为什么教孩子学数学？

这是库克罗夫特报告里提出的头一个问题。报告中所作的回答是：无论是在科学研究中、在商业和工业中以及在日常生活中，数学都有很大的用处。因为数学提供了阐明情况和预测结果的手段，而且还提供了简练、明确而高效能地传递信息的方法。数学的效能来自数学符号。数学符号有其本身的"语法"。报告中还说，数学能发展逻辑思维，它还有美的感染力。

（二）为什么人们喜爱数学？

有些人可能是因为数学有用而爱好它。不过，数学的吸引力更可能是在于人们从中得到了智和美的满足。对于孩子则更是如此。所以，教师们一定要经常意识到这一点：尽管是因为数学有用才值得在数学上花这么多课时，可是数学对于孩子们的吸引力却几乎与音乐或美术对他们的吸引力一样，是以他们对智和美的反应为基础的。

（三）为什么数学象音乐、美术一样对人有美的感染力？

首先我们必须承认，对于音乐或美术的反应是因人而异的。我们并不都喜爱同一类音乐，我们当然也不能指望所有的人都喜爱同一种数学。可是，我们欣赏音乐或是美术的基础之一是我们对于旋律、图案中的规律的反应。数学也能引出这种反应。下面是一个例子。

大家知道，1、3、5、7 等等叫做奇数。现在我们出一道题：把开头的一百个奇数加起来。要做这道题，即使是用现代化的电子计算器也要花很长时间，而且令人厌烦。这种计算会使我们反感。(对冗长乏味的计算起反感是数学才能有发展前途的表现！)我们先把开头两个奇数加起来：

$$1+3=4$$

然后再把开头三个、四个以至五个奇数相加：

$$1+3+5=9$$

$$1+3+5+7=16$$

$$1+3+5+7+9=25$$

再停下来思考一下。看看以上得数，即：4、9、16、25。我们熟知乘法表，知道这几个数就是 2×2、3×3、4×4、5×5，这就找到了一个规律：

开头两个奇数之和是 2×2

开头三个奇数之和是 3×3

开头四个奇数之和是 4×4

开头五个奇数之和是 5×5

现在，你是否确信开头一百个奇数之和一定是 100×100 呢？我们并没有证明它是这样，可是规律却有这样的力量，能使你几乎觉得没有必要去核对它了。用代数方法，或者是通

过计算，可以证明10,000是正确的答案。但我们没有用这些方法就把结果预测出来了。

（四）人们常说数学是一门“抽象”的学科，这是什么意思？

数学具有强大的解决实际问题的力量。但是认为它是一门抽象的学科却也无可非议。这似乎是矛盾的。一次数学运算，或是 $e^{i\pi}+1=0$① 这样一道式子，本身并未表明它与实际有任何联系。可是，最复杂的数学也牢牢地扎根在现实世界之中，可以正确地称之为来自现实世界的抽象。即使是“二”也是一个抽象概念。你要见到许许多多成双作对的事物（例如一双眼睛、一双鞋子、一对翅膀），再从所有这些双双对对之中抽取共同点，然后你才能懂得“二”的意思。你要已经懂得了“二”、“三”、“四”以及其他类似的概念之后，才能懂得“数”这个词的意思。“数”是从一组抽象之中出来的抽象。“数的相加”这个概念则是比“数”这个概念更高一层的概念。数学包含着阶梯式的一层又一层的抽象。对于任何一个概念，如果我们不理解作为它的基础的、比较低一层的一组概念，也就不可能理解它本身。

当然，语言本身就是抽象的，而数学是通过语言来表达的。但是语言一般并不包含象数学这样多层次的阶梯式抽象结构。教师的职责便是引导孩子们走上这个阶梯，又不要丢失与现实世界联系的链条。

（五）我们的头脑怎样对付这个阶梯？

当我看见“143”这个符号时，我并没有想象出在面前摆着

① 这是著名的“欧拉公式”：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。当 $\theta=\pi$ 时，$e^{i\pi}=-1$。（式中 e 是自然对数的底。）

一百四十三个物体，这时我是否脱离了与现实世界的联系？

没有，你没有脱离。符号是数学的一个基本组成部分。符号把一个“概念的阶梯”浓缩成“便于处理”的形式。要理解“143”这个符号，你用不着想象出一百四十三个物体，但是你需要懂得一套非常有用的记数法。在这种记数法中，“4”代表着四组“十”，“1”代表着一个“百”（它本身又是十组“十”）。古罗马人把这个数目记成CXLIII。与我们的十进位记数法相比，这种记数法需要的思维活动要复杂得多。符号是数学的一个非常重要的组成部分。

（六）孩子的抽象思维是怎样发展起来的？

一个婴儿，他（或她）看、摸、探查有形物体，如玩具。不久之后他就知道了代表这些物体的语言。（口头语言就是来自实际的一种抽象）随后他就会认识这些物体的图画（另一种抽象）。再往后，他就会从书面符号联系到这些物体。他在数学上也一定要通过这样几步抽象前进，所经历的过程和在所有其他方面一样。我们把这种步骤划分为：

体验——对有形物体的体验。
语言——表述这种体验的口头语言。
图画——显示这种体验的图画。
符号——概括这种体验的书面符号。

我们来探索一下孩子学会“球”这个概念所经过的步骤。

体验——他看球、摸球、尝球的味道、把球拿在手里、滚球、投球，他一面玩耍，一面知道了球的许多属性。

语言——他把“球”这个字的发音和他的玩具联系起来。这很有用。他说出这个字，就可能有人给他球玩。他很快就会

把这个字和其他同样有滚动属性的物体联系起来。

图画——他认出了一张球的图画。图画与球本身的差别很大。图画不能滚动，摸着也不一样。但是孩子还是看出了图画和他自己的球有足够的共同点，可以称之为“球”。

符号——再往后，他就学会了我们写出来表示“球”的发音的这个符号(文字)。这一步相当复杂。这个符号与真正的球之间完全没有共同属性，它仅仅是人为地和“球”的发音联在一起。

下面我们着手研究孩子为了在数学上达到理解和具有计算能力所需要经过的各个阶段时，我们将经常提到这个由实物到抽象的四个步骤，即：体验——语言——图画——符号。孩子们用的数学教科书，不管编写时下了多大工夫，也只能涉及后两个步骤：图画和符号。给幼儿用的书应该从孩子们的体验和口头语言开始，但没有那本书能够从需要开始的地方开始。

第二章

形成概念

我们在第一章里已经看到，数学是对现实的一种抽象。我们把导致数学抽象的过程总结成体验——语言——图画——符号四个步骤。在这一章里，我们只涉及前两个步骤，即体验——语言(表达这种体验的口头语言)。

我们在第一章里讲到过，你要见到许许多多成双作对的事物，再从所有这些双双对对之中抽取出共同点，然后你才能懂得“二”的意思。在学习语言的过程中，孩子们说话是模仿他们所听到的字音(例如“绿”)，再逐步地把这个字与概念(例如什么是“绿”的概念）联系起来。有一些初步的数学概念很重要，包括：“多”、“少”、“一样多”、“比……多”、“比……少”、“长”、“短”、“一样长”、“比……长”、“比……短”、“圆的”、“平的”、“直的”、“弯的”。孩子们怎样形成这些概念呢？我们又怎样去搞清楚他们心目中关于这些词的概念是否和我们一样呢？要回答这些问题，我们必须先讲四项基本活动，即：求同、分类、配对和排列。

第一节 求同

海伦在十六个月大的时候，知道了供她坐在水里玩的这个东西叫"澡盆"。有一段时间她把所有装水的东西都叫"澡盆"。这表明她已经看出了这些东西的一个共同属性，可是她对于"澡盆"这个词的概念却是不符合常规的。后来她知道了还有其他名称(如洗碗池、饭碗)跟这些装水的东西联系着，便逐步地把她对"澡盆"这个词的概念修正得符合常规了。马丁在两岁半的时候把冬青树的红色种子叫做"豌豆"。这表明他已经看出了冬青种子和豌豆之间的一个共同属性。但是他有没有"绿"的概念呢？他没有说"绿"这个字，可是他确有一种"绿"的概念，而他的这个概念将永远不能符合常规。因为，他是红绿色盲，他对于红和绿的概念是一样的。

孩子们在他们的体验范围之内，发现并挑选出一些共同属性，自发地形成概念。这种挑选出共同属性的活动，正式的说法是"求同"。孩子们就是通过求同的方法来学会正确地运用语言——特别是数学语言。在任何求同过程中，你都是在挑选出具有你正在寻求的那种属性的体验，而排除掉那些不具有这种属性的体验。要具有"绿"的概念，你一定得知道什么是绿，还一定得知道什么不是绿。一条鱼恐怕就永远也不会具有"水"的概念！

让孩子们做的求同活动。

要使孩子们形成概念，我们必须为他们提供合适的体验