

9
高等学校試用教科書



高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

重庆大学数学教研组編

人民教育出版社

高等学校試用教科書



高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

重庆大学数学教研组編

人民教育出版社

上册目录

緒 論	1
第一章 平面解析几何	13
§ 1-1 解析几何的第一个基本思想——用数量标志点的位置(13)	
§ 1-2 基本公式(16)	
§ 1-3 解析几何的第二个基本思想——用方程刻画曲线(20)	
§ 1-4 直线的斜截式方程 直线和一次方程的关系(26)	
§ 1-5 两直线的夹角公式 两直线平行与垂直的判别法(29)	
§ 1-6 直线的法线式方程 点和直线的距离(31)	
§ 1-7 圆锥曲线(35)	
§ 1-8 平移和旋转(47)	
§ 1-9 圆锥曲线和二次方程的关系(52)	
§ 1-10 参量方程(54)	
§ 1-11 极坐标(58)	
第二章 函数——数学分析研究的主要对象	66
§ 2-1 引言(66)	
§ 2-2 从实际问题中抽出函数和利用函数进行计算解决实际问题的例子(67)	
§ 2-3 在科学技术中应用最多的一类函数——初等函数 基本初等函数的图形和主要性质(70)	
§ 2-4 初等函数(续)——一般初等函数的结构(78)	
§ 2-5 科学技术常用的三种函数表示法(81)	
§ 2-6 函数的定义 单值和多值函数 函数的定义域(84)	
§ 2-7 函数的符号 使用函数符号的好处 复合函数(88)	
第三章 极限——数学分析的基本方法	94
§ 3-1 极限概念是怎样从实际问题中产生的(94)	
§ 3-2 数列极限的定义(100)	
§ 3-3 函数极限——问题的提出(106)	
§ 3-4 函数极限的定义(103)	
§ 3-5 根据函数极限的定义计算极限的例题(111)	
§ 3-6 函数和无穷小的极限公式 复合函数的极限公式(112)	
§ 3-7 利用极限的四则公式与复合公式计算极限的例题(116)	
§ 3-8 微分学的两个基本极限(117)	
第四章 导数——微分学的基本概念	121
§ 4-1 速度(121)	
§ 4-2 加速度(125)	
§ 4-3 怎样在图上表现物体运动的实现(128)	
§ 4-4 电流强度 热容量(120)	
§ 4-5 导数 变化率(134)	
§ 4-6 函数的连续性(138)	
§ 4-7 函数连续为函数可求导的必要条件(141)	
第五章 导数的算法	143
§ 5-1 问题的提出(143)	
§ 5-2 幂函数的导数公式(143)	
§ 5-3 函数和无穷小的导数公式(145)	
§ 5-4 复合函数的导数公式(151)	
§ 5-5 对数函数的导数公式(156)	
§ 5-6 指数函数的导数公式 反函数的导数公式(160)	
§ 5-7 三角函数的导数公式(163)	
§ 5-8 反三角函数的导数公式(167)	
§ 5-9 导数公式表 初等函数求导法总结(169)	
§ 5-10 取对数求导法(176)	

§5-11 高阶导数(178)	
第六章 导数的应用	182
§6-1 平面上曲线运动的速度问题(185)	
§6-2 平面上曲线运动的加速度问题(185)	
§6-3 曲率的概念(188)	
§6-4 弧长对坐标的导数(191)	
§6-5 曲率 曲率半径和曲率圆心的公式(193)	
§6-6 渐屈线和渐开线(195)	
§6-7 隐函数及其求导法(197)	
§6-8 参量式函数及其求导法(203)	
第七章 函数作图及其若干应用	207
§7-1 函数作图问题的提出 曲线的升降 极值与极值点(207)	
§7-2 曲线的凸凹 拐点(212)	
§7-3 函数作图的基本步骤(215)	
§7-4 渐近线 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (219)	
§7-5 应用之例(一) 函数在区间上的最大值和最小值的求法(225)	
§7-6 应用之例(二) 方程的近似解法(230)	
第八章 微分 它和导数的关系	236
§8-1 微分概念的产生 无穷小及其比较(236)	
§8-2 微分的定义(239)	
§8-3 微分和导数的关系(242)	
§8-4 微分在近似计算方面的应用(244)	
§8-5 微分的公式和微分的算法(248)	
§8-6 高阶微分(253)	
第九章 中值定理及其若干应用	256
§9-1 拉格朗日中值定理(256)	
§9-2 柯西中值定理(260)	
§9-3 洛比达法则 极限未定式(261)	
§9-4 极限未定式(续)(266)	
§9-5 台劳中值定理(271)	
§9-6 台劳中值定理的一个应用——函数值的近似计算(276)	
第十章 积分学的基本概念——定积分	282
§10-1 定积分概念的来由(282)	
§10-2 定积分的定义 符号 几何意义(286)	
§10-3 定积分概念是否符合实际的初步考查(290)	
§10-4 定积分的基本性质(294)	
§10-5 原函数(303)	
§10-6 牛顿-莱布尼兹公式 实际计算定积分的方法(305)	
§10-7 近似积分法(308)	
第十一章 不定积分——微分运算的反运算	311
§11-1 不定积分的概念(311)	
§11-2 积分公式(314)	
§11-3 处理函数和差的方法 处理常因子的方法(316)	
§11-4 第一种换元法(319)	
§11-5 第二种换元法(324)	
§11-6 分部积分法(327)	
§11-7 积分方法总结(331)	
§11-8 有理函数的积分问题(335)	
§11-9 应用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分的注意事项(342)	
第十二章 定积分的应用	347
§12-1 面积(直角坐标 参量方程)(347)	
§12-2 面积(极坐标)(353)	
§12-3 体积(356)	
§12-4 弧长(358)	
§12-5 解应用问题时建立定积分式的速算法(363)	
§12-6 功(365)	
§12-7 引力(365)	
§12-8 流体压力(367)	
§12-9 劳义积分(368)	
上册习题集	374

緒 論

在开始学习高等数学的时候,就应当对它的发展过程、研究的对象及其各方面的应用等問題有个概括的正确的了解,这对今后明确学习的目的和方法是有好处的,緒論也就是要帮助讀者了解它。

§ 0.1. 数学研究的对象及其特点

中学的一些数学課程如代数、几何、三角等所研究的对象不外是空間形状和数量关系,代数是专门研究数量关系,几何是研究空間形状,三角則两者兼有。整个数学,包括即将学习的高等数学也仍然以这两者作为研究对象,因此,恩格斯曾經給数学下过一个简单明了的定义:“純数学是以现实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常现实的資料——为对象的。”^①

过去所学的一些数学課程(如三角、代数、几何)——所謂初等数学——是以研究常量为主(除极限外)的,如研究图形的面积、长度或方程的解等,即研究靜止状态。而高等数学(包括解析几何、微分、积分、微分方程等部分)則可用来研究物体运动的方位与軌迹,变速运动的瞬时速度,变力所作的功等包含变化过程的实际問題,这里我們遇到的量是可以变化其数值的,于是就on简单地沿用过去的知識。例如在研究不变的力 f (大小、方向均不变) 作用于一物体經過位移 s , 所作的功 W 为 $W = f \cdot s$, 但如果力 f 的大小在改变(为简单起見,假設方向不变), 則功 W 就不能用 $f \cdot s$ 得到, 而

① 恩格斯:“反杜林論”,人民出版社 1957 年版, 37 頁。

必須另行設法。高等数学就是这样发生和发展的，它研究的是这类問題，即变量(可变的量)以及变量之間的关系。因此，在研究方法上和初等数学有所不同。初等数学还可以勉强用靜止的观点去研究；而高等数学則必須有运动的观点，整个微分学和积分学就是建立在包含着运动观念的极限的基础上的。

事实上，现实世界的事物都是在运动着，彼此之間又有着各种各样的內在联系，所以高等数学，能帮助人們較深刻地全面地研究现实世界的規律。因此，由初等数学发展到高等数学是数学发展的一个飞跃。所以，恩格斯說：“变数是数学的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学。”^①“只有微分学才使自然科学上不仅能用数学来表明状态，并也表明过程，即运动。”^②“变数数学对常数数学的关系，一般說来是和辯証思維对形而上学思維的关系一样的。”^③

当然，研究变量过程中也往往固定在某一时刻把它看成常量，利用常量的一些知識来研究它，因此不能把初等数学和高等数学截然分开。

数学与物理学、化学、生物学等都是研究现实世界中客观規律的科学，但毕竟有着不同之处，数学着重在量的方面研究客观事物的規律，而其他科学却是着重在质的方面(例如物质的某一特定状态或某一特定运动形式)。但客观事物的质和量是有其內在联系的，无法彼此孤立来研究。例如，最初研究气体状态时，只是从质的方面发现气体受热会“产生力量”，但是，当要利用这种性质来制造蒸汽机乃至进一步作精确設計时，就需要从量的方面弄清气体的“溫度”、“压强”与“体积”之間的关系；又如液体加热到一定程度

① 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，217 頁。

② 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，229 頁。

③ 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社 1957 年版，123 頁。

将沸騰而汽化，引起了质的变化，因此研究事物的数量关系是了解事物本质所不可缺少的，但是从量的方面研究现实世界，只能帮助而不能代替从质的方面对现实世界进行研究。过去有些资产阶级唯心主义学者，散布过一种说法，說“数学是科学之母”，“有了数学可以推出物理学等其他自然科学”，这种说法完全是荒謬的。

数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用广泛性。数学的抽象性表现在它暂时撇开事物的具体内容而从抽象的量的方面去研究它，它不是以某种自然现象或社会现象作为直接研究对象。譬如两棵树加三棵树，两只羊加三只羊，我們是撇开树、羊去研究 $2+3$ 的数量运算。当然在现实世界中更复杂的数量关系还多得很，表现更高度的抽象。但这种抽象形式只是表面上掩盖了它的实际来源，其内容却是非常现实的。列宁曾經说过：“一切科学的（正确的、郑重的、非瞎說的）抽象，都更深刻、更正确、更完全反映着现实。”^① 数学的抽象和它的另一特点——应用广泛性是紧密相連的，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际问题。例如一个力学系統的振动和一个电路的振蕩常用同一微分方程来描述。撇开具体的物理现象中的意义来研究方程，所得的结果又可用于类似的物理现象中，这样，我們掌握了一种方法就能解决許多类似的問題。对于不同性质的现象具有相同的数学形式——即相同的数量关系，是反映了物质世界的統一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物质形态和各种运动形式中，所以，数学的应用是很广泛的。

正因为数学是来自现实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实践，才表现出数学的

^① 引自列宁“黑格尔‘逻辑学’一书摘要”。

預見性。在火箭、導彈發射之前，可通過精密的計算，預測它的飛行軌道及著陸地點，在海王星直接被觀察到以前，就從天文計算上預測它的存在，由於同樣的理由才使得數學成為工程技術中的重要工具。

§0.2. 數學發展的簡單歷史

初等數學發展比較早，在紀元前，由於農業（如土地丈量）和建築等的需要，積累了相當豐富的關於圖形的知識，後來發展成為幾何學。三角學也由於當時測量、天文歷算等需要得到相當的發展。代數則是由於商業交易的發展，逐漸有了負數、分數的概念，以至有了對簡單代數方程的研究，到八——十三世紀才逐漸形成代數學的系統。總的說來，在紀元前，初等數學的發展比較迅速是因為當時正處於奴隸社會初期，生產和文化都有很大的發展，但此後長時期內社會生產力比較低，直到十六世紀，它的發展都比較緩慢。

十六世紀末葉到十七世紀是資本主義誕生時期，此時，由於生產和技術上需要的刺激，數學又重新有了蓬勃的發展。同時也因機械工業的誕生和成長，航海、造船、採礦等事業的迅速發展，引起了對幾何學和力學方面的大量新問題（如運動的速度、曲線的切綫、圖形的面積等等）。在大量地逐個解決這些具體問題過程中，人們慢慢注意到這些問題的解決方法的共同點，因而形成了微分學和積分學。微積分的創造开辟了數學史的新紀元，從此二百年中數學上大量的重要部門如微分方程、變分法、積分方程、復變函數都相繼由於運動學、水力學等的需要在微積分等的基礎上建立和發展起來。這些發展也使數學的另一些部門（如算術、幾何等），由於新方法的引用得到新的進步。在這以前的全部數學史中，還沒有過另一個時代能在這樣短的時期里獲得這樣多的決定性的成就，這些成就當時從根本上改變了數學的面貌，並且無限地豐富了

它的内容。

这个阶段数学的大发展也曾遭到了一些阻力,当时,微积分的概念是模糊不清的,这些弱点被一些人,特别是当时英国的宗教势力利用来攻击微积分的理论基础。但当时微积分的蓬勃发展及其广泛有效的应用,鼓舞了大批数学家不顾这些攻击,热情于大胆的创造,而不去注意于理论基础的严密性。直到十八世纪,一方面在数学广泛发展与应用中更多地暴露出由于理论基础不稳固而产生的问题(如某些无穷级数的运算上产生了错误),而且这时数学的各分支已变得内容丰富,头绪众多,也需要加以整理和系统化。另一方面,在这些数学分支上积累了相当多的具体知识和经验,也为巩固理论基础创设了客观条件,因此,十九世纪在数学分析的理论基础方面就展开了较多的研究工作,在这些成果的基础上进行了正确的但是更抽象的概括,隐藏在各种现象背后的更根本的量的关系被揭示出来了。到十九世纪末,严格的逻辑论证与公理化趋势也盛行起来了,十九世纪末与二十世纪初这种趋势更丰富了数学的各分支,也发现了许多数学分支之间的内在联系(如代数与几何的联系等),但因当时处在资本主义衰退时期,在哲学思想上是唯心主义的上升时期,直到十九世纪末叶,唯心主义已在资本主义世界占统治地位,因此,数学家的唯心主义世界观在数学严谨化的过程中渗透进来。他们企图“用公式和符号代替一切”,过分夸大形式逻辑的作用,并把数学歪曲为纯粹形式主义的自由思想的产物,单纯追求抽象化和逻辑“完美”,把数学当作统治阶级的装饰品和脱离实际的“学者”欣赏的东西,从而造成数学发展的某些畸形,并在一定程度上束缚了从生产实践中提出的一些新的数学方法的发展。例如192年一位电机工程师赫维赛德在研究电路问题中创立了“运算微积分”方法,但由于缺乏严格的逻辑论证(尽管在实

踐中行之有效),当时数学杂志不肯发表,直到1946年以后,經一些数学家的严格証明,才得到承认和广泛的应用,这样的例子不胜枚举。

近二、三十年中,特别是近十多年来,由于原子能,高速飞行,无线电技术,自动控制,大型的水利工程和土建工程都需要較高深的数学工具。因此,对数学的发展提供了新的物质基础,許多新的分支迅速地建立起来,如計算数学,信息論,排队論,规划論等等。同时,也使原有的一些理論系統得到新的发展,如微分方程中非綫性方程的求解,穩定性問題,偏微分方程中的混合型方程的研究。在近代数学的发展中,苏联有着巨大的成就,如数論,函数論,微分方程定性論,数理方程,計算数学,概率論,数理邏輯等都跃居世界的前列,許多重要的数学分支居世界的领导地位。人造卫星,火箭,导弹,宇宙飞船上了天,都是和苏联先进的数学水平分不开的。

这里,我們要单独讲一下我国的情况,我国人民是勤劳智慧的,有着悠久的历史,被称为文明古国,在古代生产較为发达,数学方面也有极为丰富的知識。几何学方面,早在公元前一千年就知道勾股弦关系。公元前三至二世紀已出現数学研究的总结性著作“九章算术”,上面載有不少有关直角三角形边长关系及代数問題,公元初到四世紀期間,我国对圓周率的研究已达到相当精确的程度(当时祖冲之已获得 $\pi \approx 3.1415926$ 或 $355/113$)。三——五世紀出現“孙子算經”,上面已有代数中同余式問題。直到十三世紀,我国在代数方面一直有很杰出的成就。如二項式 $(a+b)^n$ 的展开式系数,代数方程的近似解法(現在外国书上所謂“合奈法”)等的发现时代都在欧洲数学家以前。并且早自六世紀以来,我国数学就在很大程度上影响着日本和朝鮮的数学的发展,后来,由于长期停留在封建社会,生产力发展迟緩,因而数学发展也和其他科学

一样受了限制,到了欧洲资本主义兴起以后,我国数学在相形之下就日益落后了。

近百年間,我国淪为半封建、半殖民地,生产力受到严重的束縛,数学失去了迅速发展的物质基础,并且造成依賴性的畸形发展。解放前夕,我国数学队伍非常单薄,而且大部分人不願意去研究应用較多和生产实践較为密切的数学分支,理論脱离实际的思想非常严重,輕視实践成了風气,从而更加影响我国数学的发展。

但解放后,在党的领导下,我国的生产面貌起了根本的变化,数学也跟其他科学一样,有了蓬勃的发展,許多重要的,但是基础薄弱的甚至是空白的部門已經开始填补起来,例如:微分方程,概率論,数理統計,計算数学等。特别是党公布了社会主义建設总路綫以来,全国各地各部門都掀起了大跃进的高潮,大規模的建設工程和尖端科学,以史无前例的速度在发展。这些都为数学的发展开辟了广闊的園地和提供最好的物质基础。我国数学界开始冲破资产阶级的思想束縛,投身到生产实践中去解决了和正在解决許多生产上的問題。优越的社会主义制度为我国数学的发展开辟了无限美好的远景。目前,我国正在热火朝天地进行着一个群众性的技术革新和技术革命运动,我們應該踊跃投身到这个偉大的运动中去,不断深入学习和总结广大人民的創造。只要我們沿着党指出的方向——教育为无产阶级政治服务,教育与生产劳动相结合,那么,数学将在解决生产实践問題过程中不断提高理論水平,使得我国数学水平在最短的时间內赶上先进科学水平。

§0.3. 数学的发展和生产实践的关系

恩格斯讲过“科学的发生与发展从开始起,便是由生产所决定

的。”^①毛主席在實踐論一開始就提到“首先，馬克思主義者認為人類的生產活動是最基本的實踐活動，是決定其他一切活動的東西。人的認識，主要地依賴於物質的生產活動，逐漸地了解自然的現象、自然的性質、自然的規律性、人和自然的關係；而且經過生產活動，也在各種不同程度上逐漸地認識了人和人的一定的相互關係。一切這些知識，離開生產活動是不能得到的。”^②作為科學之一，作為人類知識之一的數學，當然也不例外，也是離不開人類生產實踐的。但是資產階級學者卻不承認這一點，說什麼數學是從實際抽象出來的，已沒有什麼實際的意義，因此，它的發展可以和生產實踐沒有什麼關聯，特別是近代數學尤其可以脫離生產實踐而獨自發展起來的。這些說法是極端錯誤的，為了反駁這些錯誤的看法，我們還是拿數學發展的一些例子來看。

在歷史上每個時期的數學水平基本上是和當時的生產水平相適應的，公元前平面幾何學在希臘達到相當完美的地步（當時形成的歐氏幾何一直到現在並沒有什麼本質的改變），而極限方法雖已為阿基米德使用過，但由於當時社會生產力還不需要數學來研究變量關係，因而沒有發展的基礎。到了歐洲資本主義興起，由於航海、建築等的需要，各種力學得到發展，於是極限方法就很快被系統地運用而產生了微積分學。從十七世紀微積分發展以後的二百年中，不少數學家同時還研究了力學、電學等其他自然科學和技術問題。他們運用數學工具去解決所碰到的實際問題，而這些實際問題也成了他們在數學上獲得成就和創造的巨大源泉。這兩百年在數學發展史上留下了光輝的成就。這時古代數學曾經很發達的我國，卻由於生產落后長期停留在封建社會，數學的發展卻停滯不

① 恩格斯：“自然辯證法”，人民出版社1959年版，149頁。

② 毛澤東選集：第一卷，人民出版社1951年版，281頁。

前，逐渐落后。

这些历史现象以及前面所讲苏联数学的发展，充分说明了数学的产生与发展是被生产实践提供的問題所推动，生产水平和其他科学技术的发展水平为数学发展創設了客观条件，十九世紀的俄国数学家契比雪夫有这样的見解“理論与实践的联系会得出最好的結果，受惠的将不仅是实践，而且科学本身在实践的影响下也向前发展了。实践为科学开辟了新的科目，給科学提出完全新的問題，因而也引起了要探求全新方法的努力”。这样的看法并不是說数学就是生产的“直接訂貨”，每一个数学分支甚至每一个数学定理都来自生产中提出的問題。有些数学理論可能来自另一些数学理論的邏輯推理，但作为推理的出发点的現有理論与概念是从实践中概括出来的，而且推理所得到的結果是否能得到发展，仍須拿到实践中去考驗。总的說来，任何数学理論能否得到发展还是要取决于生产实践的需要。

当然，在数学的发展中，数学家的努力与才能也起了一定的作用，但是資產階級唯心主义者故意夸大了科学家的个人作用而抹杀了生产实践的推动力量和群众的作用，把問題說成是一些天才数学家个人創造了数学的某些分支，好象沒有他們就不会有今天的数学似的，这种說法是錯誤的。例如牛頓和来布尼茲在微积分方面完成了創建的初步阶段，有着較大的貢獻，但是，應該看到，还有許多科学家参加了微积分的創造工作，当时生产实际的要求，迫使微积分方法的发展，而当时的生产水平与科学水平也提供了发展的客观可能性，因此，在那时微积分的建立就是客观形势的必然产物。

§ 0.4. 結束語

从以上这些問題，我們会理解到数学对工程技术工作者是极为重要的理論工具，离开了它，在現代的技术条件下，就难以进行精确的工作，就象鉗工离不开銼刀，木工离不开鋸子一样。同时，我們也了解了数学这門科学的基本特点，在学习时应密切联系实际应用，重視熟练計算，并注意数学方法論上某些特有的技巧，克服在理解数学的抽象概念及运用数学理論的困难。

(漏排頁碼 11, 12 两面, 10 面紧接 13 面)

原
书
缺
页

原
书
缺
页

第一章 平面解析几何

§1-1 解析几何的第一个基本思想——用数量标志点的位置

几何学所研究的问题是物体的形状大小和物体之间的相对位置。如果我们只注意物体的形状大小和相对位置而不管物体的其他方面的性质，那末我们看到的就不是原来的物体，而是从它抽象出来的几何图形。几何学研究的对象正是这种几何图形。

读者在中学学过的几何学叫做综合几何学，这里要讲的几何学叫做解析几何学。两种几何学的差别在于它们所用的方法不同。解析几何应用代数方法研究几何图形，这是它的特点。代数方法怎样能用来研究几何问题呢？为了回答这个问题，我们要介绍解析几何的两个基本思想。解析几何的第一个基本思想就是：

用数量标志点的位置。

大家知道，点是构成一切几何图形的基础，一切几何图形都可以看做是由点组合而成的。所以，如果能够用数量标志点的位置，那就有办法用数量把几何图形的位置、形状、大小表现出来。这里涉及了解析几何的第二个基本思想，到后面我们再来谈它。但是问题现在已经清楚了，既然能够用数量表现几何图形的位置、形状、大小，那就当然能够用代数方法研究几何图形。现在我们先看，解析几何怎样用数量标志点的位置。解析几何的办法对读者并不陌生，那就是坐标系的方法。

如图 1.1，在直线上任取一点 O ，称为原点，任取一方向，如向右，称为正方向，再任取一个线段作为量距离的单位。象这样安排