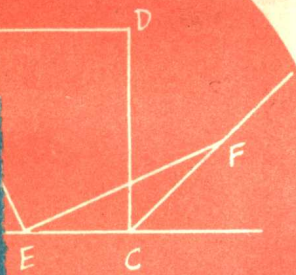
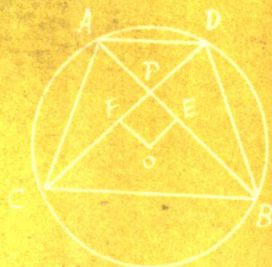
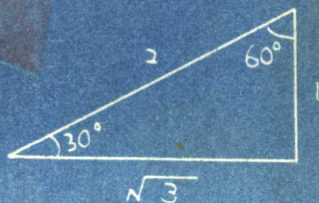


数学竞赛辅导讲座

(初中一年级用)



初中数学课外读物

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座

(初中一年级用)

主编 胡克俭

编者 刘济华

周行明

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座

(初中一年级用)

主编 胡克俭

编者 刘济华 周行明

湖北少年儿童出版社出版 湖北省新华书店发行
荆州新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 5.5印张 120,000字

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：1—204,500

统一书号：7305·121 定价：0.56元

内 容 提 要

《数学竞赛辅导讲座》是初中师生开展数学竞赛活动的指南。

书中将整个初中数学竞赛范围内的知识作了系统的归纳，并根据各年级学生的实际情况，构筑起一个多层次的知识体系，着重于数学思维能力的培养和解题技巧的训练，强调了高一级数学知识的渗透。书中编选的例题和习题，大都是国内外数学竞赛的试题，便于读者了解初中数学竞赛的具体要求。

序

要使学生成为知识的主人而不是成为知识的容器，这种观点已越来越为广大教育工作者所接受。相应地，在中学数学教学领域内，开拓第二课堂的工作也已普遍引起重视。这里，组织数学竞赛活动成为推动这项工作的重要一环。而与竞赛活动相表里的有关辅导讲座理所当然地成为第二课堂内容的重要组成部分。在这种形势下，湖北少年儿童出版社主动组织、编写这套初中数学竞赛辅导讲座丛书，我以为是及时的，有积极意义的，值得向青少年读者推荐。

大家都知道，在数学教育上培养思维能力的工作宜于从早抓起，从少年时代抓起，这套丛书面向初中读者，这也正反映了编辑匠心独具，是这方面下力量的有心人，而参加编写工作的同志，有多年从事中学教研工作的数学工作者，也有多年从事中学数学教学积累有相当丰富经验的中学教师。他们的看法是：编写初中数学课外读物，要从初中学生的实际和初中数学教学的实际出发，要强调立足于教材，略高于教材。在开拓视野，发展能力这两点上，更应侧重于后者。因此从具体内容来看，主要在于从各年级的基础知识出发，突出了综合性和灵活性，我以为从这个角

度来确定读物的深度和广度，对于提高初中数学教学质量，也是有积极意义的。

近年来，我由于工作关系，对于中学数学教学问题接触得比较少，但由于中学生科学文化水平的高低极大地影响着“四化”建设，作为科技工作者，对此是不能不关心的。因此对本丛书的出版，我也由衷地感到高兴。愿意借此机会写几句话作为代序。

齐民友

1984.8.1

目 录

序.....	齐民友
第一讲 常用速算技巧.....	(1)
第二讲 数的进位制.....	(15)
第三讲 抽屉原则.....	(28)
第四讲 分离系数法.....	(42)
第五讲 因式分解.....	(54)
第六讲 待定系数法.....	(67)
第七讲 简易一次不定方程.....	(85)
第八讲 关于若干个变量间的组合问题.....	(106)
第九讲 整数、整除和余数.....	(119)
第十讲 应用题的自由思考.....	(134)
答案与提示.....	(153)

第一讲 常用速算技巧

一、改变运算顺序的速算法

四则运算中的交换律、结合律、分配律是以下各例得以提高运算速度的主导线。

例1 计算 $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots$
 $+ 97 + 98 - 99 - 100$

解：原式 $= (1 - 3) + (2 - 4) + (5 - 7) + (6 - 8)$
 $+ \dots + (97 - 99) + (98 - 100)$
 $= (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + \dots + (-2)$
 $+ (-2)$

50个

$$= 50 \times (-2) = -100$$

例2 计算 $64 + 27 + 81 + 36 + 173 + 219 + 156$

解：原式 $= (64 + 36) + (27 + 173) + (81 + 219)$
 $+ 156 = 100 + 200 + 300 + 156 = 756$

例3 计算 $125 \times 2 \times 131 \times 8 \times 15$

解：原式 $= (125 \times 8) \times (2 \times 15) \times 131$
 $= 1000 \times 30 \times 131 = 3930000$

〔注〕 应记住 $125 \times 8 = 1000$, $25 \times 4 = 100$ 。

例4 计算 $3125 + 13 + 2621 + 13$

解：原式 $= (3125 + 2621) + 13 = 5746 + 13 = 442$

例5 计算 $(\frac{6}{19} - \frac{1}{83}) \times 38$

解：原式 $= \frac{6}{19} \times 38 - \frac{1}{83} \times 38 = 12 - \frac{38}{83} = 11\frac{45}{83}$

例6 计算 $416 \times 221 \div 17 \times 34 \div 208$

解：原式 $= (416 \div 208) \times (34 \div 17) \times 221$
 $= 2 \times 2 \times 221 = 884$

【注】连在一起的一串只含有乘除的算式，一般说来可按顺序逐个进行运算。如果需要改变顺序，应当连同数字前的符号一起移动。

例如： $4 \times 6 \div 5 = 4 \div 5 \times 6$ ，即“ $\div 5$ ”一起移动。

如果需要添括号，若括号前是乘号则括号内的运算不变。若括号前是除号则括号内的乘和除应变成除和乘。

例如： $4 \div 4 \times \frac{1}{4} \neq 4 \div (4 \times \frac{1}{4})$

$4 \div 4 \times \frac{1}{4} = 4 \div (4 \div \frac{1}{4})$

二、求若干个数之和的速算

例7 计算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$

解：原式 $= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98)$
 $+ \cdots + (50 + 51)$
 $= \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101}_{50 \text{ 个}} = 50 \times 101 = 5050$

例8 计算 $42 + 51 + 45 + 38 + 32$

解：原式 $= (40 + 2) + (40 + 11) + (40 + 5) + (40 - 2)$
 $+ (40 - 8) = 40 \times 5 + 8 = 208$

(本题特点是各数都与40相近)

例9 某一小组有12个人, 他们的数学期中考试成绩分别是98, 85, 40, 72, 64, 79, 53, 60, 100, 78, 65, 77, 求该组的平均成绩。

解: 观察这12个数据, 最低分数为40, 最高分数为100, 并且40—70分的有6人, 70分以上的也有6人, 这就是说他们的成绩在70分左右波动, 所以可事先假定其平均成绩为70分, 然后分别计算每一个数据与70的差。它们分别是+28, +15, -30, +2, -6, +9, -17, -10, +30, +8, -5, +7, 利用正负数的特点可很快求得这些数的和为35。这说明如果以每人得70分来算总共还可多35分, 当然这35分应当平分给每一个人。由 $35 \div 12 \approx 2.91$, $\therefore$ 这小组的平均成绩为 $70 + 2.91 = 72.91$ (分)。

〔注〕 这是一种常用的求平均数速算法, 要想掌握得好, 主要是事先应较好地估计出大约的平均值, 平均值估计越准, 余下的计算就越简单。

三、乘除互换的速算

法则1 某数乘以5 (或乘以50, 500……等) 可先将该数除以2再乘以10 (或乘以100, 1000, ……), 即可得积。

(法则的证明并不困难, 我们把它留给读者, 以下同)。

例10 大米每斤0.147元, 买50斤需要多少元?

解: 其心算过程为 $0.147 \div 2 = 0.0735$

$$0.0735 \times 100 = 7.35 \text{ (元)}$$

答: (略)

〔注〕 平常应养成心算某数除以2的习惯。

例11 32.48×500

解：心算过程为：先把 $32.48 \div 2$ 得16.24

再乘以1000得16240

$$\therefore 32.48 \times 500 = 16240$$

法则2 某数乘以2.5（或乘以25，250……）可先将该数除以4再乘以10（或乘以100，1000……）即可得积。

例12 某校有25个班，每班48个学生，该校共有学生多少？

解：心算过程为 $48 \div 4 \times 100 = 1200$ （人）

例13 计算 13.5×2.5

解： $13.5 \div 4 \times 10 = 3.375 \times 10 = 33.75$

〔注〕 此式如用心算，关键在于会速算“一个数除以4”，而速算“一个数除以4”的关键在于背熟 $1 \div 4 = 0.25$ ， $2 \div 4 = 0.5$ ， $3 \div 4 = 0.75$ ，而且能够迅速说出如下一些除法的结果：

$11 \div 4 = 2.75$ （心算过程：易看出商的整数部分是2时，余数为3，见3就应想起商为0.75，故商为2.75）

同理：

$$31 \div 4 = 7.75$$

$81 \div 4 = 20.25$ （余数为1时，立即想到商的小数部分是0.25）

$126 \div 4 = 31.5$ （余数为2时，立即想到商的小数部分是0.5）

法则3 某数乘以1.25（或乘以12.5，125……）可先将该数除以8再乘以10（或乘以100，1000……）即可得积。

例14 某长方形长为45.3米，宽为12.5米，其面积为多少？

解：心算过程为 $45.3 \times 12.5 = 45.3 \div 8 \times 100$
 $= 5.6625 \times 100 = 566.25$ （平方米）。

答：面积为566.25平方米。

〔注〕 关键在于除以8时，建立下述条件反射：

余1，商125 余2，商25 余3，商375 余4，商5
余5，商625 余6，商75 余7，商875

这种结论任何一个人人都应作为生活常识来加以记忆。它

事实上是 $\frac{1}{8}=0.125$ ， $\frac{2}{8}=0.25$ ， $\frac{3}{8}=0.375$ ， $\frac{4}{8}=0.5$ ，

$\frac{5}{8}=0.625$ ， $\frac{6}{8}=0.75$ ， $\frac{7}{8}=0.875$ 的翻版。所以本例中
 $45.3 \div 8$ 心算出商为5.6还余5时就立刻想到下面的商为625，故总商为5.6625。又如： $38 \div 8 = 4.75$ （商为4时余6，应立即想起下面的商为75）。

法则4 某数除以5（或除以50，500……）可以先将该数乘以2，再将积的小数点向左移1位（或左移2位、3位……）即可得商。

例15 计算 $3287 \div 5$

解：心算 $3287 \times 2 = 6574$ 再左移一位小数点得657.4。

例16 $493 \div 50$

解：心算 $493 \times 2 = 986$

再左移二位小数点得9.86。

法则5 某数除以2.5（或除以25，250，……）可先将该数乘以4，再将积的小数点左移1位（或左移2位、3位，

……)，即可得商。

例17 计算 $24.5 \div 2.5$

解：先心算 $24.5 \times 4 = 98$

再左移一位小数点得商9.8。

法则6 某数除以1.25（或除以12.5，125，……）可先将该数乘以8，再将积的小数点左移1位（或左移2位，3位，……），即可得商。（本法则心算时不太方便，但笔算时可很快得结果）

例18 计算 $37.82 \div 125$

解： $37.82 \div 125 = 37.82 \times 8 \div 1000$

$$= 302.56 \div 1000 = 0.30256$$

读者自己还可以创造一些类似的速算法则，比如

$$96 \times 75 = 96 \times \frac{3}{4} \times 100 = 96 \div 4 \times 3 \times 100 = 7200,$$

$$24 \div 375 = 24 \div \frac{3}{8} \times 1000 = 24 \times \frac{8}{3} \div 1000$$

$$= 24 \div 3 \times 8 \div 1000 = 0.064,$$

$$56 \times 875 = 56 \times \frac{7}{8} \times 1000 = 56 \div 8 \times 7 \times 1000 = 49000$$

……等等。

四、某些特殊乘法的速算

1. 末尾为5的数的平方的速算法。

先来看几个例子， $25^2 = 625$ ， $35^2 = 1225$ ， $105^2 = 11025$ ，特点是积的末二位均是25，25前的数可以这样得到：625中的6可由25²中的2乘以3得到，1225中的12可由35²中的3乘

以4得到, 11025中的110可由 105^2 中的10乘以11得到。把这种规律总结出来是:

法则7 求末尾是5的数的平方, 只要把5前面的数乘以一个比它大1的数, 再把所得的积后面添上25即得结果。

例19 求① 85^2 ② 215^2

解: 心算过程① $8 \times 9 = 72$, 其后添25, 得积7225

② $21 \times 22 = 462$, 其后添25, 得积46225

2. 个位上的数的和为10, 其余各位上的数相同的两个数的乘法的速算法。

观察: $23 \times 27 = 621$, $38 \times 32 = 1216$,

$104 \times 106 = 11024$ 。

比较末尾是5的数的平方的速算法可得:

法则8 个位上的数字之和为10, 其余各位上的数相同的两个数相乘, 只要把两个个位数前的数乘以比该数大1的数, 把所得的积后面留两个数位, 在这两个数位上再添上两个个位上的数的积。

例20 $41 \times 49 = 2009$

〔注〕不要写成209, 后面应留两个数位来添数。

例21 $256 \times 254 = 65024$

〔注〕 $25 \times 26 = 25 \times (25 + 1)$
 $= 25^2 + 25 = 625 + 25 = 650$ 所以
 25×26 也可心算。

小读者们可以探索一下 226×274 , 108×192 的速算法, 它的特点是末两位数之和为100, 其余各位上的数相同。

3. 个位上的数相同, 十位上的数字之和为10的数相乘的速算法。从下列的算式中大家可发现这种乘

法的速算法则。

$$45 \times 65 = 2925$$

$$78 \times 38 = 2964$$

$$29 \times 89 = 2581$$

$$82 \times 22 = 1804$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 65 \\ \hline 2425 \\ 5 \\ \hline 2925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ 38 \\ \hline 2164 \\ 8 \\ \hline 2964 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 89 \\ \hline 1681 \\ 9 \\ \hline 2581 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ 22 \\ \hline 1604 \\ 2 \\ \hline 1804 \end{array}$$

我们把它总结成：

法则 9 个位数相同，十位上的数之和为10的两数相乘，只要把十位上的数相乘，将其积加上个位数并留两个数位，在这两个数位上写上两个个位上的数字之积。

〔注〕读者可以推广到个位上的数相同，其余各位上的数之和为100，1000的情况。

4. 末位是5的两个数相乘的速算法。

观察下面4例：

例22 $65 \times 25 = 1625$

竖式中4是 $(6+2)$ 的一半。

$$\begin{array}{r} 65 \\ 25 \\ \hline 1225 \\ 4 \\ \hline 1625 \end{array}$$

例23 95×45

$$= 4275$$

竖式中的65是 $(9+4) \div 2$

的商的两个有效数字。

$$\begin{array}{r} 95 \\ 45 \\ \hline 3625 \\ 65 \\ \hline 4275 \end{array}$$

例24 135×75

$$= 10125$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 75 \\ \hline 9125 \\ 10 \leftarrow \text{是}(13+7) \div 2 \\ \hline 10125 \end{array}$$

所得

例25 105×115

$$= 12075$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ 115 \\ \hline 11025 \\ 105 \leftarrow \text{是}(10+11) \div 2 \\ \hline 12075 \end{array}$$

所得商的三个数字

于是有下面的法则，

法则10 个位上都是5的两数相乘，只要将两数中5前面的两个数相乘并加上它们相加后的一半，再将其和乘以100，最后再加上25，即得最后结果。

5. 两位数与11相乘的心算法。

法则11 若已知的两位数的数字之和不超过10，那么只要把这两位数的两数字中间插入这个两位数的两数之和，即得与11相乘的结果。

若已知的两位数的数字之和超过10，那么只要把十位上的数加上1，个位上的数不动，再在它们中间插入这个两位数的数字之和的个位上的数，即得与11相乘的结果。

例26 ① $25 \times 11 = 275$ 心算过程为：把25拆分成 $2 \square 5$ ，在方框中加入 $(2 + 5) = 7$ 即得275。

② $36 \times 11 = 396$ (其中 $9 = 3 + 6$)

③ $48 \times 11 = 528$ 心算过程为：因 $4 + 8 = 12$ 超过10，所以把 $4 + 1$ 得5，个位8不动写成 $5 \square 8$ ，方框中再插入 $4 + 8$ 的个位上的数2，即得528。

④ $97 \times 11 = 1067$ (其中6是 $9 + 7 = 16$ 的个位上的数)

6. 两个接近100的数相乘的速算法。

设： $a = 100 + h$ $b = 100 + k$

这里h、k是比起100来较小的两数，一般在-20——20之间。(即h、k可正也可负)

为了叙述方便我们把h、k分别称为a、b对100的差数，于是有：

法则12 两个稍接近于100的数相乘，可以先把其中一个数加上另一数的差数，然后把结果乘以100(即添上两个

空位)，再加上两个差数的积。

例27 计算 106×109

这里两数稍大于100， $h=6$ ， $k=9$ ，先把 $106+9=115$ ，留两空位得 $115 \square \square$ ，添上两差数之积 $6 \times 9=54$ ，最后得积11554。

例28 计算 113×108

解： $113+8=121 \longrightarrow 12100+13 \times 8$
 $\longrightarrow 12204$

则 $113 \times 108=12204$

例29 计算 97×88

解：两数都比100稍小， $h=-3$ ， $k=-12$

心算过程为 $97+(-12)=85 \longrightarrow$

$8500+(-3)(-12)=8536$

$\therefore 97 \times 88=8536$

例30 83×92

解： $83+(-8)=75 \longrightarrow 7500+(-17)(-8)$
 $=7500+136=7636$

例31 108×95

解：一数比100稍大，另一数比100稍小

$h=8$ ， $k=-5$

则 $108+(-5)=103 \longrightarrow 10300+8 \times (-5)$
 $=10260$

$\therefore 108 \times 95=10260$

五、平方数的速算法

如果你能记住1—25的平方数（经验证明必须要求做到