数学进修用书

任　岩

实数

浙江人民出版社

数学进修用书

实　数

浙 江 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书从公理出发，建立了自然数理论．然后用扩张的办法建立了整数、有理数理论，再通过“戴德金分割”的途径扩张到实数，从而完成了从自然数到实数的数的概念的扩张．此外，还介绍了无理数、超越数的若干具体判别方法．内容较详尽、系统较完整．适合中学师生和数学爱好者自学．

数学进修用书

实 数

任 岩

*

浙江人民出版社出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥境）

浙江省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 96,000

1980年9月第一版

1980年9月第一次印刷

印数：1—3,000

统一书号：7103·1117

定 价：0.36 元

写 在 前 面

谁不知道数？自从幼儿“咿哑”学语后不久，就学会了数一、二、三、四等自然数．小学里，他们已经学会了正有理数的四则运算．初中的学生便有了无理数的初步知识．以上所说的数，都是实数，那末关于实数还有什么好说的呢？

我们认为这里面还有很多问题值得研究，比如说，1＋2为什么等于3？自然数又是怎样过渡到整数并逐步扩张到实数的？这些问题在很多人的脑子里都会认为是很简单的，但却又往往回答得不完全．

这本小册子就是按自然数、整数、有理数、实数的顺序，从公理出发，建立了严密的数的概念和运算法则，并阐述这些数的性质．另外，考虑到中学里学的实数知识不多，实数的性质又是微积分的基础，所以在这本小册子的后面一部分中详细讨论了这些问题．

书中尽量避免应用微积分知识，在必须用到的情况下，也只有用微分来代替积分，并作为附录．

本书适用于中学教师进修和提高，也可以供高中学生以及数学爱好者自学．

目　　录

第一章　自　然　数

§1·1　皮亚诺公理

一提到自然数，大家都知道是指：

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$　　　　(1·1)

对于它们之间的加法和乘法运算，大家也很清楚．但进一步要问几个为什么，例如1加2为什么等于3等等，恐怕就很难回答得清楚了．为了理论上的探讨和基础的牢固，意大利数学家皮亚诺(G. Peano)于1891年发表了自然数公理体系，在这基础上建立了自然数的理论．本节内容就是首先介绍皮亚诺的自然数公理，而后讨论自然数的几个性质．

皮亚诺(G. Peano)公理　N是一个非空集合，如果对于N的某些元素（不是全部）具有"b是a的继数"的关系（用a'表示a的继数），且满足下面的五个公理，我们便称N的元素为**自然数**．

公理Ⅰ　有$1\in N$．

公理Ⅱ　若$a\in N$，则$a'\neq 1$．即1不是任何数的继数．

公理Ⅲ　若$a, b\in N$，且$a=b$，则有$a', b'\in N$．且$a'=b'$．

即对于任何数a有一个且只有一个继数．

公理Ⅳ　若$a', b'\in N$，且$a'=b'$，则$a=b$．

即对于任何数它只能是一个数的继数．

公理V（归纳法公理） 若M具有下面的两个性质.

（V_1） $1\in M$;

（V_2） 若$a\in M$，则$a'\in M$；那末M与N一致，即M就是N.

初次看到这五个公理的人可能认为，对于尽人皆知的1，2，3，4，…何必这样故弄玄虚呢？似乎把原来已经很清楚的东西反而搞得模糊了. 于是，可能产生一种想法：有此必要吗？

实际上，在数学这门科学里，除了它所用的逻辑语言之外，其他的一切叙述都要遵守一个原则“言之有据”，绝不能似是而非，愈是数学理论的基础知识愈是如此. 正如大家都知道的，也就是由于讨论欧几里得(Euclid)第五公设这一基本问题，产生了非欧几里得几何学. 所以基础理论不是可有可无的，而是很必要的.

这五个公理和“继数”这一概念，抽象地刻划了自然数的特性. 我们平常所了解的自然数列（1·1）很明显地是满足上述公理的，可以作为公理体系的一个实现. 同时也可以认为是对“继数”这一不定义的概念具体的描述. 譬如说，在（1·1）的规定里，1是属于自然数的，但0就不是属于自然数，因为0的继数是1，而公理Ⅱ规定1是不能作为任何数的继数的. 1的继数是2且只能是2，2的继数是3且只能是3，等等. 而2只能是1的继数而不能是任何别的数的继数，等等.

上面的五个公理，前面四个对于了解自然数的人都是比较明显的. 只有最后一个公理却不是很明显的，但对于熟悉数学归纳法的人来讲也还是容易接受的. 数学归纳法是用“有限”步骤解决“无限”的问题. 即断言无穷对象的集合据有的共性. 这种方法是合理的吗？如果是合理的，那又为什么呢？公

理Ⅴ也就是数学归纳法合理性的依据.

定理1·1（关于归纳法证明的合理性） 如果

（1）假定某一个命题A对自然数1正确；

（2）从假定命题A对于自然数k正确，可以证明命题A对于k的继数k'正确；

那末这个命题对于任何一个自然数都正确.

证 设M是使命题A正确的自然数集合，于是根据(1)，$1\in M$，即M满足公理Ⅴ的（$Ⅴ_1$）；另外，若k属于M，即命题A对于自然数k正确，根据定理的（2）能证明命题A对于k的继数k'亦正确，即k的继数k'也属于M，这就是说，M满足公理Ⅴ的（$Ⅴ_2$），于是根据公理Ⅴ可以得出结论，M与N一致，即命题A对任何自然数都正确.

公理Ⅲ说明1不是任何数的继数，公理Ⅳ说明若a'是某一数的继数的话，它只能是一个数的继数，并未保证a'一定是某一数的继数. 下面我们可以证明，除1以外，任何自然数一定是一个数的继数.

定理1·2 除1以外，每一自然数都是一个且仅是一个自然数的继数.

证 定理的第二部份即公理Ⅳ，因此我们只须证明定理的第一部分：若$a\in N$，$a\neq 1$，则有$x\in N$，使得$x'=a$.

设M是由两类数组成的集合，第一类只有一个数1，第二类是所有作为某一数的继数的数所成的集合. 这第二类数绝非空的，因为根据Ⅱ，$1\in N$有1的继数$1'\in N$，故$1'$即M的第二类数.

明显地，M满足公理Ⅴ的条件（$Ⅴ_1$），即$1\in M$；易见若$k\in M$，则$k'\in M$（因为k'是k的继数，故k'是第二类数），即M满足公理Ⅴ的条件（$Ⅴ_2$）. 于是根据公理Ⅴ，M与N一致，

即自然数除 1 之外每一数都是一数的继数. 证毕.

与平常所说的自然数对照，可知 1 的继数$1'$即是 2，同样 $2'=3$，$3'=4$，$4'=5$，$\cdots$.

§1·2 自然数的顺序和四则运算

尽管我们对于自然数的大小、顺序、四则运算及运算规律是很熟悉的，但那都是建立在“显然”的基础之上的. 在小学里，学习自然数的大小、顺序、运算时，实际上只注重数的计算，也就是说只要会算也就可以了. 至于为什么这样算和为什么可以这样算基本上都是不过问的. 最多举一些具体的例子，如对于交换律，3 个苹果加上 5 个苹果是 8 个苹果，5 个苹果加上 3 个苹果也是 8 个苹果，于是便可以说 $3+5=5+3$ 了. 这只能说是对交换律的一个说明，不能算是证明. 我们在这一节里回答了自然数为什么可以这样算，并且证明了它所满足的一些运算规律.

一、自然数的加法

定义1·1 自然数的加法是指这样的对应，即当 a，$b\in N$ 时，有一个自然数 $c=a+b$ 和它们对应，并且具有下面的两个性质：

1）对于任何的 $a\in N$，则 $a+1=a'$；

2）任意的 a，$b\in N$，则 $a+b'=(a+b)'$

这是我们第一次遇见的归纳法的定义，即对于 $a\in N$，根据条件 1）确定了数 $a+1$，如果 $a+b$ 确定了的话，依据条件 2），$a+b'$ 也就确定了.

例 1 因为 $2+1=2'$，而 3 是 2 的继数，所以 $2+1=3$.

又 $1\in N$，$1+1=1'=2$，因而 $1+2=1+1'=$

$(1+1)'=2'$，故 $1+2=3$.

这就是 1 加 2 等于 3 的理论根据.

用同样的方法可以得到算术里自然数的全部加法.

定理1·3 a 与任一自然数的和是唯一存在的.

证 根据定义，$a+1=a'$，而 a' 是 a 的唯一继数，故 $a+1$ 是唯一的. 又若 $a+b$ 是唯一的，则 $a+b'=(a+b)'$ 是 $a+b$ 的唯一继数，因而 $a+b'$ 也是唯一的；所以按自然数公理V，两自然数的和是唯一存在的.

定理1·4 加法结合律成立，即

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{1·2}$$

证 首先证 $c=1$ 时成立，这是因为

$$(a+b)+1=(a+b)' \quad （加法定义1））$$

而 $$(a+b)'=a+b', \quad （加法定义2））$$

又 $$b'=b+1$$

故 $$(a+b)+1=a+b'=a+(b+1).$$

再证，若等式（1·2）对于 c 成立，则等式(1·2)对于 c' 也成立，这是因为

$$(a+b)+c'=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'$$
$$=a+(b+c)',$$

又 $$(b+c)'=b+c',$$

故 $$a+(b+c)'=a+(b+c'),$$

即 $$(a+b)+c'=a+(b+c').$$ 证毕.

定理1·5 加法交换律成立，即

$$a+b=b+a \tag{1·3}$$

证 先对 a 用归纳法证 $a+1=1+a$.

当 $a=1$ 时，$1+1=1+1$ 成立.

若 对 a 有 $a+1=1+a$. 则对 a' 有

$$a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1$$
$$=1+(a+1).$$
即 $$a'+1=1+a'.$$
因此根据数学归纳法我们证明了(1·3)式当 $b=1$ 时成立.

又 设(1·3)式对 b 成立，要证它对于 b' 也成立.

因 $$a+b'=(a+b)'=(b+a)'=b+a'$$
$$=b+(a+1)=(b+1)+a,$$
故 $$a+b'=b'+a.$$
根据归纳法，(1·3)式对任何自然 a，b 都成立.

二、自然数的乘法

定义1·2 自然数的乘法是指这样一个对应，即当 a，$b\in N$ 时，有一个自然数 $c=a\cdot b$ 与它们对应，并且具有下面的两个性质：

1) $a\cdot 1=a$,

2) $a\cdot b'=a\cdot b+a$.

例 2 证 $2\cdot 3=6$

证 因为 $2\cdot 1=2$,
$$2\cdot 2=2\cdot 1'=2\cdot 1+2=2+2=4,$$
故 $$2\cdot 3=2\cdot 2'=2\cdot 2+2=4+2=6.$$

定理1·6 自然数 a 与任一自然数相乘的积是唯一存在的.

其证法与定理1·3的证法相似，请读者自证.

定理1·7 自然数的乘法和加法满足分配律，即
$$(a+b)\cdot d=a\cdot d+b\cdot d. \tag{1·4}$$

证 先证 $d=1$ 时，等式成立

因为 $$(a+b)\cdot 1=(a+b),\ a\cdot 1=a,\ b\cdot 1=b,$$
故 $$(a+b)\cdot 1=a\cdot 1+b\cdot 1.$$
再证：如果等式(1·4)对 d 成立，则它对 d' 也成立.

因为 $(a+b)\cdot d'=(a+b)\cdot d+(a+b)$

$$
\begin{aligned}
&=a\cdot d+b\cdot d+b+a\\
&=a\cdot d+(b\cdot d+b)+a\\
&=(a\cdot d+a)+(b\cdot d+b)\\
&=a\cdot d'+b\cdot d',
\end{aligned}
$$

故根据归纳法，（1·4）式成立.

定理1·8 乘法交换律和乘法结合律成立，即：

$$a\cdot b=b\cdot a. \tag{1·5}$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \tag{1·6}$$

证明方法与前几个定理类似，根据已知定义和定理用归纳法（一次或两次）就可以证明，此处只证（1·6）式，（1·5）式的证明留给读者.

证 当 $a=1$ 时，

因为

$$
\begin{aligned}
1\cdot(b\cdot c)&=(b\cdot c)\cdot 1 &&（交换律）.\\
&=b\cdot c &&（性质1）.\\
(1\cdot b)\cdot c&=(b\cdot 1)\cdot c &&（交换律）.\\
&=b\cdot c &&（性质1）.
\end{aligned}
$$

故 $1\cdot(b\cdot c)=(1\cdot b)\cdot c.$

又如（1·6）式对 a 成立

则

$$
\begin{aligned}
a'\cdot(b\cdot c)&=(b\cdot c)\cdot a' &&（交换律）.\\
&=(b\cdot c)\cdot a+b\cdot c &&（性质2）.\\
&=a\cdot(b\cdot c)+b\cdot c &&（交换律）.\\
&=(a\cdot b)\cdot c+b\cdot c &&（归纳假设）.\\
&=(a\cdot b+b)\cdot c &&（分配律）.\\
&=(a'\cdot b)\cdot c. &&（性质2）.
\end{aligned}
$$

即（1·6）式对 a' 也成立. 按归纳法，(1·6) 式对任何自然数 a、b、c 都成立.

上面我们证明了自然数集合中加法、乘法一些运算规律的合理性．大家不要以为这些都是显而易见的事实．何必化这么大的力气去证它们．等到你们学了比较高深的数学以后就会知道还有不遵循这些运算规律的集合呢！

三、自然数的顺序

定义1·3 a与b是两个自然数，如果有一自然数k使得

$$a=b+k.$$

成立，就说a大于b，或者说b小于a，记作：

$$a>b \quad 或 \quad b<a.$$

例如，$8=5+3$，故说$8>5$或$5<8$．

定理1·9 如果$a>b$，$b>c$，那么$a>c$．

证 由于$a>b$，$b>c$，所以$a=b+k$，$b=c+l$，

因此可得：$a=b+k=(c+l)+k=c+(l+k)$，

所以 $a>c$．

定理1·10 1是自然数集中的最小数

证 设a是一个自然数，那末$a=1$或者$a\neq1$．如果$a\neq1$，那末a必为某一自然数的继数，即$a=b'$，而$b'=b+1$，所以$a=b+1$．即$a=1+b$．因而$a>1$或者$a=1$，也就是说$a\geqslant1$，故1是自然数集中的最小数．

定理1·11 如果a,b是两个自然数，那么下列三论断

$$a=b,\ a<b,\ a>b$$

至少有一成立．

证 用数学归纳法来证明这个定理．当$b=1$时，那末不论a为任何自然数时，上面三个论断至少有一个成立．因为a是自然数，所以$a=1$或者$a\neq1$，当$a=1$时，即$a=b$，当$a\neq1$时，根据定理1·10，$a>1$，即$a>b$．这就是说，对于$b=1$和自然数a，上面三论断中至少有一成立．

假设对于自然数 a,b 上面三论断中至少有一个成立，现在我们来证明 a,b' 二自然数，三论断中也必有一个成立，那末本定理便证明了.

由于归纳假设，对于 a,b 二自然数三论断中至少有一成立，所以 a 与 b 可能是 $a=b$，这时，因为 $b'=b+1$，所以 $b'>b$. 由于 $a=b$，所以 $a<b'$，即 a 与 b' 二自然数在三论断中有 $a<b'$ 一种论断成立；另外 a 与 b 可能有 $a>b$ 这一论断成立，那末 $a=b+l$，l 为一自然数，当 $l=1$ 时，$b+l=b+1=b'$，即 $a=b'$ 成立，当 $l\neq1$ 时，即 $l>1$，也就是说，$l=m+1=1+m$，那末，$a=b+l=b+1+m=b'+m$，所以 $a>b'$ 成立；最后，如果 a 与 b 二自然数中，$a<b$ 成立，由于 $b'>b$，所以 $b'>a$ 成立. 总之，a 与 b' 二自然数三论断中至少有一成立.

定理1·12 如果 a,b 是二自然数，那末

$$a=b,\ a<b,\ a>b$$

三论断中不能有二个同时成立.

证 首先证明 $a=b$ 与 $a<b$ 和 $a=b$ 与 $a>b$ 不能同时成立. 这两种情况，实际上是一种情况，因为如果第一种情况证明之后，对于第二种情况，只要考虑 $b=a$ 与 $b<a$，也就是成了第一种情况，所以只要证明 $a=b$ 与 $a<b$ 不能同时成立便可以了. 下面我们用数学归纳法来证明.

（1）当 $b=1$ 时，$a=b$ 与 $a<b$ 不能同时成立，这显然是对的，因为 a 是自然数，1 是自然数集中的最小数，所以 $a<1$ 是不可能的，即 $a=1$ 或者 $a>1$.

（2）假如说对于 b，$a=b$ 与 $a<b$ 不能同时成立. 我们来证明，对于b'，$a=b'$ 与 $a<b'$ 也不能同时成立. 利用反证法来证明. 如果 $a=b'$ 与 $a<b'$ 同时成立，那末 $a=b'$ 与 $b'=a+l$ 同时成立，利用 b' 来代替 a 得 $b'=b'+l$ 成立，亦即

$b'=l+b'=(l+b)'$，由于 b 的继数是唯一的，所以 $b=l+b=b+l$. 这样，便得到如果 $a=b$ 的话，$b=b+l=a+l$ 可得 $b>a$，即 $a=b$ 与 $a<b$ 便同时成立，这与归纳假设矛盾，因而 $a=b'$ 与 $a<b'$ 不能同时成立.

最后，我们再证明 $a>b$ 与 $a<b$ 不能同时成立，因为若 $a>b$ 与 $a<b$ 能同时成立，即 $a>b$ 与 $b>a$ 同时成立，据定理1.9便有 $a<a$ 与 $a=a$ 同时成立，这与上面的论证显然是不相符的.

定理1·13 （加法与乘法的单调性）对于两个自然数 a,b，如果 $a>b$ 或 $a=b$ 或 $a<b$（简记为 $a\gtreqless b$），则分别有 $a+c\gtreqless b+c$ 及 $a\cdot c\gtreqless b\cdot c$，反之亦然.

证 对于正命题，如果 $a=b$，则由加法与乘法的唯一性可得 $a+c=b+c$ 及 $a\cdot c=b\cdot c$.

如果 $a>b$，则 $a=b+k$，于是

$$a+c=(b+k)+c=c+(b+k)=(b+c)+k.$$

故 $$a+c>b+c.$$

同样 $$a\cdot c=(b+k)\cdot c=b\cdot c+k\cdot c>b\cdot c.$$

$a<b$ 时，同样可证.

由于定理1·12，本定理的逆可用反证法得到. 读者自证之.

有了定理1.13的逆，消去律便可以用了，

定理1·14 如果 $a\gtreqless b$，$c\gtreqless d$，则应分别有

$$a+c\gtreqless b+d \text{ 及 } a\cdot c\gtreqless b\cdot d.$$

证明留作习题.

这几个定理在解决不等式的问题时是经常要用到的.

定理1·15 自然数的非空集合 A 必有一个最小的数.

例如集合 $\{2n\}$ 的最小数为2，集合 $\{3n-2\}$ 的最小数为1等.

证 我们把不大于集合A中任何自然数的全体数所构成的集合记作B．因为对任何自然数a，$a\geqslant 1$，故$1\in B$．又因A非空，故必有$a\in A$，而$a'=a+1$，即$a'>a$，故$a'\bar{\in} B$，这说明了B不包含所有自然数，因此有一个数$b\in B$，而$b+1\bar{\in} B$（否则，与公理Ⅴ相矛盾）．根据B的假定，对于A中任何一数a，有$b\leqslant a$．再证$b\in A$，否则对于任一$a\in A$，有：

$b<a$，从而$b+1\leqslant a$，即$b+1\in B$，而与b的性质相矛盾．综上所述，$b\in A$，而对A中所有数a有$b\leqslant a$，故b是A中最小数．

定义1·4 设A是一自然数集，如果存在一自然数k，k大于集A中的所有数，那末便称A是有上界的．

定理1·16 非空有上界的自然数集A，必含有一个最大数．

证 设B是大于A中所有数的自然数所构成的集合，因为A有上界，所以B不是空集，据定理1·15 B必有最小数，这个最小数必定不是1，否则A是空集．因而可设B中的最小数是b'，即b'是b的继数，亦即$b'=b+1$．

这样一来，就有b属于A，因为，如果b不属于A，便属于B，由于$b<b'$，这与b'是B中最小数相矛盾．故b属于A，另外，b一定是A中的最大数，如果不然，在A中应有一数$a>b$，即$a=b+l$，$l\geqslant 1$，不等式两端同时加b，得到$b+l\geqslant b+1$也就是说$a\geqslant b'$，这显然与a和b'的属性相矛盾．

四、自然数的减法

定义1·5 加法的逆运算叫做减法，即，如果对于自然数a与b，有一自然数l与之对应，使

$$l+b=a,$$

l就叫做a与b的差，记作

$$a-b=l.$$

例如$3+2=5$，3就叫作5与2的差，记作$5-2=3$.

从此定义可知，当且仅当$a>b$时，$a-b$才存在. 差还是唯一的. 下面的讨论里，我们假定所遇到的差都是存在的.

定理1·17 下列等式都是成立的.

(1) $(a-b)+b=a$,

(2) $a-b<a$,

(3) $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$,

(4) 当且仅当$a+d=b+c$时，有$a-b=c-d$

(5) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$

(6) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$

(7) $(a-b)\cdot(c-d)=(a\cdot c+b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)$

证 我们只证(3)和(4)，其余留给读者. 注意证明时只能用前面的公理、定义和定理. "0"和"负数"以及"移项"的概念都还没有出来，我们不能应用它们来证明上述命题.

从(1)有$[(a-b)+b]\cdot c=a\cdot c$,

按分配律: $(a-b)\cdot c+b\cdot c=a\cdot c$,

从(1)得 $(a\cdot c-b\cdot c)+b\cdot c=a\cdot c$,

故有 $(a-b)\cdot c+b\cdot c=(a\cdot c-b\cdot c)+b\cdot c$,

按定理1·13的逆定理，消去$b\cdot c$，即得(3)式.

如果 $a+d=b+c$,

则因 $a+d=(a-b)+b+d$,

及 $b+c=c+b=(c-d)+d+b$

故 $(a-b)+(b+d)=(c-d)+(b+d)$.

因此 $a-b=c-d$.

反之，若$a-b=c-d$. 两边加$b+d$，得