

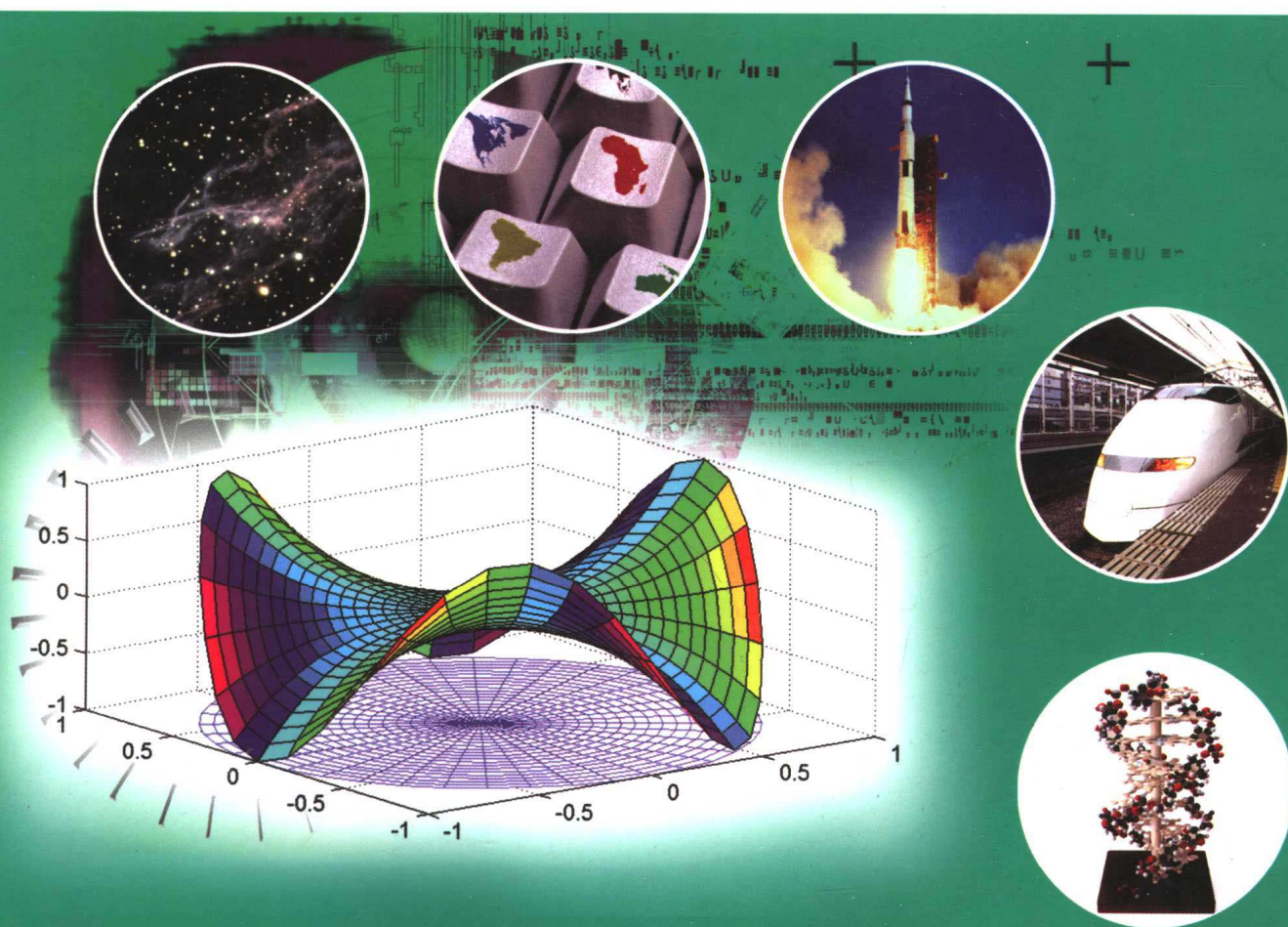
高等学校理工科规划教材

# 工科微积分

GONGKE WEIJIFEN

(上册)

大连理工大学应用数学系/组编



大连理工大学出版社  
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

# 工科微积分

(上册)

大连理工大学应用数学系 组编

主编 曹铁川

编者 (以编写章节先后排序)

曹铁川 张海文 蒋志刚

金光日 李 林 孙丽华

大连理工大学出版社

© 曹铁川 2004

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分 / 曹铁川主编. —大连: 大连理工大学出版社, 2004.9  
ISBN 7-5611-2685-9

I. 工… II. 曹… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098116 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961

E-mail: dulp@dulp.cn URL: http://www.dulp.cn

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:15.5 字数:356千字

印数:1~4 000

2004年9月第1版

2004年9月第1次印刷

---

责任编辑:范业婷

责任校对:王 丽

封面设计:宋 蕾

---

定 价:22.80元

# 前言

---

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学。我国数学大师华罗庚对其作过精彩的描述：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在……”随着现代科学技术和数学科学的发展，其应用更加广泛。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。

数学伴随着人类文明同生共存，与时俱进。17世纪，牛顿和莱布尼兹总结了众多数学先驱的研究成果，集大成创立了微积分。微积分的创立推动了科学技术以前所未有的速度迅猛发展。可以说，微积分是继欧几里得几何以后全部数学中最伟大的创造。直至今日，作为数学科学的重要支柱，微积分仍保持着强大的生命力。

数学是工科大学的主要基础理论课，而微积分在其中占有主体地位。通过该课程的学习，可获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、向量代数与空间解析几何、无穷级数与微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为学习后继课奠定必要的基础。通过微积分的学习，还能够培养理性思维能力、综合应用能力、科学计算能力以及创新能力。在高素质人才培养过程中，微积分起着特殊的不可替代的作用。

自20世纪90年代开始实施的教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”以来,国内涌现出一些风格各异的高等数学(微积分)、工科数学分析类教材,并产生了积极的影响。适量的现代数学观点和表达形式开始渗透到微积分的教学之中,传统的微积分教学框架发生了一些新的变化。随着教学改革的深入,人们对工科大学的现状和教学规律也有了更为明确地定位和认识。

我校是教育部《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》项目的参与单位之一,并主要针对数学要求较高的物理、力学、信息等专业,编写了《工科数学基础》改革教材,同时尝试着实施分流培养的教学改革。近年来,我国社会主义市场经济的建立对当代大学生的综合素质有了新的要求,在课程设置上,高校也相应增设了相关内容,使得数学课在基础课程中所占比重有所减少。为适应新的情况,满足更多专业的需求,使学生在课时减少的情况下能掌握好微积分的基本思想和方法,同时数学素养和能力得到扎实提高,我们结合多年的教学经验,编写了这本《工科微积分》教材,我们的编写原则是:按照教育部课程指导委员会对工科大学微积分课程的要求,广泛汲取传统教材和其他改革教材的优点,结合教学实际,努力使其成为一部结构合理,难度适中,特色鲜明,便于学习的教材。

本教材共分上、下两册,我们力图体现下面特点:

**1. 遵循认识规律,揭示数学发现。**对于概念、定理、公式,尽可能从直观背景出发,提出问题,分析问题,水到渠成地得出结论,然后再抽象论证。在阐述过程中,努力将微积分的基本思想融入其中,引导学生学会从量化的角度数学地思考问题,学会用微积分的观点、方法认识和处理问题。

**2. 适当调整知识体系。**本着宏观不动,微观调整的原则,对传统内容适当增减。在局部章节采用新讲法。例如在极限部分,突出了函数极限的地位,削减了数列极限的篇幅,用整标函数的观点认识和定义数列,把数列极限作为函数极限的特例,并用海涅定理将二者统一起来,从而使函数极限的性质和运算很自然地移植到数列上来,避免了叙述上的雷同与重复。在一元函数积分学中,先讲定积分,着重讲解积分思想、微积分基本公式,而不定积分和积分法是作为定积分的计算工具随后才引入。在多元函数积分学中,把重积分,对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分,统一为数量值函数在几何形体上的积分;把对坐标的曲线、曲面积分统一为向量值函数在有向曲线(面)上的积分,并与向量场和物理背景有机地结合起来,这样处理可使学生在较高层次上理解积分的本质。考虑到某些专业基础课和物理课教学的需要,我们把微分方程一章放在

了上册。

**3. 加强应用意识的培养。**我们在选材上注意联系工科实际,除经典的力学、物理实例外,还增加了化学、生态、经济、管理、生命科学、军事、气象、医学、农业及其日常生活等实例,以开阔眼界,活跃思想,增强应用数学的意识和兴趣,同时还增设了一些简单的数学建模实例。

**4. 加强综合应用数学知识能力的训练。**各章节的例题和习题比较丰富,特别是适量选编了一些综合性的题目,这有利于学生提高分析问题和解决问题能力。对于难度较大的题目,我们注意推敲再三,对运算技巧例如积分技巧作了淡化处理,因为此类技巧并未涉及基本的数学思想和方法,况且利用日臻完善的计算机软件即可轻易解决。

**5. 融入微积分演进历史。**教材中适量融入了微积分发展过程中的一些重要思想,结合相关章节介绍相关原理产生的背景,展示数学先驱们的重大贡献,使学生在学的同时,从微积分的发展足迹中受到启迪。

另外,对于重要数学名词,本教材给出中英文对照,为学生阅读英文资料提供方便。

本教材由大连理工大学应用数学系组织编写,曹铁川任主编并负责统稿。具体执笔依次是:曹铁川、张海文、蒋志刚、金光日、李林、孙丽华、庞丽萍。施光燕担任主审。

限于编者水平,书中错误、缺点和疏漏在所难免,恳请同行和读者不吝指正。

编著者  
2004年9月

# 目 录

## 第1章 函数、极限与连续 / 1

### 1.1 函数 / 2

#### 1.1.1 函数的概念 / 2

#### 1.1.2 函数的几种重要特性 / 4

#### 1.1.3 复合函数与反函数 / 5

#### 1.1.4 映射 / 7

#### 1.1.5 初等函数与非初等函数 / 8

#### 习题1.1 / 9

### 1.2 极限 / 11

#### 1.2.1 极限概念引例 / 12

#### 1.2.2 自变量趋于有限值时函数的极限 / 13

#### 1.2.3 自变量趋于无穷大时函数的极限 / 16

#### 1.2.4 数列的极限 / 18

#### 1.2.5 无穷小与无穷大 / 19

#### 习题1.2 / 21

### 1.3 极限的性质与运算 / 22

#### 1.3.1 极限的几个性质 / 22

#### 1.3.2 极限的四则运算法则 / 24

#### 1.3.3 函数极限与数列极限的关系 / 26

#### 1.3.4 夹逼法则 / 27

#### 1.3.5 复合运算法则 / 29

#### 习题1.3 / 30

### 1.4 单调有界原理和无理数 $e$ / 31

#### 1.4.1 单调有界原理 / 32

#### 1.4.2 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ / 33

#### 1.4.3 指数函数 $e^x$ , 对数函数 $\ln x$ , 双曲函数 / 35

#### 习题1.4 / 37

### 1.5 无穷小的阶 / 37

#### 1.5.1 无穷小的阶 / 37

#### 1.5.2 利用等价无穷小代换求极限 / 39

#### 习题1.5 / 40

### 1.6 函数的连续与间断 / 41

#### 1.6.1 函数的连续与间断 / 41

#### 1.6.2 初等函数的连续性 / 45

#### 习题1.6 / 48

### 1.7 闭区间上连续函数的性质 / 49

#### 1.7.1 闭区间上连续函数的有界性与最值性质 / 49

#### 1.7.2 闭区间上连续函数的介值性质 / 50

#### 1.7.3 函数的一致连续性 / 53

#### 习题1.7 / 55

#### 复习题一 / 55

#### 习题参考答案与提示 / 57

## 第2章 一元函数微分学及其应用 / 61

### 2.1 导数概念 / 62

#### 2.1.1 变化率问题举例 / 62

#### 2.1.2 导数的概念 / 63

#### 2.1.3 用定义求导数举例 / 65

#### 2.1.4 导数的几何意义 / 66

#### 2.1.5 函数可导性与连续性的关系 / 67

#### 2.1.6 导数概念在其他学科中的应用举例 / 67

#### 习题2.1 / 69

### 2.2 求导法则 / 70

#### 2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 / 70

#### 2.2.2 复合函数的求导法则 / 72

#### 2.2.3 反函数的求导法则 / 73

#### 2.2.4 一些特殊的求导法则 / 75

#### 习题2.2 / 78

### 2.3 高阶导数与相关变化率 / 80

#### 2.3.1 高阶导数 / 80

#### 2.3.2 相关变化率 / 84

#### 习题2.3 / 85

### 2.4 函数的微分与函数的局部线性逼近 / 86

#### 2.4.1 微分的概念 / 86

#### 2.4.2 微分公式与运算法则 / 88

#### 2.4.3 微分的几何意义及简单应用 / 90

#### 习题2.4 / 92

### 2.5 利用导数求极限——洛必达法则 / 93

#### 2.5.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 / 94

#### 2.5.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 / 95

|                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| 2.5.3 其他类型未定式的极限 / 96    | 3.4.1 定积分的换元法 / 162           |
| 习题 2.5 / 98              | 3.4.2 定积分的分部积分法 / 166         |
| 2.6 微分中值定理 / 99          | 习题 3.4 / 167                  |
| 2.6.1 罗尔定理 / 99          | 3.5 定积分应用举例 / 168             |
| 2.6.2 拉格朗日中值定理 / 100     | 3.5.1 总量的可加性与微元法 / 168        |
| 2.6.3 柯西中值定理 / 102       | 3.5.2 几何应用举例 / 169            |
| 习题 2.6 / 104             | 3.5.3 物理、力学应用举例 / 174         |
| 2.7 泰勒公式——用多项式逼近函数 / 105 | 3.5.4 函数的平均值 / 177            |
| 2.7.1 泰勒多项式与泰勒公式 / 105   | 习题 3.5 / 177                  |
| 2.7.2 常用函数的麦克劳林公式 / 108  | 3.6 反常积分 / 178                |
| 习题 2.7 / 112             | 3.6.1 无穷区间上的反常积分 / 179        |
| 2.8 利用导数研究函数的性态 / 113    | 3.6.2 无界函数的反常积分 / 181         |
| 2.8.1 函数的单调性 / 113       | 3.6.3 反常积分的收敛判别法 / 183        |
| 2.8.2 函数的极值 / 115        | 习题 3.6 / 185                  |
| 2.8.3 函数的最大值与最小值 / 116   | 复习题三 / 186                    |
| 2.8.4 函数的凸性与拐点 / 118     | 习题参考答案与提示 / 188               |
| 2.8.5 曲线的渐近线, 函数作图 / 120 | 第4章 微分方程 / 193                |
| 习题 2.8 / 121             | 4.1 微分方程的基本概念 / 194           |
| 2.9 平面曲线的曲率 / 123        | 习题 4.1 / 197                  |
| 2.9.1 弧微分 / 123          | 4.2 某些简单微分方程的初等积分法 / 197      |
| 2.9.2 曲率和曲率公式 / 124      | 4.2.1 一阶变量分离方程 / 197          |
| 习题 2.9 / 127             | 4.2.2 一阶线性微分方程 / 199          |
| 复习题二 / 127               | 4.2.3 利用变量代换求解微分方程 / 201      |
| 习题参考答案与提示 / 129          | 4.2.4 某些可降阶的高阶微分方程 / 204      |
| 第3章 一元函数积分学及其应用 / 133    | 习题 4.2 / 207                  |
| 3.1 定积分的概念、性质、可积准则 / 134 | 4.3 微分方程应用举例 / 208            |
| 3.1.1 定积分问题举例 / 134      | 习题 4.3 / 212                  |
| 3.1.2 定积分的概念 / 135       | 4.4 高阶线性方程 / 213              |
| 3.1.3 定积分的几何意义 / 137     | 4.4.1 线性微分方程通解的结构 / 213       |
| 3.1.4 可积准则 / 137         | 4.4.2 高阶常系数齐次线性微分方程的解法 / 216  |
| 3.1.5 定积分的性质 / 138       | 4.4.3 高阶常系数非齐次线性微分方程的解法 / 218 |
| 习题 3.1 / 142             | 4.4.4 变系数线性微分方程的解法 / 223      |
| 3.2 微积分基本定理 / 142        | 习题 4.4 / 226                  |
| 3.2.1 牛顿-莱布尼兹公式 / 143    | 复习题四 / 227                    |
| 3.2.2 原函数存在定理 / 144      | 习题参考答案与提示 / 229               |
| 习题 3.2 / 148             | 附录1 几种常见曲线 / 233              |
| 3.3 不定积分 / 148           | 附录2 汉英数学名词对照与索引 / 235         |
| 3.3.1 不定积分的概念及性质 / 148   | 附录3 希腊字母表 / 239               |
| 3.3.2 基本积分公式 / 150       | 主要参考书目 / 240                  |
| 3.3.3 积分法则 / 150         |                               |
| 习题 3.3 / 160             |                               |
| 3.4 定积分的计算 / 162         |                               |



# 第1章

## 函数、极限与连续

### FUNCTION, LIMIT AND CONTINUITY

函数是微积分的研究对象。函数概念形成于17世纪,随着科学技术的不断发展,人们对函数的认识也在不断地深化与发展。

极限是微积分的基本运算,极限方法是研究函数的主要工具,微积分包括微分学与积分学两大部分,它们的重要概念大都是用极限方法定义的。极限理论是整个微积分学的基础和“灵魂”。

连续性是函数的重要性质,它是大千世界广泛存在的渐变现象的客观反映和数学描述。连续函数在理论研究和实际应用中都占有重要地位,本课程研究的函数主要是连续函数。

在本章中,我们先介绍函数的概念,函数的特性,以及初等函数的概念。

极限是本章的重点,主要介绍函数概念,而把数列极限作为函数极限的特例来处理。这部分内容包括:极限概念,极限的性质与运算,两个应用广泛的重要极限,无穷小与无穷大概念,无穷小的性质及其应用。

本章的后一部分介绍函数连续性概念,函数的间断点及其分类。然后讨论连续函数的性质及初等函数的连续性。最后从几何上介绍闭区间上连续函数的一些重要性质。

## 1.1 函数

### 1.1.1 函数的概念

在科学实验、生产实践和日常生活中,经常会遇到各种各样的量,如质量、温度、压强、速度、时间、成本、利润等,它们的实际意义或性质可能千差万别,但从数量变与不变的角度来看,大致可以分为两类:一类量在过程中会发生变化,可以取不同的数值,这种量称为变量(variable);另一类量在过程中相对不发生变化,保持同一数值,这种量称为常量(constant)。通常用  $x, y, z, t$  等字母表示变量,用  $a, b, c, d$  等字母表示常量。

在同一过程中,往往有若干个变量,它们的变化并不是孤立进行的,而是相互依赖,相互制约,并遵循一定的规律,下面要介绍的函数概念其本质就是变量之间的这种规律或关系。

**【例 1】** 在初速度为零的自由落体运动中,下落距离  $h$  和时间  $t$  是两个变量,它们之间满足关系

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

其中  $g$  是重力加速度,若物体落地时刻为  $T$ ,则当  $t$  在闭区间  $[0, T]$  上任取一值时,按上式确定的规律,  $h$  就有一个确定的值与之对应。

**【例 2】** 图 1-1 是某地气象台用自动温度记录仪描绘的一天之内气温变化曲线。当时间  $t$  在闭区间  $[0, 24]$  上任取一值时,通过曲线就可得到该时刻的气温  $T$ 。

在上面两例中,都各有两个变量,它们之间的关系无论是用公式给出,还是用图形给出,都反映了两个变量之间一定的对应规律,即一个量的变化会引起另一个量的变化,当前者在其变化范围内任取一值时,后者

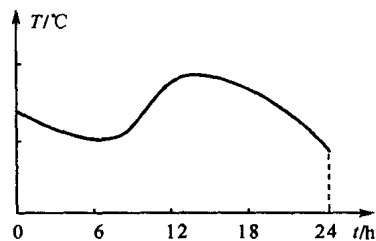


图 1-1

依对应规律就有确定的值与之对应,我们称这两个变量之间存在着函数(function)关系。

函数是最基本的一个数学概念,和许多重要的数学概念一样,人们对它的认识经历了由不全面到较全面,由不确切到较确切,由不严密到较严密的逐步深化过程。17 世纪由于天文、力学及航海事业的发展,在数学领域已经出现了一些具体函数,其中大部分是作为曲线研究的。随着科学技术的发展,新型的函数不断出现,数学先驱们也不断为函数下定义,但都受到时代的局限,直到 1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805 ~ 1859)才对函数给出了一个与现代十分接近的定义。到了 19 世纪后期,函数又被定义为两集合之间的对应关系,避免了意义不够明确的“变量”概念。进入 20 世纪,有人用“序偶”来定义函数,进一步克服了意义不够明确的“对应”概念,之后又有人对“序偶”作了进一步的明确。

考虑到本教材的使用对象是工科院校的学生,我们先按照狄利克雷的方式给出函数的定义,稍后再用集合映射的观点加以说明,这既与中学数学课的函数概念衔接,又足以

使读者正确理解微积分中的概念和理论。

**定义 1** 设有非空数集  $X$  和实数集  $\mathbf{R}$ ,  $f$  是一个确定的法则(或关系), 对于每个  $x \in X$ , 都有惟一的  $y \in \mathbf{R}$  与之相对应, 并且将与  $x$  对应的  $y$  记作  $y = f(x)$ , 则称  $f$  是定义在  $X$  上的一元函数(one-variable function), 简称为函数, 称  $x$  为自变量(independent variable),  $y$  为因变量(dependent variable)。

这里,  $f(x)$  称为当自变量为  $x$  时, 这个函数的函数值, 称  $x$  的取值范围  $X$  为函数  $f$  的定义域(domain of definition), 记作  $D(f)$ , 即  $D(f) = X$ , 当  $x$  遍取  $X$  中一切值, 函数值  $y = f(x)$  的变化范围称为函数  $f$  的值域(range of values),  $f$  的值域记作  $R(f)$ 。

需要说明的是,  $f$  表示由  $x(x \in X)$  产生  $y(y \in R(f))$  的对应规则, 而  $y$  或  $f(x)$  表示通过  $f$  在  $R(f)$  中与  $x$  对应的数值, 二者是有区别的。但是用  $y = f(x)$  表示一个函数时,  $f$  所代表的对应规则已完全确定, 因而习惯上也把  $y$  或  $f(x)$  称为自变量  $x$  的函数, 对应于  $x = x_0$  的函数值记作  $f(x_0)$ , 或  $y|_{x=x_0}$ 。函数记号  $f(x)$  是瑞士数学家欧拉(Euler, 1707 ~ 1783) 在 1734 年引进的, 当某一过程中涉及多个函数时, 不同的函数要用不同的字母表示, 如  $y = F(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = \varphi(x)$  等, 以示区别。

在函数定义中, 最重要的是定义域和对应法则, 给出一个函数时, 必须同时说明这两个要素。

如果函数关系是由一个公式表示的, 则约定函数的定义域是使公式有意义的一切实数组成的集合, 这样的定义域称为函数的自然定义域。例如  $y = \sqrt{x}$  的定义域  $D(f) = [0, +\infty)$ ;  $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+1}$  的定义域是  $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

如果函数是由实际问题确定的, 则其定义域要由问题本身的意义来确定。例如, 自由落体运动中, 物体下落的距离  $h$  是时间  $t$  的函数:  $h = \frac{1}{2}gt^2$ 。如果开始下落的时刻是  $t = 0$ , 落地时刻为  $T$ , 则这个函数的定义域为  $[0, T]$ 。若不考虑该问题的背景, 函数  $h = \frac{1}{2}gt^2$  的自然定义域则是  $(-\infty, +\infty)$ 。

本课程是在实数(real number) 范围内讨论, 由于实数集  $\mathbf{R}$  中的数和实数轴上的点是一一对应的, 因此除特别声明外, 数和点将不加区别。例如, 函数  $f(x)$  在数  $x = x_0$  处的函数值  $f(x_0)$  和在点  $x = x_0$  处的函数值  $f(x_0)$  是同一含义。

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $X$ , 对于任意取定的  $x \in X$ , 对应的函数值为  $y = f(x)$ , 从几何上看, 在平面直角坐标系中, 点集  $\{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$  称为函数  $y = f(x)$  的图形(graph)。一个函数的图形通常是一条曲线,  $y = f(x)$  也叫做这条曲线的方程, 函数图形简明直观, 使人能一眼看出函数变化的全貌。这样, 函数的一些性态可借助图形来研究, 而一些几何问题也常借助于函数来作理论探讨。

在数学发展的过程中, 形成了最简单的五类函数, 即幂函数(power function)、指数函数(exponential function)、对数函数(logarithm function)、三角函数(trigonometric function) 和反三角函数(inverse trigonometric function), 描述现实世界千变万化关系的函数常常由这几类函数和常数构成。因此, 把它们称为基本初等函数(basic elementary function)。它们的定义、性质和图形在中学已学过, 这里不再赘述。下面再举几个函数例

子,以加深理解。

**【例 3】** 常数函数  $y = 2$ 。它的定义域  $D(f) = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R(f) = \{2\}$ , 其图形如图 1-2 所示。

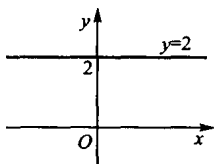


图 1-2

**【例 4】** 绝对值函数  $y = |x|$ 。

由绝对值定义可知

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

它的定义域  $D(f) = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R(f) = [0, +\infty)$ , 其图形如图 1-3 所示。

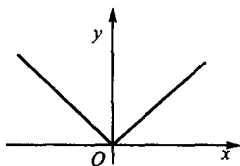


图 1-3

例 4 中出现的函数在自变量不同的取值范围内, 用不同的解析式表示, 这样的函数称为分段函数 (piecewise-defined function), 这种函数在工程技术中经常出现。注意, 分段函数表示的是一个函数, 而不是几个函数。

**【例 5】** 最大整数函数  $y = [x]$ 。符号  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 例如  $[-3] = -3$ ,  $[-1.5] = -2$ ,  $[0.3] = 0$ ,  $[1.7] = 1$ 。这个函数的定义域  $D(f) = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R(f) = \{\text{整数}\}$ , 其图形呈逐步升高的阶梯形 (图 1-4)。这类函数称为阶梯函数。

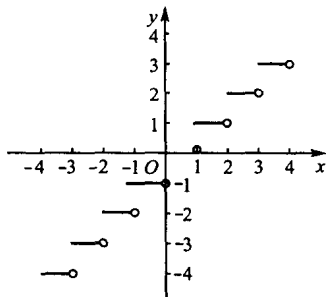


图 1-4

有许多实际问题可以用阶梯函数表示, 如长途电话收费和通话时间的函数关系, 出租汽车计价器显示的数字和行车里程的函数关系等。

**【例 6】** 根据个人所得税法规定, 个人月收入减去 800 元的余额部分为应纳税所得额。纳税所得额不超过 500 元的部分, 税率为 5%; 超过 500 元到 2000 元的部分, 税率为 10%; 超过 2000 元到 5000 元的部分, 税率为 15%。

据此规定, 可以写出月收入在 5800 元以下者月收入  $x$  元与应交纳个人所得税  $y$  (元) 之间的函数关系。

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 800 \\ (x - 800) \cdot \frac{5}{100}, & 800 < x \leq 1300 \\ 25 + (x - 1300) \cdot \frac{10}{100}, & 1300 < x \leq 2800 \\ 25 + 150 + (x - 2800) \cdot \frac{15}{100}, & 2800 < x \leq 5800 \end{cases}$$

### 1.1.2 函数的几种重要特性

#### 1. 有界性

设函数  $f(x)$  在数集  $X$  上有定义, 若存在某个确定的常数  $M > 0$ , 使得对一切  $x \in X$ , 都有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界 (bounded)。反之, 若对任意给定的正数  $M$  (无论  $M$  多么大), 总存在  $x_1 \in X$ , 使得  $|f(x_1)| > M$ , 则称  $f(x)$  在  $X$  上无界

(unbounded)。

函数的有界定义也可以这样表述:如果存在常数  $l$  和  $L$ , 使得对任一  $x \in X$ , 都有  $l < f(x) < L$ , 则称  $f(x)$  在  $X$  上有界, 并称  $l$  和  $L$  分别是  $f(x)$  在  $X$  上的一个下界和一个上界。

例如函数  $f(x) = \sin x$  在整个定义域  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 因为对任一  $x \in (-\infty, +\infty)$  均有  $|\sin x| \leq 1$ 。又如  $f(x) = \frac{1}{x}$  在开区间  $(0, 1)$  内只有下界, 而无上界, 因而无界。但  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $[1, 2]$  上却是有界的, 因为在  $[1, 2]$  上, 显然  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 。

## 2. 单调性

设函数  $f(x)$  在数集  $X$  上有定义, 若对  $X$  上的任意两点  $x_1 < x_2$ , 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (或  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在  $X$  上单调增加 (monotone increasing) (或单调减少 (monotone decreasing))。

如果上面不等式为严格不等式, 则称  $f(x)$  是严格单调增加的 (或严格单调减少的)。

单调增加函数的图形沿  $x$  轴的正向呈上升状, 单调减少函数的图形沿  $x$  轴的正向呈下降状。

例如, 正弦函数  $y = \sin x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内是单调增加的, 而在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内是单调减少的。当  $a > 1$  时, 指数函数  $y = a^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加。

## 3. 奇偶性

设函数  $f(x)$  的定义域  $X$  关于原点对称 (即若  $x \in X$ , 则必有  $-x \in X$ ), 若对任意的  $x \in X$ , 等式  $f(-x) = f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  为偶函数 (even function); 若对任意的  $x \in X$ , 等式  $f(-x) = -f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  为奇函数 (odd function)。

偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 奇函数的图形关于原点对称。例如  $y = x^2$ ,  $y = \cos x$  是偶函数;  $y = x^3$ ,  $y = \sin x$  是奇函数。而  $y = x^2 + \sin x$  既非偶函数, 也非奇函数。

## 4. 周期性

设函数  $f(x)$  的定义域是  $X$ , 若存在一个非零常数  $T$ , 使得对每个  $x \in X$ , 有  $x \pm T \in X$ , 且  $f(x \pm T) = f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数 (periodic function),  $T$  称为  $f(x)$  的周期。显然若  $T$  是周期, 则常数  $nT$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 都是  $f(x)$  的周期。通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期。如  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  是周期为  $2\pi$  的周期函数,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  是周期为  $\pi$  的周期函数。

需要指出的是, 并不是每个周期函数都有最小正周期。例如狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

容易验证, 任意正的有理数都是它的周期, 但是不存在最小正周期。

## 1.1.3 复合函数与反函数

复合函数与反函数是经常遇到的函数形式。

【例 7】某金属球的体积  $V$  是其半径  $r$  的函数:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。由于热胀冷缩, 球的半径

又随着温度  $T$  变化, 设  $r$  随  $T$  的变化规律是  $r = r_0(1 + 0.017T)$ , 其中  $r_0$  是常数。将  $r = r_0(1 + 0.017T)$  代入  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , 就得到体积  $V$  与温度  $T$  之间的函数关系

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1 + 0.017T)^3$$

像这样把一个函数代入另一个函数而得到的函数, 称为由这两个函数构成的复合函数。

**定义 2** 设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D(f)$ , 值域为  $R(f)$ ; 函数  $u = g(x)$  的定义域为  $D(g)$ , 值域为  $R(g) \subseteq D(f)$ , 则对任意的  $x \in D(g)$ , 通过  $u = g(x)$  有惟一的  $u \in R(g) \subseteq D(f)$ , 再通过  $y = f(u)$  又有惟一的  $y \in R(f)$ 。这样, 对任意的  $x \in D(g)$ , 通过  $u$  有惟一的  $y \in R(f)$  与之对应, 因此  $y$  是  $x$  的函数, 我们称这个函数为  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  的复合函数(compound function), 记作

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(g)$$

并称  $u$  为中间变量,  $u = g(x)$  为中间函数。

复合函数不仅可以由两个函数复合得到, 也可由更多的函数复合而成。例如函数  $y = \sqrt{1 + \lg(2 + \cos \sqrt{x})}$  是由四个简单函数  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = 1 + \lg v$ ,  $v = 2 + \cos w$ ,  $w = \sqrt{x}$  复合而成的。

应该注意的是, 并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如  $y = \arcsin u$  与  $u = 2 + x^2$  就不能复合, 因为对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$  对应的  $u$ , 都不能使  $y = \arcsin u$  有意义。 $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  能否复合, 关键在于是否满足定义中的  $R(g) \subseteq D(f)$ 。

**【例 8】** 函数  $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$  可以看做由  $y = \arcsin u$  和  $u = \frac{x-1}{2}$  复合而成的。

由于  $y = \arcsin u$  的定义域是  $[-1, 1]$ , 所以要求

$$|u| = \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1, \quad \text{即 } -1 \leq x \leq 3$$

由此可知  $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$  的定义域是  $[-1, 3]$ 。

本例说明, 经复合后的函数, 其自然定义域未必是中间函数的自然定义域。

研究任何事物, 往往要从正反两个方面来研究, 函数  $y = f(x)$  反映了当自变量  $x$  变化时, 因变量  $y$  随之变化的规律, 有时根据需要, 则要反过来研究  $x$  随着  $y$  变化的规律, 这就产生了反函数概念。

例如一物体从距地面高  $H$  处自由落下, 下落距离与时间  $t$  的函数关系是

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0, \sqrt{\frac{2H}{g}}]$$

• 如果研究物体下落不同距离所用的时间, 则有

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad h \in [0, H]$$

这是一个以  $h$  为自变量,  $t$  为因变量的函数。像这样交换了自变量与因变量位置的函数  $t =$

$\sqrt{\frac{2h}{g}}$ , 称为  $h = \frac{1}{2}gt^2$  的反函数。

**定义3** 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D(f)$ , 值域为  $R(f)$ , 如果对每一个  $y \in R(f)$ , 都有惟一的  $x \in D(f)$ , 使  $y = f(x)$ , 则说  $x$  也是  $y$  的函数, 我们将这个函数记作  $x = f^{-1}(y)$ , 并把它称为函数  $y = f(x)$  的反函数(inverse function), 而  $y = f(x)$  则称为反函数  $x = f^{-1}(y)$  的直接函数。显然  $y = f(x)$  与  $x = f^{-1}(y)$  互为反函数。

在定义中, 反函数的自变量用  $y$  表示, 因变量用  $x$  表示, 这与用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示因变量的习惯不符。因而, 一般把反函数  $x = f^{-1}(y)$  写作  $y = f^{-1}(x)$ , 字母的改变并没改变该函数的定义域和对应法则, 当然可以说  $y = f(x)$  的反函数就是  $y = f^{-1}(x)$ 。例如由  $y = 10^x$  得  $x = \lg y$ , 于是得到  $y = 10^x$  的反函数  $y = \lg x$ 。

容易证明, 在同一平面直角坐标系中,  $y = f^{-1}(x)$  和  $y = f(x)$  的图形关于直线  $y = x$  对称。图 1-5 描绘的是指数函数  $y = 10^x$  和它的反函数, 即对数函数  $y = \lg x$  的图形。

但是, 并不是所有的函数都存在反函数。可以证明, 如果  $y = f(x)$  是严格单调增加(或严格单调减少)的函数, 则它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  就一定存在, 并且也是严格单调增加(或严格单调减少)。

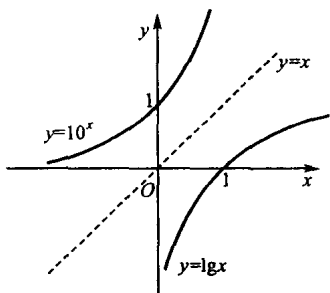


图 1-5

#### 1.1.4 映射

映射是数学中一个重要的基本概念, 它是函数概念的直接推广。

**定义4** 设  $X, Y$  是两个非空集合, 若存在一个对应关系  $f$ , 使得  $X$  中的每个元素  $x$ , 通过  $f$  在  $Y$  中有惟一的元素  $y$  与之对应, 则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的一个映射(mapping), 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

或

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in X$$

并称  $y$  是  $x$  在映射  $f$  下的像,  $x$  称为  $y$  在映射  $f$  下的原像。集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域或定义集合, 而  $f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subseteq Y$  称为映射  $f$  的值域或  $f$  的像集。

用映射的术语可得, 设数集  $X \subseteq R$ , 则  $X$  到  $R$  的任一映射  $f$  称为定义在  $X$  上的函数, 即函数是映射的特例, 曲线  $y = f(x)$  也称函数  $y = f(x)$  的图像。

设有映射  $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z$ , 于是有

$$x \in X \xrightarrow{g} y = g(x) \in Y \xrightarrow{f} z = f(y) = f(g(x)) \in Z$$

这样对每个  $x \in X$ , 经过  $y \in Y$ , 有惟一的  $z \in Z$  与之对应, 于是又产生了一个从  $X$  到  $Z$  的新映射, 把它记作  $f \circ g: X \rightarrow Z$ , 即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in X$$

我们称  $f \circ g$  为由  $f$  与  $g$  构成的复合映射(composite mapping)。

显然, 复合函数是复合映射的特例。

设有映射  $f: X \rightarrow Y$ , 若  $Y = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ , 则称  $f$  为满射(surjection), 即  $Y$

中的任一元素均是  $X$  中某元素的像,若  $f$  将  $X$  中不同的元素映射到  $Y$  中的像也不同,即若  $x_1, x_2 \in X$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 这时称  $f$  是单射(injection)。若  $f$  既是满射又是单射, 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的一个双射(bijection) 或一一映射(one-to-one mapping)。若  $X$  和  $Y$  之间存在着——映射, 则称  $X$  和  $Y$  是一一对应的, 记作  $X \sim Y$ 。

**【例 9】** 设  $A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}, B = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ , 令

$$f: n \mapsto 2n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

映射  $f$  既是单射, 也是满射, 因而是一一映射。这里有个有趣的现象,  $B$  是  $A$  的真子集, 直观看上去,  $B$  中的数比  $A$  中的数要“少得多”, 但  $B$  和  $A$  却又是一一对应的。

设映射  $f$  是  $X$  到  $Y$  的一一映射, 由定义知, 对每个  $y \in Y$ , 有惟一的  $x \in X$ , 满足  $f(x) = y$ , 从而可得到一个映射, 它将每个  $y \in Y$  映射为  $X$  中的元素  $x$ , 且  $x$  满足  $f(x) = y$ 。我们称这个映射为  $f$  的逆映射(inverse mapping), 记作  $f^{-1}$ 。

可见, 反函数是逆映射的特例。

### 1.1.5 初等函数与非初等函数

在微积分学中, 定量描述各种运动变化的函数, 大都是由基本初等函数和常数经过四则运算、函数复合及分析运算构成的。

函数四则运算指的是: 如果函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均在数集  $X$  上有定义, 则通过代数四则运算  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  可得到新的函数。这里当函数相除时, 需在  $X$  中去除分母函数  $g(x)$  的零点, 即  $x \in X$ , 且  $g(x) \neq 0$ 。

由常数和基本初等函数, 即幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数, 经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并且可以用一个算式表示的函数, 称为初等函数(elementary function)。

例如  $y = \lg \sin^2 x, y = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{\tan x}}, y = 2^{\arctan \frac{x}{2}}$  等, 都是初等函数。

在微积分学中大量出现的是初等函数, 但也会遇到一些非初等函数, 常见的非初等函数有分段函数、隐函数、用参数方程确定的函数以及用极坐标方程确定的函数等。

**【例 10】**  $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ , 这是电子技术中常用到的“单位阶跃函数”, 是一个非初等函数。

**【例 11】** 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 值域为  $\{-1, 0, 1\}$ , 其图形如图 1-6 所示。

$\operatorname{sgn} x$  是表征  $x$  正负的特征函数, 对任何  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $|x| = x \operatorname{sgn} x$  或  $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 。常见的绝对值函数实际上都是分段函数, 即  $|f(x)| = f(x) \operatorname{sgn} f(x)$ 。因而在实际演算或推理时, 若遇到绝对值函数, 我们常将其分解为分段函数的形式。

**【例 12】** 对于每一个实数  $t$ , 考虑方程  $2^x = tx + 2$ 。



观察函数  $y = 2^x$  与  $y = tx + 2$  的图形(图 1-7)可以发现, 当  $t \leq 0$  时, 这两条曲线有惟一交点, 用  $(x_t, y_t)$  表示这个交点, 则交点的横坐标  $x_t$  就是方程  $2^x = tx + 2$  的惟一解。当  $t$  在  $(-\infty, 0]$  中任意变化时,  $x_t$  也随之变化, 于是由此确定了一个函数关系  $x_t = f(x)$ 。虽然这个函数不能用初等函数表示, 但是  $x_t$  对  $t$  的依赖关系是客观存在的, 这个函数关系是由方程  $2^x = tx + 2$  确定的。

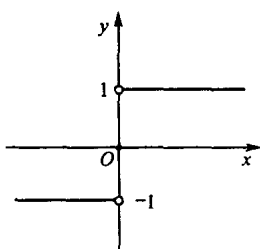


图 1-6

在函数关系中, 如果因变量  $y$  能用自变量的算式明显地表示出来, 如  $y = x^2 + \cos x$ ,  $y = \lg(x-5) + 2^{\frac{1}{x}}$  等, 这种函数称为显函数。有时因变量  $y$  与自变量  $x$  的对应关系是由一个方程  $F(x, y) = 0$  ( $F(x, y)$  为变量  $x$  和  $y$  的一个算式) 确定时, 即在一定条件下, 当  $x$  在某一区间内取定任何一值时, 相应地总有满足方程的惟一  $y$  值存在, 这时称方程  $F(x, y) = 0$  在该区间内确定了一个  $y$  关于  $x$  的隐函数 (implicit function)。

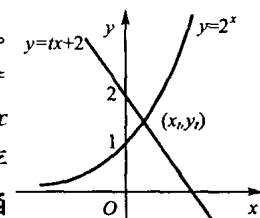


图 1-7

**【例 13】** 设半径为  $a$  的动圆在  $x$  轴无滑动地滚动, 圆周上一定点的轨迹称为摆线(图 1-8)。该曲线确定了  $x$  与  $y$  之间的某种函数关系, 但我们不能用初等函数将其表示, 也很难用一个方程  $F(x, y) = 0$  描述这个函数关系, 但却可用一个参数方程容易地表示出  $x$  与  $y$  的函数关系。摆线的参数方程是

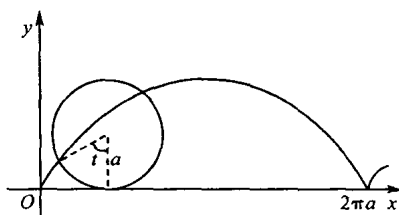


图 1-8

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

一般地, 若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定  $y$  与  $x$  之间的函数关系, 则称此函数是由参数方程所确定的函数。

以后掌握了积分和级数工具后, 还会看到一些很有用的非初等函数。

## 习题 1.1

1. 求下列各函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x-1};$$

$$(2) y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$$

$$(3) y = \arcsin \frac{x-2}{3};$$

$$(4) y = \sqrt{\cos x - 1}$$

2. 设  $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$  求  $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi(-2)$ , 并作出  $\varphi(x)$  的图形。