HEBEIJIAOYUCHUBANSHE

初等数学解证方法辞典

夏圣亭　主编

河北教育出版社

初等数学解证方法辞典

夏圣亭　主编

(冀)新登字 006 号

初等数学解证方法辞典

夏圣亭　主编

河北教育出版社出版发行(石家庄市城乡街 44 号)

河北新华印刷一厂印刷

787×1092 毫米　1/16　61.25 印张　2,150 千字　1995 年 9 月第 1 版

1995 年 9 月第 1 次印刷　印数 1—3,000　定价:69.80 元

ISBN 7-5434-2385-5/O·31

前言

现行数学辞典有两类，一类是以数学概念、公理、定理为条目编排而成的辞典；另一类是以问题为条目的题解中心辞典。对于学习、研究数学的人来说，前者比较抽象，后者实是“题海”，然而一方面数学问题终究是难以穷尽的，另一方面纯粹解题有一定的局限性。本书试图以数学方法，包括探索方法、思维方法、解题和证题方法为中心，形成一本为学习和研究数学者开拓数学能力的新辞典，为数学辞典的发展抛砖引玉。

全辞典分A、B两部分，A部是基本知识，是基础部分；B部是解证方法，是本书的主体。计有各种方法205条，对于每条方法都有详细的说明，包括方法的内容、如何运用，以及注意点等，并配有适当的例题帮助“消化”。A部第一部分是基本概念，第二部分是定理和公式的归纳；B部第一部分是从“解题要诀”开始的27条一般方法，也可以说是总论，后面就是按学科系统编排的分论，其中有不少好的方法和观点，对于学习和研究数学必定大有裨益。本辞典内容以初等数学为限，但涉及的许多方法常见用于数学的更高领域，因此具有学习上的长远价值。

概括起来，本辞典兼具下列六种功能：

(1) 数学概念、定理和公式检索；

(2) 系统复习数学知识；

(3) 典型题解（如平面几何的“名题解证方法”条）可供参考和欣赏；

(4) 学习、研究数学探索法（发散性思维方法）；

(5) 学习、研究解决各种数学问题的方法；

(6) 学习、探讨初等数学各分支学科的方法特性。

为检索方便，本辞典根据检索内容的不同，分别采用两种条目索引，按知识系统的索引和按首字笔画的索引。其中有关解证方法的部分，即B部的条目，采用按知识系统编排的索引，放在正文前面，见索引一。而关于A部基本概念和定理、公式部分的条目，前者采用按首字笔画编排的索引，后者采用

按知识系统编排的索引，此二部分索引放在正文后面，见索引二。

本辞典不仅是广大中学生学习数学的良师益友，而且还是老师教学及家长辅导孩子的得力助手。特别适合广大中学师生阅读使用。

本辞典的编著历经年余，参加工作的人员有周启泰、张立行、卢乃周、朱根娣、孙萍、全渭英、叶楚华、夏宇令、杜健、盛玉芳、李国先、朱吕俊。全书虽经多方校订，其中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

夏圣亭

1992年3月于上海

目录

索 引 一

解证方法条目系统索引

这里是正文B部解证方法部分的条目，按知识系统并结合本书顺序编排的索引。

A 基本知识

一　初等数学基本概念

§1　一般概念

代数学　在初等的意义下，代数学是指不用数字表示个别的数而用字母代表一般的数，这样来研究数的关系、数的性质和数的运算法则的数学分支．现在，代数学的对象已由数扩大到向量、矩阵等，一般地说，已扩大为代数系，代数学已发展成为研究代数系的性质和结构的近世代数学（即抽象代数学）．代数学简称代数．

三角学　以三角形的边角关系为基础，研究几何图形中的数量关系及其在测量方面的应用的数学分支，称为三角学，简称三角．三角学一词的英文 trigonometry 来源于两个希腊词——“三角形”和“测量”．现在，三角学主要研究三角函数的性质及其应用．与平面三角形相联系的三角学称为平面三角学，与球面三角形相联系的三角学称为球面三角学．

几何学　几何学是数学的一门分科，它研究空间的形式和关系，以及结构上相类似的其他一些形式和关系．初等几何研究平面和空间中图形的形状、大小和相关位置，分别称为平面几何和立体几何．

解析几何　解析几何又叫做坐标几何，它是用代数方法来研究一些简单图形，例如直线、二次曲线、平面和二次曲面等的一门学科，是几何学的一门分科．它包括平面解析几何和空间解析几何两个部分．

定义　揭露概念的内涵的逻辑方法叫做定义．通常的说法是：对一个名词或术语的意义的规定，就是这个名词或术语的定义．

命题　在形式逻辑中，对事物有所肯定或否定的思维形式叫做判断，而用语句来表现就叫做命题．

说明　(1) 从语法来讲，凡陈述句都是命题．

(2) 通常用大写拉丁字母，或几个字母用连接词组合起来，以表示命题．用字母表示命题的方法，是由麦柯尔首先提出的．

(3) 命题有真有假，这里的真和假统称真值．通常用 1 和 0 分别表示真命题和假命题．例如，如果命题P为真命题，便记作$P=1$；如果命题Q为假命题，就记作$Q=0$，真值包括真和假这两种情况的，叫做两值逻辑，此外还有多值逻辑．

命题的四种形式　对于表现假言判断的命题，有标准形式：“如果P，则Q”．这里P称为条件，Q称为结论．对这种命题形式，可以作如下另外三个重要的变形：

原命题　如果P，则Q．

逆命题　如果Q，则P．

否命题　如果非P，则非Q．

逆否命题　如果非Q，则非P．

这就是命题的四种形式．

说明　(1)原命题和逆命题、否命题和逆否命题是两对互逆命题；原命题和否命题、逆命题和逆否命题是两对互否命题；原命题和逆否命题，逆命题和否命题是两对互逆否的命题．

(2) 互逆否的两个命题是等值的，但两个互逆命题或两个互否命题都不一定等值，须分别检查其真假．

分断式命题　如果有 n 个命题：“若 A_1 则 B_1”、“若 A_2 则 B_2”…、“若 A_n 则 B_n”，这里 A_1、A_2、…、A_n 两两不相容且其和包括了一个问题中的一切可能；B_1、B_2、…、B_n 也两两不相容且其和包括了一个问题中的一切可能，这样的 n 个命题一并叫作分断式命题．

公理　不加证明而予以承认且以之为基础展开论证的最基本的命题叫作公理．

公理系统　作为某一数学理论的基础的所有的公理，称为它的公理系统．通常要求一个公理系统应当具有相容性（不能从这组公理同时推出一个命题及其否定）和独立性（其中每一条公理都不能从其他公理推出）．

定理　经过推理论证，证得其正确性的命题，叫做定理．

推理　从已知的旧知识出发，通过实践、推想、

验证，可以获得前所未知的新知识．这种推陈出新的思维过程叫做推理．

证明

1　命题的证明　命题："如果P，则Q."的证明是从条件P开始的一个有穷的逻辑推理序列，其中每一推理的依据是以下三种依据之一：

(1) 公理；

(2) 定理；

(3) 本序列中次序在前的推论．

而最后推理的结论是Q．

2　公式的证明　公式A的证明是一个有穷的公式序列，其中每一公式的推演适合以下条件之一：

(1) 公理；

(2) 定理；

(3) 本序列中次序在前的公式的变形．

而最后一个公式是公式A．

充分条件　设条件A成立，就可推出结论B成立（若A，则B），就说A是B的充分条件．

必要条件　如果不具备条件A，就不会有结论B(即$\bar{A}\Longrightarrow\bar{B}$)，就说$A$是结论$B$的必要条件．

充要条件　若条件A既是结论B的充分条件，又是结论B的必要条件，就说A是B的充分必要条件，简称充要条件．

相等　相等是数学的一般概念．把它使用于不同对象时，就有不同的含义．例如，"实数的相等"、"复数的相等"、"线段的相等"、"集合的相等"……它们的具体意义就各不相同．对于图形的几何性质的相等，也常说成"合同"，并采用记号"≌"．

解　按照问题的已知条件，运用已获知识，按规定要求，解决所提问题的过程，称为解题，简称解．

§2　集合概念

集合　一般定义凡具有某种性质的、确定的、能够区分的事物的全体就是一个集合(或集)．组成集合的每个事物叫做该集合的元素．

康托尔于1882年首先引入集合的概念．然而，从康托尔的集合定义出发，后来发现了逻辑上的悖论．由于集合的概念已成为数学各分支的重要基础，所以悖论的出现引起了深刻的反响．于是，为了避免悖论，便提出了用公理系统来定义集合．1908年，德国数学家策梅罗首先建立了一个公理系统，后经弗兰克尔·科恩的改进，形成了ZFC系统．此系统是由外延公理、正则公理、空集合公理、无序偶集合公理、并集合公理、幂集合公理、无穷集合存在公理、替换公理和选择公理所组成．同年，英国哲学家和数学家罗素也发表了一个称为类型论的公理系统．以后，贝尔内斯、诺依曼、哥德尔又建立了另一种简称BNG的公理系统．

集合的表示方法　常见的有下列两种：

1　列举法　把一个集合的元素全部列出，并用花括号括起的方法叫做列举法．例如：

集合A表示"中国的直辖市"．则可记作$A=\{$北京、上海、天津$\}$；

集合B表示"小于10的正奇数"，则可记作$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$．

对于只含有有限个元素的集合常用此法表示．

2　描述法　用描述集合中元素的共同属性的方法来表示集合．例如

$$B=\{b\,|\,b\text{为奇数}，0<b<10\},$$
$$C=\{(x,\ y)\,|\,x+y=\sqrt{2}\}.$$

花括号中用一短竖线划分成两部分，竖线左面是表示该集合元素的记号，竖线右面是该集合元素的共有属性，也就是定义集合的条件．

此外还可以用特征函数来表示集合（见"特征函数"条）．

特征函数　设A是集合U的一个子集，给定U上的一个函数

$$A(a)=\begin{cases}1，\text{当 } a\in A \text{ 时；}\\0，\text{当 } a\notin A \text{ 时，}\end{cases}$$

函数$A(a)$叫做集合A的特征函数．

只要给出U的一个子集A，就唯一地确定了一个A的特征函数；反过来给定U中的一个特征函数，也就唯一确定了一个U的子集A．因此特征函数也是表示集合的一种方法．

经典集合论　研究集合（清晰集）的运算及性质的数学分支叫做经典集合论．

集合的基本特征

1　确定性　集合中的任何一个对象，可以通过某种法则来判定它属于或不属于这个集合，二者必居其一．

2　互异性　在同一个集合里，不能重复出现相同的元素．

3　无序性　在同一集合里，不考虑元素之间的顺序．

空集　不含任何元的集称为空集，记为$\varnothing$．

有限集　含有有限个元素的集称为有限集，记为
$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}.$$

无限集　非有限集称为无限集．

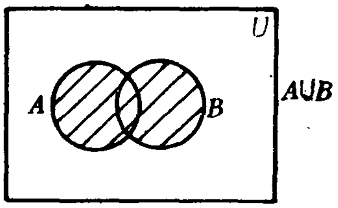
单元素集　仅含一个元a的集称为单元素集，简称单元集，记为$\{a\}$．a与$\{a\}$的意义是不同的，它们之间的关系是$a\in\{a\}$．

包含 若$x \in A \Rightarrow x \in B$，则称$B$包含$A$，记为$A \subseteq B$，并称$A$是$B$的子集；若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等，记为$A = B$（否则，$A \neq B$）；若$A \subseteq B$，但$A \neq B$，则称$B$真包含$A$，记为$A \subset B$，并称$A$是$B$的真子集。

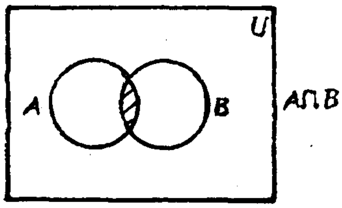
论域 作为被考虑对象的所有元的全体称为论域（又称全集），通常以大写字母U，V或X，Y表示。

幂集 设U是论域，由U的所有子集为元素而构成的集称为U的幂集，记为$P(U)$。$\varnothing$与U是U的两个特殊子集，称为U的平凡子集。

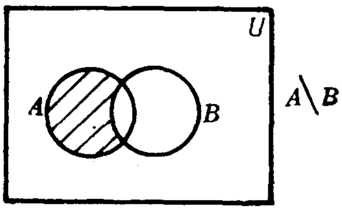
设U为论域，A、B、$C \in P(U)$，定义集的运算如下：



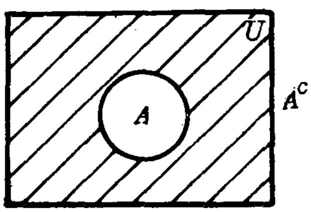
图A 1-1



图A 1-2



图A 1-3



图A 1-4

并集 由A和B中的元的全体所构成的集称为A与B的并集，记为$A \cup B$，即$A \cup B = \{u | u \in A \text{或} u \in B\}$。

交集 由A和B中的公共元所构成的集称为A与B的交集，记为$A \cap B$，即$A \cap B = \{u | u \in A \text{且} u \in B\}$。

差集 由属于A但不属于B的元所构成的集称为A与B的差集，记为$A \setminus B = \{u | u \in A \text{且} u \notin B\}$。

补集 由论域U中不属于A的元所构成的集称为A在U中的补集，记为$U \setminus A = A^C$，或记为$\bar{A}$。当$B \subseteq A$，称$A \setminus B$为B在A中的补集。

自然数集 全体自然数组成的集合，称为自然数集，记作N。

整数集 全体整数组成的集合，称为整数集，记作Z。

有理数集 全体有理数组成的集合，称为有理数集，记作Q。

实数集 全体实数组成的集合，称为实数集，记作R。

复数集 全体复数组成的集合，称为复数集，记作C。

§3 数的概念

自然数 数起源于数"数"，一个一个地数，因此出现了

1，2，3，……

这叫做自然数。全体自然数组成的集合称为自然数集，记作N。

数学的发展要求建立公理化体系来定义自然数。皮亚诺在1891年给出了关于自然数的公理化体系，并被广泛使用。他关于自然数的五条公理（称为皮亚诺公理）是：

(1) 1是一个自然数；

(2) 1不是任何其它自然数的后继者；

(3) 每一个自然数n都有一个后继者；

(4) 如果m与n的后继者相等，则m与n也相等；

(5)（归纳公理）若一个由自然数组成的集合S含有1，又若当S含有任一数n时，它一定也含有n的后继者，则S含有全部自然数。

适合这五条公理的集合叫做自然数集，记作N，它的元素叫做自然数。

正、负数 自然数1，2，3，…，分数$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{4}$，…，及无理数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，…等都可以

用来表示一种量或两个量的比值，为分清和表示相反意义的量，规定其中一种量是正的，另一种是负的，正的量用以上那些数前面加符号“+”表示，如$+1$，$+2$，…，$+\frac{1}{2}$，$+\frac{2}{3}$，$+\frac{5}{4}$，…及$+\sqrt{2}$，$+\sqrt{3}$，$+\pi$…等（通常省略掉“+”号），这样的数称为正数；负的量用以上那些数前面加符号“-”表示，如-1，-2，-3，…，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，$-\frac{5}{4}$，…及$-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$-\pi$…等，这样的数称为负数。这里的“+”和“-”称为性质符号。它们与跟它们有相同形状的运算符号“+”(加)和“-”(减)是不同的。

相反数 绝对值相同而符号相反的两个实数，叫做互为相反数，记为a与$-a$，其中的一个就叫做另一个的相反数。特别，数0的相反数仍是0。

倒数 若两数之积为1，就说其中任一数是另一数的倒数。

绝对值 实数a的绝对值用$|a|$表示，它定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时；}\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

实数绝对值的几何意义，是数轴上表示这个数的点到原点的距离。

实数绝对值概念还可以引伸到复数域．复数$z=a+bi$（其中a、b都是实数）的绝对值，又叫做复数的模，仍记作$|z|$，定义为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。在复平面上，复数$z=a+bi$确定一点$Z(a,\ b)$。复数z的绝对值（模）就是点Z到原点的距离。

整数 符号…-3，-2，-1，0，$+1$，$+2$，$+3$，…表示的数称为整数，其中$+1$，$+2$，$+3$，…称为正整数，也就是自然数。亦可简化为1，2，3，…；0称为零；-1，-2，-3，…称为负整数。于是，整数就是指正整数、零和负整数。一切整数所组成的集合称为整数集。

整除 对于任意两个整数m、$n(n\neq0)$，若存在整数q，使$m=nq$，就说m被n整除，或n能整除m，记为$n|m$，这时，称n是m的约数（或因数），称m为n的倍数。

奇数 整数中不能被2整除的数叫做奇数。奇数一般表成$2n-1$或$2n+1$形式，其中n是整数。

偶数 整数中能被2整除的数叫做偶数。如0，±2，±4，±6，…等。偶数一般表成$2n$形式，其中n是整数。

同余 给定一个正整数m，把它叫做模。如果用m去除任意两个整数a与b所得的余数相同，则称a、b对模m同余，记作$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\, m)$，如果余数不同，则称$a$、$b$对模$m$不同余，记作$a\not\equiv b\ (\mathrm{mod}\, m)$。

剩余类 若m是一个给定的正整数，则全部整数可以分成m个集合，记作k_0，k_1，…，k_{m-1}，其中$k_r(r=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$是由一切形如

$$mn+r\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

的整数所组成的。上述k_0、k_1、…、k_{m-1}叫做模m的剩余类。如$m=3$，则全部整数可以分成$3n$，$3n+1$，$3n+2$等三类。

有理数 分数$\frac{m}{n}$称为有理数，其中m、n为整数，$n\neq0$．当$mn>0$时，$\frac{m}{n}$称为正有理数；$m=0$时，$\frac{m}{n}=0$是零；$mn<0$时，$\frac{m}{n}$称为负有理数。于是有理数就是指正有理数、负有理数和零。全体有理数所组成的集合称为有理数集，记作Q。

无理数 无理数是无限不循环小数．全体无理数所组成的集合称为无理数集。

算术平均数 对于n个实数a_1，a_2，…，a_n，称

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

为n个数的算术平均数。

几何平均数 n个正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的连乘积的n次算术根$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，叫做这$n$个数的几何平均数。

方根 如果一个数a的n次方等于数b，即$a^n=b$，则a叫作b的一个n次方根。特别地，二次方根又叫平方根，三次方根又叫立方根。

开方 求一个数的n次方根的运算，叫做对这个数开n次方。$n=2$时，叫做开平方，简称开方，$n=3$时，又叫做开立方。

算术根 对于正实数a，它的n次方根中有一个仍是正实数，把这一个n次方根叫做正实数a的n次算术根，记作$\sqrt[n]{a}$。

误差 准确数A与它的近似数a之差称为近似数a的误差，误差的绝对值，即$|A-a|$称为近似数a的绝对误差。

一个近似数a的绝对误差所不超过的那个正数α，称为近似数a的绝对误差界。

近似数a的绝对误差与准确数A之比，即$\frac{|A-a|}{A}$称为近似数a的相对误差。

这一定义中，由于A一般不知道，且由于a与A

较接近，$\frac{|A-a|}{a}$与$\frac{|A-a|}{A}$相差十分微小并在实际应用上允许忽略，故近似数的相对误差也可定义为：近似数a的绝对误差与a之比，即$\frac{|A-a|}{a}$。

近似数a的相对误差所不超过的那个正数δ，称为近似数a的相对误差界。

有效数字 设x^*是x的一个近似数，若x^*的最大绝对误差不超过从左边第一个非零数字算起第k个位上的半个单位，就说近似数x^*有k个有效数字，这时x^*左边第一个非零数字到第k位止的这k个数字，都叫作x^*的有效数字。

实数 有理数和无理数统称为实数。

复数 形如$a+bi$的数称作复数，其中a、b为实数；i满足方程$x^2+1=0$，称作虚数单位。这里，a称作复数$z=a+bi$的实部，记作$Re(z)$或$R(z)$；bi称作复数$z=a+bi$的虚部，而实数b称作虚部系数，记作$Im(z)$或$I(z)$。对于复数$z=a+bi$，当$b=0$时它就是实数；当$b\neq0$时叫做虚数；而当$a=0$、$b\neq0$时叫做纯虚数。

对于两个复数，规定：当且仅当它们的实部与虚部分别对应相等时，才认为是相等的。

全体复数所组成的集合称作复数集，通常用C来表示。

复数的几种表示形式

1 代数形式 $z=a+bi$（其中a、b为实数，i为虚数单位）。

2 几何形式 用复平面上的点$Z(a, b)$表示。

3 向量形式 用复平面上的一个向量$\overrightarrow{OZ}$表示。向量$\overrightarrow{OZ}$的长度$r=\sqrt{a^2+b^2}$称作复数的模，记作$|z|$；向量$\overrightarrow{OZ}$与x轴正向的夹角叫做复数的辐角，记作$\mathrm{Arg}z$。每个不等于零的复数z的辐角均有无数个值，它们之间相差2π的整数倍，其中适合于条件$0\leqslant\theta<2\pi$的辐角θ的值称作辐角的主值，记作$\arg z$，所以有：

$$\mathrm{Arg}z=2k\pi+\arg z(k\in Z)\ .$$

复数0对应于零向量，它没有确定的方向，所以没有确定的辐角。

4 三角函数形式 任一个不为零的复数z可表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中r为z的模，θ为z的辐角。

5 指数形式 复数z可表示为$z=re^{i\theta}$。

6 矩阵形式 复数z可表示为$z=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$。

共轭复数 如果两个复数的实部相等，而虚部系数互为相反数，则这两个复数称作共轭复数。z的共轭复数记作$\bar{z}$，即$\overline{a+bi}=a-bi$。当$b=0$时，共轭复数为两个相等的实数；当$b\neq0$时，共轭复数为两共轭虚数。

复平面 对于任意取定的一个复数$z=a+bi$，总可以在平面直角坐标系中找到唯一的坐标为(a, b)的点和它对应，这样和复数全体建立起一一对应的坐标平面叫作复数平面，简称复平面。

在上述一一对应下，原点对应复数0，横轴上的点对应实数，纵轴上除原点外的点对应纯虚数。

我们把复平面上的横轴叫作实轴，而把纵轴叫作虚轴。

在复数平面上，表示一对共轭复数z和$\bar{z}$的两个点关于实轴对称。

数的扩张与分类表

自然数

（减法）↓

整　数$\begin{cases}\text{零}\\ \text{正整数（即自然数）}\\ \text{负整数}\end{cases}$

（除法）↓

有理数（即分数）$\left.\begin{cases}\text{零}\\ \text{正有理数}\\ \text{负有理数}\end{cases}\right\}$有限小数或无限循环小数

（极限）↓

实　数$\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$

（代数方程）↓

复　数$\begin{cases}\text{实数}\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\ \text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$

或：复数$\begin{cases}\text{代数数}\\ \text{超越数}\end{cases}$

代数数 若数ξ满足一个有理系数代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+a_n=0,$$

则ξ叫做一个代数数。若此方程的系数都是整数，则ξ叫做代数整数。若ξ所满足的最低次的代数方程的次数是n，则ξ叫做n次代数数，n叫做ξ的次数，如$\sqrt{2}$称为二次代数整数。

超越数 给定数a，如果不存在任何整系数多项式$f(x)$，使a是方程$f(x)=0$的根，就称a为超越数。例如，圆周率π和自然对数的底e都是超越数。一个实数如果是超越数，就必定是无理数。但反过来，无理数却未必是超越数，例如无理数$\sqrt{2}$就不是超越数，因为$\sqrt{2}$是方程$x^2-2=0$的根。

§4 代数式

代数运算 通常指加、减、乘、除、乘方和开方运算。

广义地说，当给定集合 A、B、C时，一个从$A\times B$到C的映射，称为从$A\times B$到C的代数运算。即对于A的任何元素a，B的任何元素b，通过映射得到C的元素c，这时就说对于a和b进行代数运算，得到结果c。例如，设$A=\{$所有整数$\}$，$B=\{$所有不等于零的整数$\}$，而运算“$\cdot$”定义为

$$(a,\ b)\to\frac{a}{b}=a\cdot b,$$

这时，运算“$\cdot$”是一个从$A\times B$到C的代数运算，它就是普通的除法。

代数和 有理数的加、减法可统一写成加法的形式，相加所得的结果称为代数和。求代数和时，各加项带有性质符号(正号省略不写)，因而所得的代数和既可为正，也可为负，或为零。

代数式 由数和字母经有限次代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）所组成的表达式叫做代数式。

代数式的值 已知一个代数式，把式中字母用给定数值代替后，运算所得结果叫做在字母为给定数值时代数式的值。

代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

有理式 若干个字母和数字，经过有限次加、减、乘、除和乘方运算，所得的式子叫有理式。

整式 一些字母和数字，经过有限次加、减、乘、乘方所得的式子叫有理整式，简称整式。整式分为单项式和多项式两种。

单项式 由数值系数与变数的非负整数次幂所构成的乘积，叫做这些变数的单项式（变数一般用字母表出）。

当数值系数不为0时，单项式中任一变数的幂指数叫做单项式关于这个变数的次数。单项式关于其所有变数的次数的和叫做这个单项式的次数。单独一个不为零的数看作0次单项式。数0也看成单项式，但不规定次数。

同类单项式 设有由相同自变数组成的两个非零单项式$Ax^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{q_1}$与$Bx^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{q_2}$，如果每一个自变数的次数都相同，即

$$k_1=k_2,\ l_1=l_2,\ \cdots,\ q_1=q_2.$$

那么这两个单项式就叫做同类单项式。

多项式 由一些字母和数进行加法和乘法所构成的代数式叫做多项式，又叫做有理整式，简称整式。

单项式被看成多项式的特例。每个多项式或者是单项式，或者是若干单项式的代数和，这些单项式的次数的最大值叫做这个多项式的次数。单独一个非零常数叫做零次多项式，数零叫做零多项式。

当多项式中的某些字母表示自变数时，就得到多项式函数，仍简称为多项式。只含一个自变数的多项式称为一元多项式，含有两个或更多个（独立）自变数的多项式称为多元多项式。

同类项 把一个多项式看成若干个单项式的代数和，这样，其中的每一个单项式便成了多项式中的一个项，而把其中的同类单项式叫做这个多项式中的同类项。

升、降幂排列 一个多项式的各项，如果按照某一字母的幂，由小到大排列，则这种排列方法叫做关于这一字母的升幂排列。反之，按照某一字母的幂，由大到小排列，则称为关于这一字母的降幂排列。

字典排列法 对n个元x_1，x_2，…，x_n的多项式中的两个项$ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$和$bx_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$，若$\alpha_1-\beta_1$，$\alpha_2-\beta_2$，…，$\alpha_n-\beta_n$中第一个非零差为正数，就把$ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$排在$bx_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$之前；如为负数，就排在其后，这种对多项式的项进行排列的方法，叫做字典排列法。

齐次多项式 如果把一个多项式$P(x,y,\cdots,z)$写成标准形式

$$P(x,\ y,\ \cdots,\ z)=A_1x^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{q_2}+\cdots$$

时，它的所有的项有同样的次数n，即

$$k_1+l_1+\cdots+q_1=k_2+l_2+\cdots+q_2=\cdots=n,$$

那么，这样的多项式就称为齐次多项式，或叫做n次型。单项式也被认为是齐次多项式，非零的数可视为零次多项式。

代数对称 是指在一个表达式中将某些字母任意交换后原式不变的这种性质。

对称多项式 如果n元多项式$P(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ \cdots x_n)$在将任意两个变元交换位置后，所得结果仍与原式相同（即所得多项式与原式恒等），就说$P(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$是关于变元$x_1,x_2,\ \cdots,x_n$的对称多项式，简称为对称式。

基本对称多项式 下述n个自变数x_1，x_2，…，x_n的多项式叫做基本对称多项式，或叫做基本对称函数。

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n;$$

$$\sigma_2=\sum_{1<i_1<j_2<n}x_{i_1}x_{i_2}=x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots x_2x_n+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n$$

……

$$\sigma_k=\sum_{1<i_1<\cdots<i_k<n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=x_1x_2\cdots x_k+x_1x_2\cdots x_{k-1}x_{k+1}+\cdots+x_{n-k+1}x_{n-k+2}\cdots x_n;$$

……

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.$$

其中 $\sum\limits_{1<i_1<i_2<\cdots<i_k<n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ 是从 x_1, x_2, …, x_n中任取k个组成的一切可能乘积 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ 的和。

多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 所以叫做基本的,其原因是:任意一个对称多项式都可以表成 σ_1, σ_2, …, σ_n 的多项式，这就是关于对称多项式的基本定理。

轮换对称多项式 对于一个多元多项式$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,把它的n个变元顺次进行调换，即把x_1换成x_2，把x_2换成x_3，…，把x_n换成x_1。如所得的结果与原式相同，则此多项式叫做关于这些变元的轮换对称多项式。简称轮换对称式、轮换多项式或轮换式。

显然，对称多项式必为轮换对称多项式；反之不然。

轮换对称多项式的和、差、积仍是轮换对称多项式。

二次三项式 一般把 ax^2+bx+c 叫做关于变数x的二次三项式，其中a、b、c都不为0。有时也把$ax^2+bxy+cy^2$（其中a、b、c都不为0）叫作二次三项式。

一元n次多项式 只含一个变量且次数为n的多项式叫作关于这个变量的一元n次多项式。它的一般形式为

$$P_n(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

其中a_i是常数（$i=0,1,\cdots,n$），且$a_0\neq0$。

因式 域P上的一个多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$，如果可以被P上另一个多项式$g(x_1,\cdots,x_n)$整除，即

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)\cdot q(x_1,\cdots,x_n)\ .$$

其中$q(x_1,\cdots,x_n)$也是P上的一个多项式。就称$g(x_1,\cdots,x_n)$为多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$在P上的一个因式。

因子 一个整数的因数，或一个多项式的因式，统称因子。

公因式 如果一个多项式同时是几个多项式的因式，则这个多项式叫做这几个多项式的一个公因式。

最高公因式 几个多项式的公因式中次数最高的多项式，就叫做这几个多项式的最高公因式。

等式 把两个代数式用等号连接起来，所得的式子叫做等式。如果对于式中字母的一切容许值，等号两边的代数式的值都相等，就把这样的等式叫做恒等式。如果等号两边的代数式的值只是在某些特定条件下才相等，这样的等式就叫做条件等式。

恒等变形 一个解析式用另一个与它恒等的表达式去代换，叫做恒等变形。

移项 在一个等式中，把组成代数和的某些项移到等号的另一边，同时改变这些项的符号，这种变形叫做移项。

对于不等式，也同样可以移项。

因式分解 把一个多项式表示成几个不可约多项式的连乘积的过程，叫做因式分解。

互质多项式 设$f(x)$和$g(x)$是域F上一元多项式，如果域P上一元多项式$h(x)$同时整除$f(x)$和$g(x)$，则$h(x)$叫做$f(x)$和$g(x)$的一个公因子。如果除了数值公因子外，$f(x)$和$g(x)$在域P上没有其它公因子，则$f(x)$和$g(x)$叫做域P上的互质多项式。

既约多项式 设F是数域，x是未定元。所有系数属于F的多项式的集合记为$F[x]$。设n次多项式$f(x)\in F[x]$。如果存在次数小于n的非常数多项式$g(x)$、$h(x)\in F[x]$，使$f(x)=g(x)h(x)$，则$f(x)$叫做F上可约多项式，简称在F中可约；如果$f(x)$在F中不是可约的，则$f(x)$叫做F上既约多项式，或叫做F上不可约多项式，简称在F中不可约。

二阶行列式 对于四个数a、b、c、d，记

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

上式左边的记号叫做二阶行列式。

三阶行列式 把九个数a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{21}、a_{22}、a_{23}、a_{31}、a_{32}、a_{33}排成三行、三列（横的叫做行，竖的叫做列），两边各加一条竖直线，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

用以表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

这一记号就叫做三阶行列式。

n阶行列式 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由排成n行、n列形式的n^2个数$a_{ij}(i、j=1, 2, \cdots, n)$确定的一个数，上式右边的记号称为$n$阶行列式，简记为$D$，其值为$n!$项之和

$$D=\sum(-1)^k a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

式中$k_1, k_2, \cdots, k_n$是将序列1，2，…，n的元素次序交换k次所得到的一个序列，Σ号表示对$k_1, k_2, \cdots k_n$取遍1，2，…，n的一切排列求和，例如四阶行列式中$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$一项，$k_1k_2k_3k_4$为3142，是将序列1 2 3 4交换三次所得，故$k=3$，此项的符号为$(-1)^3$。

余子式 在n阶行列式中，划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列的元素后，所成的$n-1$阶行列式，叫做a_{ij}的余子式。

代数余子式 n阶行列式D中，若第i行第j列的元素为a_{ij}，a_{ij}的余子式为M_{ij}，则a_{ij}的代数余子式为$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

系数行列式 n个未知数n个方程的线性方程组的系数作成的行列式称为系数行列式。

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

式中$\prod$是对一切数对$(i, j)(1\leqslant j<i\leqslant n)$求积。

分式 除式里含未知元的有理代数式称为分式。

有理分式 两个多项式的比

$$\frac{P(x, y, \cdots, z)}{Q(x, y, \cdots, z)}$$

叫做有理分式。任一多项式可以看作分母为1的有理分式。

真分式 有理分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$中，如果分子上的多项式$P(x)$的次数小于分母上多项式$Q(x)$的次数，就称为真分式。

假分式 设$P(x)$、$Q(x)$是域F上一元多项式，它们的次数都大于零，且$P(x)$的次数不小于$Q(x)$的次数，则有理分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$叫做假分式。由欧几里得带余除法，此时必有F上多项式$q(x)$与$r(x)$，使$P(x)=q(x)Q(x)+r(x)$，其中$r(x)$的次数小于$Q(x)$的次数，或$r(x)$是零多项式，因此

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)},$$

或

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x),$$

所以，假分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$可以化为一个整式，或者一个整式与一真分式的和。

约分 根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分。约分时，通常要把分子和分母所有的公因式都约去，这时所得的分式是最简分式。

通分 按分式基本性质，把几个异分母的分式化成和原来的分式分别相等的同分母的分式，叫做分式的通分。通分的关键是确定几个分式的公分母。为了简便，通常都取各分母中系数的最小公倍数与各字母因式最高次幂的乘积作公分母，这样的公分母，叫做最简公分母。

分母有理化 对于一个分式，如果分母含有根号，可以通过分子与分母同乘以分母的有理化因子，使分母所含根号化去，这种变形过程叫作分母有理化或有理化分母。

有理化因子 在根式的乘法运算里，两个含有根式的代数式P和Q相乘，如果它们的积R不含有根式，那么这两个代数式P、Q叫做互为有理化因子。

根式 式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，这里在n是奇数的时候，a可以是任何实数；在n是偶数的时候，a可以是任何非负实数。

无理式 如果代数式中含有表达式的开方运算，而表达式中又含有变数，那么这种代数式就叫做这些变数的无理代数式，简称无理式。

二次根式 根指数等于2的根式。

同次根式 凡根指数相同的根式叫做同次根式。

同类根式 化成最简根式后的若干个根式，如果它们的根指数和被开方数彼此相同，那么这些根式就叫做同类根式。

最简根式 适合于下列条件的根式，叫做最简根式。

(1) 被开方数的指数和根指数是互质数。

(2) 被开方数的每一个因式的指数小于根指数。

(3) 被开方数不含分母。