普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学教育系列教材

总主编：张奠宙　宋乃庆

中学几何研究

张奠宙　沈文选　主编

高等教育出版社

中学几何研究

普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学教育系列教材
总主编:张奠宙　宋乃庆

中学几何研究

张奠宙　沈文选　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“数学教育系列教材”（普通高等教育“十五”国家级规划教材）之一，是关于中学几何内容及其教学理论与实践的概述，包括绪论、度量几何学、欧氏几何的公理化体系、平面几何证题方法、平面几何名题欣赏、中学几何教学的综述、立体几何研究与解题、解析几何研究与解题、球面几何学初步以及几何定理的机器证明等内容。

教材从内容上努力体现当代数学的核心观念，破除过度形式化的体系，返璞归真，平实近人；在叙述上紧密配合国家数学课程改革的需要，为一线教师的数学教学服务。

本书由来自全国多所高等师范院校的专家、学者共同完成，其读者对象是高等师范院校的数学系学生以及有志于从事数学教育的大学生，也十分适合作为中小学教师培训和继续教育用书。

图书在版编目(CIP)数据

中学几何研究/张奠宙，沈文选主编．—北京：高等教育出版社，2006.1

（数学教育系列教材/张奠宙，宋乃庆总主编）

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-017762-5

Ⅰ．中…　Ⅱ．①张…②沈…　Ⅲ．①几何课-教学研究-师范大学-教材②几何课-教学研究-中学　Ⅳ．G633.632

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 148420 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006 年 1 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	定　　价	18.70 元

物料号　17762-00

策划编辑　马　丽

责任编辑　张耀明

封面设计　于文燕

责任绘图　尹　莉

版式设计　范晓红

责任校对　王　雨

责任印制　陈伟光

“数学教育系列教材”编辑委员会名单

本书作者

张奠宙　沈文选　孙熙椿　吴仁芳　沈纯理

龙开奋　蒋　亮　邹一心　何维安　胡庆彪

参加编写审读的还有

宋乃庆　王林全　罗增儒　陈广文　沈文燕

张伟平　刘　丹　黄兴丰　董　超

前　言

本书是《数学教育丛书》中的一册。

当初定名为《中学几何研究》，是为了和《初等几何研究》相区别。实际上，现今中学几何中有度量几何，变换几何，几何基础，复数几何等等，甚至有拓扑学的内容。这些都或多或少地超出了17世纪之前的那种“初等几何”的范围。我们使用“中学几何”的名称，目的是希望能够与时俱进地反映21世纪几何教育发展的境况。

本书的体系是“几何研究”、“教学研究”、“解题研究”三者并重，尽量把三者糅合在一起。这就是说，本书要深入地解释中学几何的内容，要有高观点却不能脱离中学实际，尽可能回答教学中可能遇到的问题。同时，还要顾及如何进行教学，重要的案例和教学经验的叙述是不可少的。当然，也需要有一些解题的研究，因为几何不能离开题目和证明。

数学教育的核心，是呈现数学的教育形态，高效率地让学生理解数学的本质。因此，本书的重点，必须用较高的观点来考察“中学几何”内容，并适当地加以扩充。这里既有绪论中那样全方位地综述几何学的现代进步，包括第九章的球面几何和球面三角，更有第十章那样介绍中国数学家在机器证明上的最新贡献。这些固然超越了中学几何的内容，但是作为中学数学教师，这些修养是不可缺少的。

值得提出的是，在第二章和第三章我们系统地处理了“度量几何”和“公理化方法”。度量几何学，从长度的定义开始，到面积、体积、以至到可列可加测度，加上论述将几何学定量化的三角学，分形以及分数维数的计算，这是全新的几何处理。公理化方法，则分成了5个阶段，包括布尔巴基的结构主义阶段。这两章的基本内容，体现了现代数学思想和中学几何内容的整合，与过去的《初等几何》差异很大。

第四、第五两章是传统的平面几何名题欣赏和证题方法。我们在保持原有精华的基础上，有所精简，有所发展。第七、第八两章，围绕中学的立体几何和解析几何教学，进行了适当的扩展性讲述，希望能够直接对教学内容理解有所帮助。特别地，其中有“例题求解和点评”各一节，希望能够帮助读者复习中学有关

的几何解题训练要求，并通过点评有所提高。

第六章集中研究了几何教学改革。其中有国内外的历史经验，也反映了我国当前的几何学教学改革的争论。但是，我们在简单地阐述本书观点之外，也适当地保持了一定的距离。许多教育改革的是非，需要长时间的考验，不能急于下结论。同时，也希望使用本教材的老师和同学有自己的独立思考。

本书的写作，起自2002年重庆的“数学教育”国际会议。当时由张奠宙和宋乃庆拟订纲要，向全国招标。沈文选撰写了第3、4、5、7、8、9的初稿，孙熙椿撰写了第10章。宋乃庆、罗增儒、王林全和张奠宙在2004年审查了书稿，提出了修改的意见。根据原有的设计，张奠宙补写了第1,2,6各章。以后不断地请许多先生审稿、补充修改。先后部分参与的有沈纯理、吴仁芳、龙开奋等。蒋亮、胡庆彪老师提供了立体几何和解析几何的例题与解答，并有点评，最后经过邹一心、何维安的大幅度修改收入本书。先后参与本书审读的还有陈广文、沈文燕、张伟平、刘丹、董超、黄兴丰。2005年5月，沈文选复看了全书，加以整理。最后，由张奠宙做了删节、修改和润饰。稿子经过多人之手，编拢在一起，不免会有脱漏，这给责任编辑增添了许多麻烦，也会给读者带来一些不便，在此表示深切的歉意。

本书的编写是一次新的尝试。体系、材料、观点有许多是新的。新，未必一定好。但是，总要与时俱进，不能简单地重复过去。本书究竟是否站得住，还得由教学实践来检验。我们静候读者的批评指正。

张奠宙　宋乃庆　沈文选

2005年夏

目　　录

第一章　绪论:几何学——时间与空间的数学

“前不见古人,后不见来者,念天地之悠悠,独怆然而涕下.”这是唐朝陈子昂的诗句,抒发着诗人对时间和空间的万千感慨.

就感性认知而言,人只能认知有限的事物,从生到死的时间短,从他目力所及的领域,就是一个人的时间和空间感知范围.但是人还可以想像,用理性来认识世界,就会得到陈子昂那样的印象:时间无始无终,天地无边无沿.

第一节　几何学的进步概说

茫茫太空,遥遥未来,我们生活的宇宙空间究竟是什么样?这是一个永恒的科学主题.古往今来,不知有多少科学志士为此付出毕生精力,但是研究至今仍未完结.一部几何学发展史,可以说就是各种各样的描摹宇宙的数学框架.请看:

- 时间的几何模型是一维的直线.没有开端,也没有终结.时间和实数集构成一一对应.时间的连绵不断,正是实数连续性的直观背景.
- 现实空间的直观描述是三维的:上下、前后、左右.各向同性、无限广延,处处都有一样的密度.每一个维度相当于一条直线.两个维度构成一个平面.古希腊数学家研究点、线、面的关系,更建立起公理体系.世称“欧氏空间”,其上的几何学,即“欧氏几何学”.
- 一维几何是贫乏的.平面几何就相当复杂.除了直线,直方形和直方体,还有曲线,曲面,各种几何体.最简单的曲线是圆.最简单的几何体有柱体、锥体、台体和球体,他们的表面是最简单的曲面,包括柱面、锥面、球面.这种研究方法,常称为综合几何学的方法.
- 笛卡儿发明了坐标系,把欧氏空间的点变成有序的三元数组(x,y,z).曲线是用只有一个参数的方程表示.曲面则用含有两个参数的方程表示.用代数方法进行演算,使得几何学插上了翅膀.用综合方法研究的圆锥曲线,在代数上表示为二次曲线.解析几何学由此诞生.
- 欧氏几何中平行公理的研究,导致非欧几何学的产生.其实,现实世界并非只有一种几何——欧氏几何学.例如球面上的几何学(以大圆作“直线”看),就不满足欧氏平面几何的公理体系.19世纪发现的非欧几何学,打开了新的天地.

- 几何图形可以搬来搬去，不改变图形的面积、体积. 中国有所谓“出入相补”原理，即基于此种想法. 但是，相似变换，可以把图形放大缩小，面积体积随之而变化. 把物体投影在墙上，形状有变化的成分、也有不变的成分. 这种变和不变，成了几何学的研究对象. 射影几何学成了一门学问.
- 射影几何把线段的长短以及角度的大小都改变了，但是还是有一些东西没有变：相交、共线、共点等等都是. 深入的研究发现，射影变换不改变四点的“交比”. 德国数学家 F・克莱因进一步得出结论：几何学原来是研究不同变换群下几何不变量的学科. 这一被称为“爱尔兰根”纲领的数学成就，影响了整个几何学的发展方向.
- 欧氏几何学所使用的工具很简单，所以只能研究直线、平面、直方体的变化. 由“直”向“曲”的进化，来自微积分的推动. 高斯一般地研究曲面上的几何学，即经典的微分几何学. 最简单的曲面是球面. 地球相当于一个椭球面. 地球上两点之间，以怎样的曲线为最短？ 这相当于问，从上海到洛杉矶，沿着怎样的路线走最短？ 这种“曲面上的最短线”称为测地线. 球面上的测地线就是大圆.
- 微分几何学的一个根本问题是如何“度量”曲线的长短. 曲线的弧长，当然得要用微积分方法进行计算. 高斯给出了一系列的基本度量，其中最重要的是曲率. 曲面上各处的弯曲程度是不一样的，不像欧氏几何到处都是一样的平直（曲率到处是零）.
- 从平直的欧氏空间进到弯曲的一般空间，不仅仅是弯曲程度一个变化，更重要的是整体结构有改变. 我们知道球面、环面具有很不相同的结构. 可是，人们注意到，球面和环面，以及许多曲面，从局部看都差不多，环面上一点周围的一小片，和球面上一点周围的一小片，没有什么大的不同，都可以和欧氏平面上的一个小圆片一一对应起来. 区别的关键在于整体. 比如，球面不能和一块小圆片一一对应. 必须把球面割成两片，每一片和小圆片一一对应. 这种把曲面看成许多小块圆片堆积而成（堆成不同的结构）的观点，就是近代几何学家所说的流形. 流形的整体结构就是拓扑学的研究对象.
- 20 世纪初，爱因斯坦创立“狭义相对论”. 他把一维的时间和三维的欧氏空间放在一起考察. 引起了物理学的革命. 数学上的四维空间，成为现实的对象. 1915 年，爱因斯坦又创立“广义相对论”，把宇宙看成是弯曲的四维空间. 这样，微分几何学和高维几何学结合起来. 宇宙空间原来也是一种流形. 拓扑结构，流形上的距离，高维几何对象的描述方法，一下子提出了无数的几何学问题. 几何学在 20 世纪下半叶，成为数学发展的主

流学科.直到今天,几何学仍然是当代数学的生长点.我们对时间和空间的认识还远远没有完结.

第二节　欧氏几何与非欧几何

灿烂的古希腊文明有许多伟大的成就.但是,影响最为深远的,可以说是数学.它的代表作品是公元前300年左右的欧几里得所写的《几何原本》.它的印刷数量仅次于"圣经".欧几里得几何学已经沿用了两千多年,至今中学教材中的几何学内容还与它基本一致.《几何原本》留给后人的巨大精神财富是它创立的公理化体系,一种理性思维的方法.以下是欧几里得先对一些基本概念(如点、直线、平面等)给出的定义:

(1) 点没有部分;

(2) 线有长度,但没有宽度;

(3) 线的界限是点(注:《几何原本》中没有伸展到无穷的线);

(4) 直线是同其中各点看齐的线;

(5) 面只有长度和宽度;

(6) 面的界限是线;

(7) 平面是与其上的直线看齐的那种面;

(12) 圆是包含在一条(曲)线里的那种平面图形,使得从其内部某一点连到该线的所有直线(线段)都彼此相等,并称圆内上述的那个点为圆的中心(简称圆心);

(23) 平行直线是在同一平面内,而且往两个方向无限延长后,在这两个方向上都不会相交的直线.

欧几里得总共引入了119个定义,给出了五个公理:

(1) 等于同量的量是相等的;

(2) 等量加等量还是等量;

(3) 等量减等量还是等量;

(4) 能重合的量是全等的;

(5) 整体大于部分.

接着,欧几里得再承认了五条公设:

(1) 从每个点到每个其他的点必定可以引直线;

(2) 每条直线都可以无限延长;

(3) 以任意点作中心,通过任何给定的另一点,可以作一圆;

(4) 所有直角都相等;

(5) 同平面内如有一条直线与另两条直线相交,且在前一条直线的某一侧

所交的两内角之和小于两直角,则后两条直线无限延长后必在这一侧相交.(注:在承认了公设(1)—(4)的前提下,可推出“过给定直线外的一点,至少存在一条直线与给定直线不相交.”)

而第五公设的一种等价的陈述为“过给定直线外的一点,至多存在一条直线与给定直线不相交.”

欧几里得在此基础上运用逻辑推断,导出了许许多多的命题(在《几何原本》中包含了 465 个命题),从而构成了欧几里得几何学.

通过这样的演绎方法获得的知识系统,显示了无可辩驳、绝对正确的真理价值,成为人类追求最高科学境界的典范.几何,于是越出数学的范围,浸润着每一块科学园地.

在漫长的中世纪,几何学在不断完善之中.人们想改善《几何原本》中的公理体系.特别是感到第五公设(即平行公理)也许是其他公理可以推出来的“定理”.很多学者(包括一些非常有名的数学家)曾宣称已证明了平行公理能用其他公理推导出来,但最后发现这些论证都是不正确的.

罗巴切夫斯基在 1829 年宣布:用平行公理的反命题,即用“过给定直线外一点,存在着至少两条直线与给定直线不相交”来替代平行公理,并由这套新的体系演绎出一套与欧氏几何迥然不同的命题,但却并没有导致任何矛盾.这样的几何就是非欧几何.后来 Poincaré 提出了一个非欧几何的模型.将非欧几何学在人们已经习惯的欧氏空间中实现出来。自此,非欧几何就成了一种令人信服的、“真正”的几何学.

我们将在第三章进一步对此进行阐述。

第三节 欧氏空间和坐标几何

欧几里得的几何学是现实世界最简单最粗略的近似.他为牛顿的绝对时空准备了数学模型.在牛顿看来,空间像一个大容器,物体在其中运动、静止、放进或移出,空间并不会发生什么变化.另一方面,时间像一条川流不息的河流,无论事件发生或者不发生,时间总是均匀不变地流逝.因此,三维的欧氏几何学可以描述空间、一维的欧氏空间(数轴)可以描述时间,两者互不相干,这是人们最朴素的时空观,也是现今大多数人持有的时空观.在人们日常生活中,用这样的方法描述宇宙也就可以了.

笛卡儿为欧氏空间安上了坐标架,使数形结合起来诞生了解析几何学.用三维的空间解析几何来描述宇宙,增加了“数”的描摹手段,自然有更大的表现力.但是,这也给人们带来了新的问题.这就是,坐标原点如何选择?三根两两垂直

的坐标轴的指向如何确定？换句话说，由于宇宙本来没有坐标，坐标原点和坐标轴的架设完全是人为的，各人可以有各人的笛卡儿坐标系.但是空间中物体的形状、位置和运动是客观存在的，不依坐标系的选择不同而有所改变.例如，线段 AB 的长度，$\triangle ABC$ 的形状在各种坐标系下应该是一样的.所以说，在解析几何学中我们所研究的几何对象乃是那些与坐标系选择无关的量，即在坐标变换下的不变量.

坐标变换是数学家所熟悉的.三维欧氏空间中的两个坐标系 $O-xyz$ 和 $O_1-x_1y_1z_1$，如以 $O-xyz$ 为基准，点 O_1 在坐标系 $O-xyz$ 中坐标为 (d_1,d_2,d_3)，那么任何点 A 的两种坐标 (x,y,z) 和 (x_1,y_1,z_1) 之间满足关系

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+d_1, \\ y_1=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+d_2, \\ z_1=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+d_3, \end{cases}$$

其中 (a_{ij}) 是正交西矩阵.

如果 Oz 与 O_1z_1 平行，那么坐标变换公式为

$$\begin{cases} x_1=x\cos\theta+y\sin\theta+d_1, \\ y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta+d_2, \\ z_1=z+d_3, \end{cases}$$

其中 θ 是 Ox 与 O_1x_1 的夹角.这是平面坐标系的平移与旋转.欧氏几何正是研究在上述变化下的不变性问题，如保持长度与角度不变，保持全等与相似不变，图形面积不变等等.高等代数告诉我们，全体正交西变换构成群(欧氏变换群)，欧氏几何正是研究这一群下的不变量的几何学.

第四节　微分几何与黎曼几何

大家知道笛卡儿在欧氏空间中引入了直角坐标系后，利用数形结合就形成了解析几何学.但是在解析几何学中一般只处理点、直线、平面、二次曲线、二次曲面等几何对象，这是因为将图形转化为数据以后，笛卡儿仅用初等代数学来处理这些数据.随着微积分的发展，分析学也进入了几何学，所以可以利用微积分来揭示出曲线、曲面在其一点附近的弯曲程度，这就形成了三维欧氏空间中曲线和曲面的微分几何学.Gauss 在这方面有着杰出的贡献.曲面论的主要想法是把用参数 (u,v) 表示的曲面上两个无限邻近点之间的距离 ds 表示成 $ds^2=E du^2+2F du dv+G dv^2$，其中 E,F,G 都是参数 u,v 的函数.我们称矩阵

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

为该曲面的度量矩阵,曲面上的许多弯曲的性质都可用度量矩阵刻画出来.

到了 1854 年,黎曼提出了现今人们称之为"黎曼几何学"的思想.在已采用了坐标系$\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$的 n 维空间中,他引入了无限邻近的两点$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$和$(x^1+dx^1,x^2+dx^2,\cdots,x^n+dx^n)$之间的"距离"$ds$ 的概念,ds^2 可用 dx^1,$dx^2,\cdots,dx^n$ 的一个正定二次型来表出:

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

其中(g_{ij})是一个正定矩阵.

后来人们将这种带有度量 ds^2 的空间称为黎曼空间.欧氏几何是一种最简单的黎曼几何,这时的 $g_{ij}=\delta_{ij}$,即

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\cdots+(dx^n)^2.$$

利用度量 ds,我们可以导出黎曼空间中曲线的弧长、区域的面积、向量的平行移动等几何概念,并由此发展成一种崭新的几何学.

后来 Minkowski,Lorentz 等人再将黎曼几何中度量正定性的限制去掉,即$g_{ij}(x)$也可以不是正定的(但要求它是非退化的),这样就导出了 Lorentz 几何,这时

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

其中矩阵(g_{ij})是一个非正定的,但行列式不等于 0 的矩阵.特别地,当

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}+1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix}$$

时,称这种 Lorentz 空间为 Minkowski 空间.

第五节 四维时空、Einstein 狭义相对论、广义相对论

直至 19 世纪末,黎曼几何学或 Lorentz 几何学仍停留在纯理论的发展阶段.但到了 20 世纪初,局面有了明显的变化.大家知道,数学是一门研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学.长时期以来,人们习惯地认为欧几里得空间是现实空间的一种最好的描述.牛顿就采用欧几里得空间来描述物体所在的空间.在牛顿力学中,时间是绝对的,时间和空间是两种类型截然不同的参量.如果在三维欧氏空间中选用笛卡儿直角坐标系$\{O;x,y,z\}$,则物体在时刻 t 的空间位置可用(t,x,y,z)来表示.如果将坐标系$\{O;x,y,z\}$沿 x 轴按常速 a 作平移运