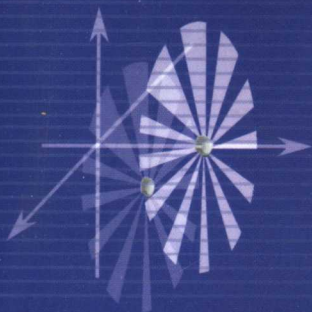


高等学校通用教材

多维气体动力学基础

单 鹏 编著



Fundamentals of
Three-Dimensional Gas Dynamics



北京航空航天大学出版社

高等学校通用教材

多维气体动力学基础

Fundamentals of Three-Dimensional
Gas Dynamics

单 鹏 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书主要讲授多维无黏性流体力学和气体动力学的基本内容,共分为七章:第1章,矢量分析与场论的主要概念与公式;第2章,多维流动的运动学分析;第3章,无黏性可压缩流体多维流动基本方程;第4章,势函数方程,流函数方程;第5章,小扰动线性化理论;第6章,理想二维定常超声速流动的特征线法;第7章,相对运动坐标系下的无黏性可压缩流体多维流动基本方程。各章附有习题,并列出了课程参考书目、写作参考文献。本书所需的先修基础课程有高等数学、常微分方程、矢量分析与场论、大学物理、理论力学、工程热力学和一维气体动力学。

本书适用于航空航天工科院校航空宇航推进理论与工程专业和流体机械专业的四年制大学本科专业基础课程“多维气体动力学”。本书特别适用于叶轮机械气体动力学方向的高年级大学生和低年级研究生,也可供其他有关专业师生、科研人员和技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

多维气体动力学基础/单鹏编著. — 北京:北京航空航天大学出版社, 2004. 8

ISBN 7-81077-519-7

I. 多… II. 单… III. 气体动力学 IV. 0354

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 051307 号

多维气体动力学基础

单 鹏 编著

责任编辑 邵 箭

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

<http://www.buaapress.com.cn>

E-mail: bhpess@263.net

北京松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本: 787×960 1/16 印张: 10.25 字数: 230 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷 印数: 2 000 册

ISBN 7-81077-519-7 定价: 15.00 元

前言

本书出自作者近年来为北京航空航天大学能源与动力工程学院本科高年级大学生讲述多维气体动力学这一专业基础课时所写的讲义。在航空航天高等工科院校,航空宇航推进理论与工程专业和流体机械专业的四年制大学本科课程中,“气体动力学基础”是最重要的两门专业基础课之一(另一门为“工程热力学”)。由于内容较多,它常被分为“一维气体动力学”和“多维气体动力学”这一课程系列来相继地讲授。本书即为后者而专门写作。

在本学院 20 余年来的本科气体动力学教学中,一直遇到一个国内航空航天工科院校气体动力学教学体系上的普遍矛盾:工科大学生的前沿应用课程较多,而没有足够的数学基础课时间,因此不能采用完全用矢量和张量分析语言写作的完整的黏性流体动力学教科书。而另一方面,现代宽基础精英教育理念和相应教学大纲的要求,使得仅仅学习“一维气体动力学”课程根本不够用。本学院自 20 世纪 90 年代以来解决这一矛盾的办法是,进入矢量分析的层次并仅使用矢量为数学工具,编制多维气体动力学教材,但按照本科教学大纲的要求,暂不纳入黏性项和本构方程,即先行学习欧拉方程组加熵方程的系统,称此课程为“多维气体动力学”,这就是本书的体系。注意到目前较少有这样的教材出版,因此,本书具有航空航天工科院校本科教学的特色。

本书讲述多维无黏性流体力学,特别是气体动力学的基本理论。这时的研究对象取为多维空间中定常或非定常流动的流体,但暂时忽略其黏性的影响。通常在对实际流动的科学研究与工程设计中,有一大批气体流动问题需要这样地去处理,并可得到物理意义明显的结果或相当准确的公式。例如,高速非近壁流动问题,气动声学问题,甚至涡声干涉问题等。对于需要考虑黏性作用的一类问题,则采用引入了熵方程的气体动力学方程组,例如,叶轮机叶片的反问题设计问题。按照这一教学系统的教学大纲的规范,理论流体力学的黏性部分被安排在研究生课程中讲授。

本书首先继承了 80 年代以来国内本专业相关教材的教学重点、内容宽度;继而结合教学实践,在保留有关写法的优点的基础上,注重改变、重写和添加了课堂教学和课下自学中发现的问题较多的章节;又注意到大学生在毕业论文的研究与设计中所暴露的问题,特别加强了航空动力内流气动专业需要强调的基本物理概念的介绍;再则,结合教师的一线科研工作,增加了现代工程应用的新例子,特别是新引入了航空动力特色领域的重要基础性内容,这就是全新写作的第 5 章第 5.3 节(非定常欧拉方程组的小扰动法)和第 7 章(相对运动坐标系下的无黏性可压缩流体多维流动基本方程)。本书首先是为内流气体动力学专业而写

的,但同时特别注意了,在相同的基础理论范畴内,也讲述一些飞行器空气动力学专业的基础知识,使学生的知识面不致过窄。本书课堂教学的参考学时为 52 学时。

本书写作的主要参考书有:北京航空航天大学“多维气体动力学”课程早期使用的讲义,北京大学吴望一教授著《流体力学》。北京航空航天大学能源与动力工程学院刘导治教授与作者热情地研讨了本书一些章节的写作,并审阅了全书;北京航空航天大学能源与动力工程学院孙晓峰教授对本书非定常部分的写作提出了重要方向性意见,并审阅了第 5 章、第 6 章,在此一并表示衷心的感谢。

编著者

2003 年 12 月

符号表

A, A	截面积, 表面积	h	焓
a	声速	H	转焓
C_p	压强系数, 压力系数	i, j, k	笛卡儿坐标系单位矢量
c_p	气体的比定压热容	Im	复数的虚部
c_v	气体的比定容热容	k	气体比热比
D	求解域	l, l^0	有向曲线, 与其单位方向矢量
$\frac{D}{Dt}$	矢量场、标量场的随流导数	L_u	加入单位质量流体的功量
$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}$	矢量场、标量场的时间导数	Ma	马赫数
$\frac{\delta}{dt}$	单个数量的时间导数	m	质量
∇	哈密顿算子	$\dot{m}$	质量流量
$\Delta = \nabla \cdot \nabla$	拉普拉斯算子	n	曲线、曲面的法方向; 多变指数
E_a	绝对坐标系下流体体系贮存能	n, n^0	法向矢量, 法向单位矢量
$E = \rho \left(u_r + \frac{v^2}{2} \right)$	绝对坐标系下单位体积流体的贮存能	p	压强, 压力
E_r	相对坐标系下单位体积流体的贮存能	Q	加入热量
E_{r-}	流体体系的转能	$\dot{Q}$	加入热流率
e	绝对坐标系下单位质量流体的贮存能	q	单位质量流体的加入热量; 流量函数
e_r	相对坐标系下单位质量流体的贮存能	$\dot{q}$	单位质量流体的加入热流率
e_{r-}	转能	R	彻体力矢量
e_r, e_θ, e_z	圆柱坐标系单位矢量	R	气体常数
e_1, e_2, e_3	正交曲线坐标系单位矢量	Re	复数的实部
f	傅里叶热流矢量	r, θ, z	圆柱坐标系半径坐标、角坐标、周向坐标
F	力	S	熵; 面积
		s	单位质量流体的熵
		T	温度
		t	时间
		U	彻体力的势函数
		U, F, G, H, Q	守恒型微分方程组的函数矢

	量, 矢通量, 源矢量		标系之旋转角速度矢量
$u_T = c_V T$	单位质量流体的内能	ω	转轴旋转角速度标量; 非定常
$\mathbf{V}$	小扰动流合成速度矢量		小扰动物理量的角频率
U, V, W	笛卡儿坐标系中的主流与小扰动流合成速度分量	$\bar{\omega}$	总压损失系数
V	体积; 速度的模	ρ	流体密度
$\mathbf{v}$	速度矢量	η	单位体积流体所含的物理量
u, v, w	笛卡儿坐标系中的速度分量	λ	气流速度系数; 热传导系数
v_r, v_θ, v_z	圆柱坐标系中的速度分量	μ	流体黏性系数
v	比容		
W	输出功; 相对速度的模	角标	
x, y, z	笛卡儿坐标	a	绝对的
X, Y, Z	彻体力矢量的分力标量	ad	绝热的
α, β, γ	正交曲线坐标系中的矢量与三个坐标方向的方向角	b	边界
δ	数量差	r	相对的
ϕ, φ	势函数	∞	远前方来流的
Γ	速度环量	1, 2, 3	正交曲线坐标系中的三个分量
Ψ	流函数	x, y, z	笛卡儿坐标系中的三个分量
σ	应力; 总压恢复系数; 待定系数	r, θ, z	圆柱坐标系中的三个分量
Ω	微团涡量	*	气流总参数
ω	微团旋转角速度矢量; 相对坐	'	气流小扰动物理量
		-	小扰动物理量的振幅

绪 论

流体力学是人类古老而辉煌的学科之一。伴随工程设计的需要,产生了实验流体力学;伴随数学分析的发展,产生了理论流体力学。在理论流体力学方面,欧拉(Euler,瑞士,1752)首先建立了不可压缩流体运动的连续性方程,然后,在先忽略流体黏性的条件下,也就是对于理想流体,欧拉又给出了流体的动量方程(1755)。现今,人们将适用于无黏性可压缩流体的上述两个方程再加上流体的能量方程所组成的方程组,称为欧拉方程组。此后,又经过 90 年的认知和学科积累,人类才建立了更深刻的所谓流体力学基本方程组,也称为 Navier-Stokes 方程组,简称 N-S 方程组。经过纳维(Navier,法国,1822),泊松(Poisson,法国,1829),圣维南(Saint-Venant,法国,1843),斯托克斯(Stokes,英国,1845)数位学者接续不断地努力探索,这个方程组最终在 1845 年被推导了出来。它是描述包括黏性现象在内的流体动力学问题的基本方程组,并且至今在宏观力学范畴内它确凿无疑地成立着。因此有人曾提到它是流体力学的“圣经”。

20 世纪初以来,力学得到了突飞猛进的发展,特别体现在流体力学理论的深入以及理论应用的水平上。这时,科学界的理论研究和工程发明界的早期实验研究,作为早先相对比较独立的两个研究分体系,在工程应用这个中间结合点上,实现了两个分体系的互相响应和广泛而成功的接合。例如,于公元前 200 多年就提出的流体静力学的阿基米德原理,于 1738 年提出的水动力学的伯努利方程,于 1883 年发明的超声速空气动力学拉瓦尔管的原理等,都可以用基于牛顿力学定律,经过理性演绎而得到的极其完备的流体力学基本方程组,来给出清晰、准确和完善的揭示。这是因为,这些具体的力学现象,都是在忽略现实中各种影响力相对较小的因素以后,所得到的流体力学基本方程组的特解。于是在全世界范围内,通过包括力学、流体力学在内的古典科学的广泛工程应用,知识带来了第二次产业革命。21 世纪初的今天,从国防设施、工矿到城乡居民区,从陆海空运载工具、大型机械设备到日用商品,各种形式的流体机械,也就是借助水、空气等流体的运动,来实现能量转换和其它功能的机械,得到了前所未有的广泛应用。关于流体在三维空间中运动的科学理论研究、实验研究、数值研究和工程开发设计,更在不断地发展深化。诸如空气绕机翼的流动问题,气体在燃气涡轮发动机的进气道和尾喷管中的流动,在叶轮机中的流动,在火箭发动机燃烧室中的流动问题,以及液体在活塞式制冷、供热压缩机系统,在离心式水泵、河床、水坝,甚至在各种儿童玩具中的流动问题,等等,对它们用流体三维运动的理论来认识、分析和设计,可以得到极其接近实际物理现象的结果和成功的产品设计。

通常所说的流体力学属于经典的牛顿力学体系。流体力学是理论力学从刚体问题、弹性

体问题,向流体问题、乃至可压缩流体问题的必然的发展与深入,是人类 300 多年以来运用理性思维去认识物理世界的必然产物,是仍然没有达到彻底认知的领域。本书所讲授的“多维气体动力学”的内容,则归属于流体力学的基本理论体系部分。按照高等工科院校本科教学大纲对大学生知识范围的要求,本课程的研究对象被限定为多维空间中不可压缩的和可压缩的,但却是无黏性的流体,粗略地讲,就是对应于通常的气体的低速和高速流动,例如,空气、燃气和蒸汽的亚声速、跨声速和超声速流动。因此,这是一门重要的专业基础课,是为在大学本科的后期学习阶段中,学习航空宇航推进理论与工程专业、流体机械专业、传热学专业、热力学专业的多门专业课,并且为在大学毕业以后的工作与再学习阶段中,理解与掌握各种工程研究和工程设计的方法而专门准备的。它也是学生在硕士研究生、博士研究生期间,学习更深入的黏性流体力学、计算流体力学、高等叶轮机气体动力学等课程时,所必备的专业基础理论知识。最后由于上述原因,它也是衡量大学生学习质量、科研能力的几门重要的专业基础课之一。

本书作者假设学习本书的大学生已经先行学习了一维气体动力学(One-dimensional Gas Dynamics),也称为可压缩流体力学(Compressible Fluid Flow)的知识。可压缩流体力学的主要教学思想是,在对流场进行降维处理、简化处理后,对于流体力学的物理定律,采用宏观控制体形式的数学模型来描述。这样,偏向于减少空间的维数,而首先极其重要地获得和理解气体动力学最基本的物理概念。例如,质量守恒即流动的连续性、可压缩流体的动量定理、可压缩流体的能量守恒和转化定律、声速、马赫数、压缩性等。同时,就获得了在流体机械工程,特别是航空航天工程中易于应用的一维气体动力学的研究与设计方法。注意到,这恰恰是历史上在理论流体力学微分方程组完善到可以被用来揭示所有的流动现象之前,实验流体力学和工程设计方面所采用的主要研究与设计方法。因此,这种教学思想是自然的、合理的,而且具有雄厚的实践基础。在这一学习途径当中,对于很多问题,暂且认为气流没有黏性,而得到了很多气体动力学的重要基本概念。它们也是在日常工作中用得最多的重要基础性概念和理论。这些内容可以被看作是 N-S 方程组经过简化以后在气体动力学中的应用。接续下来,本书及其相应课程将用一学期的时间,来讲述多维气体动力学的理论。在这里,我们也暂且不研究黏性现象,但空间的维数升至三维,因为在这方面,N-S 方程组以及它的无黏性简化形式——欧拉方程组的许多内涵我们尚未来得及学习与分析,我们尚缺乏对于无黏性的多维流动物理现象的深入理解。本课程的继续深入,就进入多维黏性流体力学的学习,工科院校一般将它安排为硕士研究生的课程。届时着重理解黏性流动现象,并且在本课程的基础上,容易对比出流体运动无黏性和有黏性的重要本质区别,以及黏性的影响程度之所在。

多维气体动力学在科学与工程中将被如何应用呢?一维气体动力学重在认知一维空间中可压缩流动的物理概念,并用代数方程组和常微分方程组解算工程问题;多维气体动力学则重在认知多维空间中可压缩流动的物理概念,并用偏微分方程组、积分方程组来描述科学与工程问题。三维空间中非定常的气动微分和积分方程组,它们揭示流场的发展和变化规律,但在多数情况下其宏观结果不易被直接看出,只能用计算机解算,这称为计算流体力学问题。在世界

范围内,计算流体力学大约从 20 世纪 70 年代初开始发展,到 90 年代初已经达到可以在工程设计和科学研究中实际应用的阶段,例如,在飞行器和航空发动机的设计和优化设计过程中。这个伟大的进步是很多人从未预料到的。另一方面,在少数情况下气动方程组可以被简化为二维、一维的微分和积分方程组,它们揭示流场的主控规律,也可用计算机解算,这称为建立降维数学模型的问题。在 70 年代及其以前世界上的气体动力学研究中,降维数学模型的方法几乎是解决现代科学与工程复杂问题的惟一方法,其进展是十分不容易的。然而在今天,它仍具有理性地描述流动主要规律、揭示流场主控物理因素的不可替代的重要作用,例如,在非定常气体动力学数学模型和气动声学数学模型的研究中。又在极少数情况下,气动方程组有可能被简化为流动规律直观的代数方程,成为一个可用手工解算的问题,例如,在各种问题中对于各形式的伯努利方程的应用。

大学生如何学习有一定难度的多维气体动力学知识呢?本课程的明显特点是,需要在动脑,特别是动笔的过程中,熟识理论体系及其数学表达与演算系统,需要借助数学分析来达到加深理解物理现象的目的。但是,通常研究者不可能在不知道他所研究问题的物理意义和可能的推导结果的前提下,仅仅依靠研究纯数学符号的各种可能的运算关系,就得到有意义的、深刻的数学物理概念和理论公式。例如,莱布尼兹借助平面曲线问题的研究,在几何背景下发现了数学分析方法——微积分原理;而牛顿则借助对变速运动的研究,在物理学机械运动的背景下,发现了完全相同的微积分原理。于是我们现在有微积分基本公式——牛-莱公式。因此,学生应能够事先对所研究的问题进行物理分析与归纳,有一定理解后再抽象出数学概念并建立公式。这就是关于学习的理论所强调的“分析与解决问题的能力”。这个理解所研究问题的过程,是需要耗费更多的时间、精力和思维技巧的。应该建立思考和思考后再推导一般结果的研究习惯。

本课程所需的先修课程有:高等数学、常微分方程、矢量分析与场论、大学物理、理论力学、工程热力学、一维气体动力学。学生应联想贯通已经学过的热力学和气体动力学知识,并应熟悉作为本书学习工具的矢量分析和场论的基础知识。本书的“课程参考书目”中列出了可以辅助本课程的参考书和参考习题集。

目 录

符号表	I
绪 论	III
第 1 章 矢量分析与场论的主要概念与公式	
1.1 数量场的梯度	1
1.1.1 梯度的定义	2
1.1.2 梯度的性质	2
1.1.3 梯度的运算表达式, 哈密顿算子 ∇	3
1.1.4 梯度与微分的关系	4
1.2 矢量场的散度	5
1.2.1 通量的定义	5
1.2.2 散度的定义	5
1.2.3 散度的性质	5
1.2.4 散度的运算表达式	6
1.3 矢量场的旋度	6
1.3.1 环量的定义	6
1.3.2 环量面密度的定义	7
1.3.3 旋度的定义	7
1.3.4 旋度的性质	7
1.3.5 旋度的运算表达式	7
1.4 梯度、散度、旋度的意义	9
1.5 梯度、散度、旋度的常用场论公式和在常用坐标系中的展开公式	9
1.5.1 正交曲线坐标系及其中场的常用表达形式	9
1.5.2 常用场论公式及其展开公式	10
1.5.3 奥-高公式	12
1.5.4 斯托克斯公式	12
1.6 迹线和流线	13

习 题 1	14
第 2 章 多维流动的运动学分析	
2.1 全导数或随流导数 $\frac{D}{Dt}$	15
2.2 微团的加速度	16
2.3 流体微团的运动分析——柯西-亥姆霍兹速度分解定理	17
2.4 无旋流动	22
2.5 不可压的无旋流动	23
2.6 速度环量,有势流场中速度环量的大小	24
2.7 有旋流动	27
2.7.1 用涡线的方程定义涡线	27
2.7.2 涡通量 I 或涡管的旋涡强度 I	28
2.7.3 涡管的旋涡强度 I 守恒定理	28
2.7.4 开尔文定理	29
2.7.5 拉格朗日定理或旋涡不生不灭定理	30
2.7.6 几个定理的对比理解	31
习 题 2	31
第 3 章 无黏性可压缩流体多维流动基本方程	
3.1 雷诺输运定理	33
3.2 质量守恒定律,即连续方程的积分形式、微分形式	34
3.3 牛顿第二运动定律,即动量方程的积分形式、微分形式	36
3.3.1 欧拉方程的积分形式、微分形式	36
3.3.2 葛罗米柯方程和克罗克方程	40
3.4 热力学第一定律,即能量方程的积分形式、微分形式	43
3.4.1 适用于体系的积分形式能量方程	44
3.4.2 适用于控制体的积分形式能量方程	45
3.4.3 微分形式的能量方程	46
3.5 热力学第二定律,即熵方程的积分形式、微分形式	48
3.6 无黏性可压缩流体多维流动的动力学基本方程组,封闭性	51
3.7 声速方程的意义和各种形式	54
3.8 完全气体等熵流动和均熵流动的概念和其不同表达形式	56
3.9 定解条件	57

3.9.1 初始条件.....	57
3.9.2 边界条件.....	57
3.10 运动微分方程的第一积分	60
3.10.1 拉格朗日积分	60
3.10.2 伯努利积分	61
习 题 3	65

第4章 势函数方程,流函数方程

4.1 气体的势函数方程,即气体动力学方程	68
4.2 二阶线性、拟线性偏微分方程的分类,特征线概念初步.....	71
4.3 流函数的概念和定义.....	73
4.4 流函数性质.....	74
4.5 流函数方程.....	76
4.6 流函数方程与势函数方程的对比.....	77
4.7 理想不可压缩流体的绝热二维定常无旋流动.....	79
4.7.1 不可压缩平面定常无旋流动解的可叠加性.....	79
4.7.2 不可压缩平面定常无旋流动问题通常的提法.....	79
4.7.3 直匀流.....	80
4.7.4 点源、点汇	81
4.7.5 点涡(或称环流、自由涡)	82
4.7.6 偶极流(或称偶极子).....	83
4.7.7 无环流(或称无环量)的圆柱绕流.....	85
4.7.8 有环流(或称有环量)的圆柱绕流.....	88
4.7.9 机翼翼型或叶轮机叶型设计理论中的几个基本概念.....	91
习 题 4	92

第5章 小扰动线性化理论

5.1 基本概念与基本定义.....	95
5.2 无黏性流体定常可压缩均熵无旋流动的小扰动法.....	96
5.3 非定常欧拉方程组的小扰动法.....	98
5.3.1 非定常欧拉方程组的小扰动线性化.....	98
5.3.2 频域法,时域法.....	100
5.3.3 线性化欧拉方程组的频域解法,色散关系.....	102
5.3.4 压力波	104

5.3.5 涡 波	107
5.3.6 熵 波	109
5.3.7 小结,边界条件应用简述.....	111
5.4 均匀静止气体中平面声波传播的控制方程的线性化形式及其解	113
习 题 5	115
第 6 章 理想二维定常超声速流动的特征线法	
6.1 基本概念	117
6.2 单个偏微分方程的特征线法	119
6.3 特征线可以是待求函数的导数的间断线	120
6.4 两个偏微分方程的方程组的特征线法	121
6.5 n 个偏微分方程的方程组的特征线法简介	123
6.6 依赖域,影响域.....	124
习 题 6	125
第 7 章 相对运动坐标系下的无黏性可压缩流体多维流动基本方程	
7.1 速度合成定理	127
7.2 绝对系与相对系的导数的变换	128
7.3 相对运动坐标系下的连续方程	129
7.4 加速度合成定理	130
7.5 相对运动坐标系下的动量方程	131
7.6 体系总能量与坐标系的关联	136
7.7 相对运动坐标系下旋转机械的能量方程	138
7.8 相对运动坐标系下的微分方程组和守恒型微分方程组	140
7.9 相对运动坐标系下的守恒型积分方程组	144
习 题 7	145
课程参考书目.....	147
参考文献.....	149

第 1 章 矢量分析与场论的主要概念与公式

1.1 数量场的梯度

自变量 x, y, z, t 的数量函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 也被称为数量场, 而梯度 (gradient) 是数量场的一个基本而重要的概念。

为了建立数量场的梯度的数学概念, 可以先在二维空间中做一个理解。在二维空间 (x, y) 中, 在任意点 $M(x, y)$ 处, 对应有某个函数 $\varphi(M)$ 的值, 因此称 $\varphi(M)$ 为“点函数”。点函数 $\varphi(M)$ 的值可用第三维空间坐标 φ 来表示, 又设 $\varphi(M)$ 为一连续函数, 因此它就有等值线 (或称为等高线)、函数的变化率, 以及函数的梯度这三个概念。它们的几何描述见图 1-1~图 1-3。图 1-1 主要示出函数的等高线族, 其中的任一根等高线都是由函数值等于某一值的所有函数点组成。图 1-2 在函数曲面的 $r-\varphi$ 剖面上表示出, 函数值 (曲面的高度) 变化剧烈之处, 就是等高线族的俯视投影的密集之处。图 1-3 则示出了投影在 $x-y$ 平面上的等高线族, 可以注意到, 当从一根等高线上的一点走到相邻等高线上, 存在着最短路线。这里先行体会一下: 最短路线的方向, 就被定义为该点处函数 $\varphi(M)$ 的梯度这一矢量的方向, 而每一点处都存在有梯度矢量, 且最大的梯度矢量出现在等高线族最密的地方。因此这三个图清楚地表达了关于数量场 $\varphi(M)$ 的梯度这一数学概念的几何意义, 并且可由这里的几何上的特定背景, 建立起点函数的梯度的一般性数学定义。这时, 点函数的自变量点可以是二维的 $M(x, y)$, 也可以是 m 维的 $M(x_1, \dots, x_m)$ (这是一般表达式)。

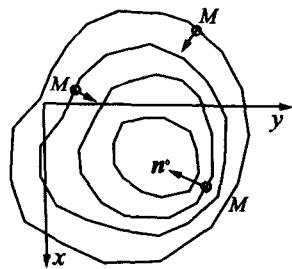
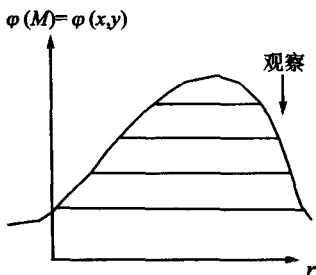
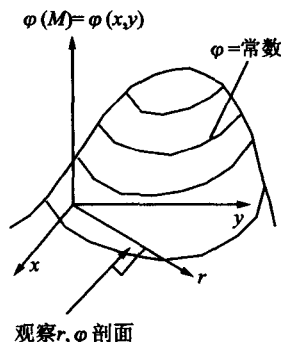


图 1-1 数量场 φ 的等高线族 图 1-2 等高线俯视密集处 $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$ 大 图 1-3 每点都有最大 $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|$ 及 n^0

1.1.1 梯度的定义

若在数量场 $\varphi(M)$ 中的一点 M 处,存在着这样的矢量 $\mathbf{G}$,其方向为点函数 $\varphi(M)$ 在 M 点处变化率最大的方向 $\mathbf{n}^0$,同时其模是这个最大变化率的数值 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$,则称矢量 $\mathbf{G}$ 为函数 $\varphi(M)$ 在点 M 处的梯度,记作

$$\text{grad} \varphi = \mathbf{G} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}^0 \quad (1-1)$$

若数量场 $\varphi(M)$ 中每一点 M 处都有梯度矢量 $\mathbf{G}(M)$,则全体 $\mathbf{G}(M)$ 又构成一个矢量函数或矢量场,称为梯度场。

1.1.2 梯度的性质

(1) 梯度的定义是与坐标系无关的。

在数量场 $\varphi(M)$ 中的一点 M 处,总可以找到 φ 的最大变化率的方向;在这个方向上,最大变化率 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的数值,也就是在自变量空间的每单位弧长上 φ 的增量,是由数量场 $\varphi(M)$ 的数量分布规律所决定的;因此梯度的模与观察者观察时所采用的坐标系无关。某一具体坐标系只能改变它对于梯度矢量的方向 $\mathbf{n}^0$ 的描述。

(2) 梯度矢量 $\text{grad} \varphi = \mathbf{G}$ 在任一方向 $\mathbf{l}^0$ 上的投影作为数量等于函数 $\varphi(M)$ 在该方向的方向导数。

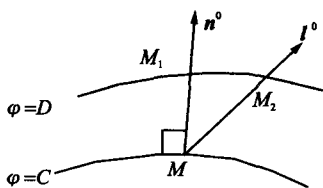


图 1-4 方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ 是梯度的投影

这实际上是上面的梯度定义的另一种说法。可作如下推理(图 1-4):等值线的意义本身说明,沿着 φ 的等值线函数 φ 不变化,且沿着其它任意方向 φ 有变化。而想像一族密集的等值线,显然沿着跨向相邻等值线的最近的方向——也就是所在等值线的法向 $\mathbf{n}^0$,则 φ 的变化率最大。记这个变化率为 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 。于是,

在图 1-4 中 M 点处的函数等值线的法线上取一点 M_1 ,其无限邻近 M 点。又在 M 点处取任意方向 $\mathbf{l}^0$ 上的无限邻近点 M_2 。那么由几何关系有

$$MM_1 = MM_2 \cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{l}^0) \quad (1-2)$$

这样, M 点上函数 φ 的方向导数就可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \lim_{MM_2 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_2) - \varphi(M)}{MM_2} = \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1 / \cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{l}^0)} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{l}^0) = \\ &= |\mathbf{G}| \cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{l}^0) |\mathbf{l}^0| = \mathbf{l}^0 \cdot \mathbf{G} \end{aligned} \quad (1-3)$$

因此,方向导数与梯度矢量之间有极其简单的一个投影关系。在数量场中任一点,只需知道

G , 一切导数就均得知了。

(3) 数量场 $\varphi(M)$ 在任一点 M 的梯度矢量 $\text{grad } \varphi = G$, 垂直于函数 $\varphi(M)$ 在该点的等值面, 并且指向 $\varphi(M)$ 增大的方向。

由式(1-3)可见, 当 $l^0 \perp G$, 有 $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = l^0 \cdot G = 0$, 即垂直于梯度 G 的方向 l^0 恰是二元函数 $\varphi(M)$ 的等值线的走向, 或多元函数 $\varphi(M)$ 的等值面的走向。至于 G 的指向, 则在梯度的定义中已经规定了其指向函数增大的方向。

1.1.3 梯度的运算表达式, 哈密顿算子 ∇

现在求数量场 φ 的梯度矢量 G 的运算表达式, 分别用直角坐标系符号、圆柱坐标系符号、球坐标系符号, 以及最后的场论符号来表达。首先在直角坐标系中, 应用式(1-3), 将梯度矢量 G 依次向 x, y, z 三个轴上投影, 显然得到 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ 。而任一矢量一般地可以表示为它在三个互为正交的坐标轴上的投影的矢量和, 因此有

$$G = \text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \nabla \varphi \quad (1-4)$$

式(1-4)最右边的两个表达式的写法实际上已经归纳出了一个矢量化了的微分运算的算子

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-5)$$

算子“ ∇ ”称为哈密顿(Hamilton)算子, 读作 Nabler 或者 Del。在梯度的直角坐标系运算表达式中, 它作用于数量场 φ 。

又在圆柱坐标系中, 将梯度矢量 G 依次向 r, θ, z 三个方向上投影, 显然也有

$$e_r \cdot G = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad e_\theta \cdot G = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, \quad e_z \cdot G = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-6)$$

其中应注意, 在 θ 方向上对应于式(1-3)中的线度量 l 的应该是线度量 $r\theta$, 而不是角度量 θ , 即角度量 θ 仅仅是圆柱坐标系中的一个坐标, 而不是弧长(图 1-5)。同时在 θ 方向的圆柱面上 r 是常量, 因此 $r d\theta$ 是弧长。于是矢量 G 同样可以用它在三个互为正交的坐标轴上的投影的矢量和表示, 即

$$G = \text{grad } \varphi = e_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_\theta \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} + e_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi \quad (1-7)$$

可见同样可归纳出圆柱坐标系中的一个矢量化了的微分算子

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-8)$$

由于它作用于 φ 以后仍得到 G , 因此它就是哈密顿算子。所不同的只是运算符“ ∇ ”在不同的坐标系中有不同的表达式罢了。同理, 可以推导出在球坐标系中算子 ∇ 的表达式为(图 1-6)