高等学校試用教科书

高等数学

GAODENG SHUXUE

上 册

重庆大学数学教研組編

人民教育出版社

高等学校試用教科书

高　等　数　学

GAODENG SHUXUE

上　册

重庆大学数学教研組編

人民教育出版社

上册目录

緒　論

在开始学习高等数学的时候，就应当对它的发展过程、研究的对象及其各方面的应用等問題有个概括的正确的了解，这对今后明确学习的目的和方法是有好处的，緒論也就是要帮助讀者了解它。

§0.1. 数学研究的对象及其特点

中学的一些数学課程如代数、几何、三角等所研究的对象不外是空間形状和数量关系，代数是专門研究数量关系，几何是研究空間形状，三角則两者兼有。整个数学，包括即将学习的高等数学也仍然以这两者作为研究对象，因此，恩格斯曾經給数学下过一个簡单明了的定义：“純数学是以现实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的。”①

过去所学的一些数学課程（如三角、代数、几何）——所謂初等数学——是以研究常量为主（除极限外）的，如研究图形的面积、长度或方程的解等，即研究靜止状态。而高等数学（包括解析几何、微分、积分、微分方程等部分）則可用来研究物体运动的方位与軌迹，变速运动的瞬时速度，变力所作的功等包含变化过程的实际問題，这里我們遇到的量是可以变化其数値的，于是就不能簡单地沿用过去的知識。例如在研究不变的力 f（大小、方向均不变）作用于一物体經过位移 s，所作的功 W 为 $W=f\cdot s$，但如果力 f 的大小在改变（为簡单起見，假設方向不变），則功 W 就不能用 $f\cdot s$ 得到，而

① 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社 1957 年版，37 頁。

必須另行設法。高等数学就是这样发生和发展的，它研究的是这类問題，即变量(可变的量)以及变量之間的关系。因此，在研究方法上和初等数学有所不同。初等数学还可以勉强用静止的观点去研究；而高等数学則必須有运动的观点，整个微分学和积分学就是建立在包含着运动观念的极限的基础上的。

事实上，現实世界的事物都是在运动着，彼此之間又有着各种各样的內在联系，所以高等数学，能帮助人們較深刻地全面地研究現实世界的規律。因此，由初等数学发展到高等数学是数学发展的一个飞跃。所以，恩格斯說："变数是数学的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学。"① "只有微分学才使自然科学上不仅能用数学来表明状态，并也表明过程，即运动。"② "变数数学对常数数学的关系，一般說来是和辯証思維对形而上学思維的关系一样的。"③

当然，研究变量过程中也往往固定在某一时刻把它看成常量，利用常量的一些知識来研究它，因此不能把初等数学和高等数学截然分开。

数学与物理学、化学、生物学等都是研究現实世界中客观規律的科学，但毕竟有着不同之处，数学着重在量的方面研究客观事物的規律，而其他科学却是着重在质的方面(例如物质的某一特定状态或某一特定运动形式)。但客观事物的质和量是有其內在联系的，无法彼此孤立来研究。例如，最初研究气体状态时，只是从质的方面发現气体受热会"产生力量"，但是，当要利用这种性质来制造蒸汽机乃至进一步作精确設計时，就需要从量的方面弄清气体的"溫度"、"压强"与"体积"之間的关系；又如液体加热到一定程度

① 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1959 年版，217 頁。

② 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1959 年版，229 頁。

③ 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1957 年版，125 頁。

将沸騰而汽化，引起了质的变化，因此研究事物的数量关系是了解事物本质所不可缺少的，但是从量的方面研究現实世界，只能帮助而不能代替从质的方面对現实世界进行研究。过去有些資产阶級唯心主义学者，散布过一种說法，說“数学是科学之母”，“有了数学可以推出物理学等其他自然科学”，这种說法完全是荒謬的。

数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用广泛性。数学的抽象性表現在它暫时撇开事物的具体內容而从抽象的量的方面去研究它，它不是以某种自然現象或社会現象作为直接研究对象。譬如两棵树加三棵树，两只羊加三只羊，我們是撇开树、羊去研究 $2+3$ 的数量运算。当然在現实世界中更复杂的数量关系还多得很，表現更高度的抽象。但这种抽象形式只是表面上掩盖了它的实际来源，其內容却是非常現实的。列宁曾經說过：“一切科学的(正确的、郑重的、非瞎說的)抽象，都更深刻、更正确、更完全反映着現实。”① 数学的抽象和它的另一特点——应用广泛性是紧密相連的，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际問題。例如一个力学系統的振动和一个电路的振蕩常用同一微分方程来描述。撇开具体的物理現象中的意义来研究方程，所得的結果又可用于类似的物理現象中，这样，我們掌握了一种方法就能解决許多类似的問題。对于不同性质的現象具有相同的数学形式——即相同的数量关系，是反映了物质世界的統一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物质形态和各种运动形式中，所以，数学的应用是很广泛的。

正因为数学是来自現实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实踐，才表現出数学的

① 引自列宁“黑格尔‘邏輯学’一书摘要”。

預見性。在火箭、导弹发射之前，可通过精密的計算，預測它的飞行軌道及着陆地点，在海王星直接被观察到以前，就从天文計算上預測它的存在，由于同样的理由才使得数学成为工程技术中的重要工具。

§0.2. 数学发展的簡單历史

初等数学发展比較早，在紀元前，由于农业(如土地丈量)和建筑等的需要，积累了相当丰富的关于图形的知識，后来发展成为几何学。三角学也由于当时測量、天文历算等需要得到相当的发展。代数则是由于商业交易的发展，逐漸有了負数、分数的概念，以至有了对簡单代数方程的研究，到八——十三世紀才逐漸形成代数学的系統。总的說来，在紀元前，初等数学的发展比較迅速是因为当时正处于奴隶社会初期，生产和文化都有很大的发展，但此后长时期内社会生产力比較低，直到十六世紀，它的发展都比較緩慢。

十六世紀末叶到十七世紀是資本主义誕生时期，此时，由于生产和技术上需要的刺激，数学又重新有了蓬勃的发展。同时也因机械工业的誕生和成长，航海、造船、采矿等事业的迅速发展，引起了对几何学和力学方面的大量新問題(如运动的速度、曲綫的切綫、图形的面积等等)。在大量地逐个解决这些具体問題过程中，人們慢慢注意到这些問題的解决方法的共同点，因而形成了微分学和积分学。微积分的創造开辟了数学史的新紀元，从此二百年中数学上大量的重要部門如微分方程、变分法、积分方程、复变函数都相继由于运动学、水力学等的需要在微积分等的基础上建立和发展起来。这些发展也使数学的另一些部門(如算术、几何等)，由于新方法的引用得到新的进步。在这以前的全部数学史中，还沒有过另一个时代能在这样短的时期里获得这样多的决定性的成就，这些成就当时从根本上改变了数学的面貌，并且无限地丰富了

它的内容。

这个阶段数学的大发展也曾遭到了一些阻力，当时，微积分的概念是模糊不清的，这些弱点被一些人，特别是当时英国的宗教势力利用来攻击微积分的理論基础。但当时微积分的蓬勃发展及其广泛有效的应用，鼓舞了大批数学家不顾这些攻击，热情于大胆的創造，而不去注意于理論基础的严密性。直到十八世紀，一方面在数学广泛发展与应用中更多地暴露出由于理論基础不稳固而产生的問題（如某些无穷級数的运算上产生了錯誤），而且这时数学的各分支已变得内容丰富，头緒众多，也需要加以整理和系統化。另一方面，在这些数学分支上积累了相当多的具体知識和經驗，也为巩固理論基础創設了客观条件，因此，十九世紀在数学分析的理論基础方面就展开了較多的研究工作，在这些成果的基础上进行了正确的但是更抽象的概括，隐藏在各种現象背后的更根本的量的关系被揭示出来了。到十九世紀末，严格的邏輯論証与公理化趋势也盛行起来了，十九世紀末与二十世紀初这种趋势更丰富了数学的各分支，也发現了許多数学分支之間的内在联系（如代数与几何的联系等），但因当时处在資本主义衰退时期，在哲学思想上是唯心主义的上升时期，直到十九世紀末叶，唯心主义已在資本主义世界占統治地位，因此，数学家的唯心主义世界观在数学严謹化的过程中滲透进来。他們企图“用公式和符号代替一切”，过分夸大形式邏輯的作用，并把数学歪曲为純粹形式主义的自由思想的产物，单純追求抽象化和邏輯“完美”，把数学当作統治阶級的裝飾品和脱离实际的“学者”欣賞的东西，从而造成数学发展的某些畸形，并在一定程度上束縛了从生产实践中提出的一些新的数学方法的发展。例如 1 92 年一位电机工程师赫維賽德在研究电路問題中創立了“运算微积分”方法，但由于缺乏严格的邏輯論証（尽管在实

踐中行之有效)，当时数学杂志不肯发表，直到1916年以后，經一些数学家的严格証明，才得到承认和广泛的应用，这样的例子不胜枚举。

近二、三十年中，特别是近十多年来，由于原子能，高速飞行，无綫电技术，自动控制，大型的水利工程和土建工程都需要較高深的数学工具。因此，对数学的发展提供了新的物质基础，許多新的分支迅速地建立起来，如計算数学，信息論，排队論，規划論等等。同时，也使原有的一些理論系統得到新的发展，如微分方程中非綫性方程的求解，稳定性問題，偏微分方程中的混合型方程的研究。在近代数学的发展中，苏联有着巨大的成就，如数論，函数論，微分方程定性論，数理方程，計算数学，概率論，数理邏輯等都跃居世界的前列，許多重要的数学分支居世界的領导地位。人造卫星，火箭，导彈，宇宙飞船上了天，都是和苏联先进的数学水平分不开的。

这里，我們要单独讲一下我国的情况，我国人民是勤劳智慧的，有着悠久的文化，被称为文明古国，在古代生产較为发达，数学方面也有极为丰富的知識。几何学方面，早在公元前一千年就知道勾股弦关系。公元前三至二世紀已出現数学研究的总結性著作“九章算术”，上面載有不少有关直角三角形边长关系及代数問題，公元初到四世紀期間，我国对圓周率的研究已达到相当精确的程度（当时祖冲之已获得 $\pi\approx3.1415926$ 或 $355/113$）。三——五世紀出現“孙子算經”，上面已有代数中同余式問題。直到十三世紀，我国在代数方面一直有很杰出的成就。如二項式$(a+b)^n$的展开式系数，代数方程的近似解法(現在外国书上所謂“合奈法”)等的发現时代都在欧洲数学家以前。并且早自六世紀以来，我国数学就在很大程度上影响着日本和朝鮮的数学的发展，后来，由于长期停留在封建社会，生产力发展迟緩，因而数学发展也和其他科学

一样受了限制，到了欧洲资本主义兴起以后，我国数学在相形之下就日益落后了。

近百年間，我国淪为半封建、半殖民地，生产力受到严重的束縛，数学失去了迅速发展的物質基础，并且造成依賴性的畸形发展。解放前夕，我国数学队伍非常单薄，而且大部分人不願意去研究应用較多和生产实踐較为密切的数学分支，理論脱离实际的思想非常严重，輕視实踐成了風气，从而更加影响我国数学的发展。

但解放后，在党的领导下，我国的生产面貌起了根本的变化，数学也跟其他科学一样，有了蓬勃的发展，許多重要的，但是基础薄弱的甚至是空白的部門已經开始塡补起来，例如：微分方程，概率論，数理統計，計算数学等。特别是党公布了社会主义建設总路綫以来，全国各地各部門都掀起了大跃进的高潮，大規模的建設工程和尖端科学，以史无前例的速度在发展。这些都为数学的发展开辟了广闊的园地和提供最好的物質基础。我国数学界开始冲破資产阶級的思想束縛，投身到生产实踐中去解决了和正在解决許多生产上的問題。优越的社会主义制度为我国数学的发展开辟了无限美好的远景。目前，我国正在热火朝天地进行着一个群众性的技术革新和技术革命运动，我們应該踴跃投身到这个偉大的运动中去，不断深入学习和总結广大人民的創造。只要我們沿着党指出的方向——教育为无产阶級政治服务，教育与生产劳动相結合，那么，数学将在解决生产实踐問題过程中不断提高理論水平，使得我国数学水平在最短的时間內赶上先进科学水平。

§0.3. 数学的发展和生产实踐的关系

恩格斯讲过"科学的发生与发展从开始起，便是由生产所决定

的。”[①] 毛主席在实踐論一开始就提到“首先，馬克思主义者认为人类的生产活动是最基本的实踐活动，是决定其他一切活动的东西。人的认識，主要地依賴于物質的生产活动，逐渐地了解自然的現象、自然的性质、自然的規律性、人和自然的关系；而且經过生产活动，也在各种不同程度上逐渐地认識了人和人的一定的相互关系。一切这些知識，离开生产活动是不能得到的。”[②] 作为科学之一，作为人类知識之一的数学，当然也不例外，也是离不开人类生产实踐的。但是資产阶級学者却不承认这一点，說什么数学是从实际抽象出来的，已沒有什么实际的意义，因此，它的发展可以和生产实踐沒有什么关联，特别是近代数学尤其可以脫离生产实踐而独自发展起来的。这些說法是极端錯誤的，为了反駁这些錯誤的看法，我們还是拿数学发展的一些例子来看。

在历史上每个时期的数学水平基本上是和当时的生产水平相适应的，公元前平面几何在希腊达到相当完美的地步(当时形成的欧氏几何一直到現在并沒有什么本质的改变)，而极限方法虽已为阿基米德使用过，但由于当时社会生产力还不需要数学来研究变量关系，因而沒有发展的基础。到了欧洲資本主义兴起，由于航海、建筑等的需要，各种力学得到发展，于是极限方法就很快被系統地运用而产生了微积分学。从十七世紀微积分发展以后的二百年中，不少数学家同时还研究了力学、电学等其他自然科学和技术問題。他們运用数学工具去解决所碰到的实际問題，而这些实际問題也成了他們在数学上获得成就和創造的巨大源泉。这两百年在数学发展史上留下了光輝的成就。这时古代数学曾經很发达的我国，却由于生产落后长期停留在封建社会，数学的发展却停滞不

① 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，149 頁。

② 毛澤东選集：第一卷，人民出版社 1951 年版，281 頁。

前，逐渐落后。

这些历史現象以及前面所讲苏联数学的发展，充分說明了数学的产生与发展是被生产实踐提供的問題所推动，生产水平和其他科学技术的发展水平为数学发展創設了客观条件，十九世紀的俄国数学家契比雪夫有这样的見解“理論与实踐的联系会得出最好的結果，受惠的将不仅是实踐，而且科学本身在实踐的影响下也向前发展了。实踐为科学开辟了新的科目，給科学提出完全新的問題，因而也引起了要探求全新方法的努力”。这样的看法并不是說数学就是生产的“直接訂貨”，每一个数学分支甚至每一个数学定理都来自生产中提出的問題。有些数学理論可能来自另一些数学理論的邏輯推理，但作为推理的出发点的現有理論与概念是从实踐中概括出来的，而且推理所得到的結果是否能得到发展，仍須拿到实踐中去考驗。总的說来，任何数学理論能否得到发展还是要取决于生产实踐的需要。

当然，在数学的发展中，数学家的努力与才能也起了一定的作用，但是資产阶級唯心主义者故意夸大了科学家的个人作用而抹杀了生产实踐的推动力量和群众的作用，把問題說成是一些天才数学家个人創造了数学的某些分支，好象沒有他們就不会有今天的数学似的，这种說法是錯誤的。例如牛頓和来布尼茲在微积分方面完成了創建的初步阶段，有着較大的貢献，但是，应該看到，还有許多科学家参加了微积分的創造工作，当时生产实际的要求，迫使微积分方法的发展，而当时的生产水平与科学水平也提供了发展的客观可能性，因此，在那时微积分的建立就是客观形势的必然产物。

§0.4. 結束語

从以上这些問題，我們会理解到数学对工程技术工作者是极为重要的理論工具，离开了它，在現代的技术条件下，就难以进行精确的工作，就象鉗工离不开鏈刀，木工离不开鋸子一样。同时，我們也了解了数学这門科学的基本特点，在学习时应密切联系实际应用，重視熟练計算，并注意数学方法論上某些特有的技巧，克服在理解数学的抽象概念及运用数学理論的困难。

（漏排頁碼 11，12 两面，10 面紧接 13 面）

原书缺页

原
书
缺
页

第一章　平面解析几何

§1-1 解析几何的第一个基本思想——用数量标志点的位置

几何学所研究的問題是物体的形状大小和物体之間的相对位置。如果我們只注意物体的形状大小和相对位置而不管物体的其他方面的性质，那末我們看到的就不是原来的物体，而是从它抽象出来的几何图形。几何学研究的对象正是这种几何图形。

讀者在中学学过的几何学叫做綜合几何学，这里要讲的几何学叫做解析几何学。两种几何学的差别在于它們所用的方法不同。解析几何应用代数的方法研究几何图形，这是它的特点。代数方法怎样能用来研究几何問題呢？为了回答这个問題，我們要介紹解析几何的两个基本思想。解析几何的第一个基本思想就是：

用数量标志点的位置。

大家知道，点是构成一切几何图形的基础，一切几何图形都可以看做是由点組合而成的。所以，如果能够用数量标志点的位置，那就有办法用数量把几何图形的位置、形状、大小表現出来。这里涉及了解析几何的第二个基本思想，到后面我們再来談它。但是問題現在已經清楚了，旣然能够用数量表現几何图形的位置、形状、大小，那就当然能够用代数方法研究几何图形。現在我們先看，解析几何怎样用数量标志点的位置。解析几何的办法对讀者并不陌生，那就是坐标系的方法。

如图 1.1，在直綫上任取一点 O，称为原点，任取一方向，如向右，称为正方向，再任取一个綫段作为量距离的单位。象这样安排