郑世勇 张耀先 夏继福 主编
王广君 张合保 副主编

大学物理实验

DAXUE

WULISHIYAN

黄河水利出版社

大学物理实验

郑世勇　张耀先　夏继福　主　编
王广君　张合保　　　　　副主编

黄河水利出版社

内容提要

本书是根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，在郑州防空兵学院《大学物理实验》教材的基础上改编而成的。全书包括绪论、误差理论和数据处理方法、物理实验基础知识、力学实验、热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理实验及设计性实验。共分八章，实验内容33个。

本书可作为高等师范院校、工科院校的实验教材，也可供电视大学、业余大学、职工大学等师生选用及参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/郑世勇，张耀先，夏继福主编．—郑州：黄河水利出版社，2001.10

ISBN 7-80621-394-5

Ⅰ.大… Ⅱ.①郑…②张…③夏… Ⅲ.物理-实验-高等学校-教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第061343号

出版社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路11号　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话及传真：0371-6022620

E-mail：yrcp@public2.zz.ha.cn

承印单位：黄委会设计院印刷厂

开本：787mm×1 092mm　1/16

印张：12

字数：277.3千字　　印数：1-4 000

版次：2001年10月第1版　　印次：2001年10月第1次印刷

书号：ISBN 7-80621-394-5/O·8　定价：20.00元

前 言

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》,结合我们开展物理实验课教学的实践经验,参阅及借鉴部分兄弟院校同类教材中的精华编写而成的。

物理实验对培养学生的科学素养及创新能力,具有重要的作用。多年来,我们一直致力于物理实验教改的探索,力图通过我们的努力,为国家和军队培养高素质人材作出应有的贡献。本书的编写是我们所做教改工作的一部分。

全书共分八章。前三章介绍了物理实验课的基础性知识,包括误差理论及数据处理方法、物理实验课常用仪器及实验方法。考虑到实验方法对科研活动有着重要的作用,本书改变以往教材的传统做法,集中介绍,以彰显其重要性。此外,本书为适应培养新时期复合型人才的需要,努力实现本门课程由知识教育向素质教育的转化,特别增加了设计性实验(第八章),旨在培养学生的创新能力和提高学生的综合素质。其余第四、五、六、七章按力学实验、热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理实验排序,内容由浅入深,循序渐进。本书的最后还列举了16个附表,供查阅。

本书由郑州防空兵学院的郑世勇、张耀先、夏继福主编,王广君、张合保副主编,参加编写的还有周健、苏政、龚国安、刘玉强、张纯亮等。

在本书的编写过程中,我们学习和参考了兄弟院校部分物理实验教材及本院物理教研室以往的讲义,谨在此向有关作者致谢。

由于编者水平有限,经验不足,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

2001年6月

目　录

第一章　绪　论

第一节　物理实验课的地位和作用

物理学从本质上说是一门实验科学。物理学的研究方法，通常是在观察和实验的基础上，对物理现象进行分析、抽象和概括，揭示物理现象的本质，建立物理定律，形成物理理论，再回到实验中接受检验。

在研究物理现象时，实验的任务不仅是观察物理现象，更重要的是找出物理量之间的数量关系，找出它们变化的规律。任何一个物理定律的确定，都必须依据大量的实验资料。即使已经确定的物理定律，如果出现了新的实验事实与其相违背，那么便需要修正原有的物理定律或物理理论。因此，我们说物理实验是物理理论的基础，是物理理论正确与否的试金石。

对于军事指挥院校大专以上的各类专业，物理实验课是一门必修课程，它是学员进入大学后接受系统实验技能训练的开端，并为学习后续专业基础课和专业课打好基础；尤其是对培养高素质和具备自我生长型军事人才，物理实验课具有重要的作用。物理实验课的主要任务是：

(1)学习物理实验的基本理论，包括一些典型的实验方法及其物理思想。例如电磁学实验中的模拟法、伏安法、电桥法、补偿法、示波法等，以有助于思维与创造能力的培养。

(2)使学生获得必要的实验知识和操作技能的训练，培养学生初步具有科学实验基本素养，即能正确使用仪器、进行测量、处理实验数据、分析和总结实验结果及写实验报告等。

(3)培养学生实事求是的科学态度，严肃认真的工作作风，爱护国家财产、遵守纪律的优良品质，善于动脑、乐于动手、讲究科学方法的科学习惯。

总之，教学重点应放在培养学生分析问题与解决问题能力和提高学生科学实验素养方面，使学生在获取知识的自学能力、运用知识的综合分析能力、动手实践能力、设计创新能力以及严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度方面，得到训练与提高。

第二节　物理实验课的基本程序

我们所做的物理实验，多数是测定某一物理量或研究某一物理量随另一物理量的变化规律。无论实验内容如何，物理实验课的基本程序大都相同，基本分为如下三个阶段。

一、实验前的预习

由于实验课的时间有限，而熟悉仪器和测量数据的任务一般都比较重，不允许在实验课内才开始研究实验原理。因此，为了在规定时间内高质量地完成实验的内容，学生必须做好实验前的预习。

实验预习要求做到：以理解实验原理为主，大致了解实验的步骤和方法，以便能抓住实验的关键，能较好地控制实验的物理过程或物理现象，及时、迅速、准确地获得待测物理量的数据。为使测量数据眉目清楚，防止漏测数据，预习时要求写好预习报告。预习报告的内容包括：实验名称、实验目的、使用哪些仪器、实验原理（包括简要论述及公式的推导）、简要实验内容，最后要画好记录数据的表格。

二、进行实验

在进行实验之前，首先要认真听取老师的简要讲解和提示，然后熟悉所使用仪器的性能、工作原理与使用方法，并将这些仪器的型号、分度值、量程以及仪器的编号等记录在预习报告的“仪器”栏内；将仪器调整好，便可动手实验。

实验过程中要遵守仪器操作规程和实验规则，细心操作，认真观察和思考所发生的各种现象，及时做好数据记录，不允许实验后追记或拼凑实验数据，一定要有实事求是的科学态度。如果感到测量数据有问题，不能轻易抹掉原始记录，应尽可能分析出原始数据出错的原因，然后决定是否重测。重测的数据要附在原始数据之后，并在原始数据上画一细横线表示剔除。记录实验数据一定要根据仪器的分度值或仪器准确度所确定的有效位数来确定数据的位数，不可任意取舍。

要爱护仪器，注意安全。如果实验中遇到自己不能处理的问题，如仪器失灵等，应及时报告教师，不允许擅自拆卸。

实验结束时，要将所测得的实验数据和仪器使用情况登记交给教师审查签名，然后整理好仪器，经教师允许后方可离开实验室。

三、写实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，要求文字通顺，字迹端正，图表规矩，结果正确，做思考题和讨论认真。完整的实验报告应含以下各项内容：

(1)实验名称；

(2)实验目的；

(3)所使用的仪器设备；

(4)简要实验原理及计算公式的推导；

(5)实验数据记录表；

(6)数据的计算及结果的图示；

(7)误差计算及分析；

(8)实验结果；

(9)讨论。

其中，前五项内容在预习报告时已基本写好，后四项是在实验过程中或在实验之后要完成的，现就最后三项内容做简要说明。

（一）对误差的计算及分析

对误差的计算及分析包括：

(1)确定实验结果的误差范围；

(2)找出影响实验结果的主要因素，分析产生误差的原因及减少误差可采取的措施。

（二）实验结果

实验结果包括：待测量的最终测得值 $\bar{N}$，及其绝对误差 ΔN 和相对误差 E，并表示成"$N=(\bar{N}\pm\Delta N)$(单位)"的形式。若是观察某一物理现象或验证某一物理规律，报告中还要写出实验的结论。

（三）讨论

内容包括：回答实验思考题；实验中观察到的异常现象及可能的解释；对实验方法或实验装置改进的建议；实验中的心得体会等。除思考题外，其他讨论则根据实际的需要，有则写，无则不写。

第二章　误差理论及数据处理方法

第一节　测量与误差

一、测量与误差的基本概念

进行物理实验时，不仅要定性地观察物理变化的过程，而且还要定量测量物理量的大小及其变化程度。为了进行测量，必须规定一些标准单位，如选定质量的单位为千克，长度的单位为米，时间的单位为秒，电流的单位为安培等。测量就是将待测的物理量与这些被选作标准单位的物理量进行比较，其倍数即为待测物理量的测量值。这种比较过程，称为测量。一般的量具和仪表都是按标准单位的倍数刻度的，以便直接读出待测量的数值。像这样可以用量具或仪表直接读出测量值的测量，称为直接测量，相应的物理量称为直接测量量。例如，用米尺测量物体的长度为 0.510 0m；用秒表测量三线摆扭动的周期为 1.05s 等。但是，大多数物理量不能直接用仪表或量具进行测量，只能用间接方法进行测量。例如，测量某圆柱体的密度时，我们用米尺测出它的外径 d 和高度 h，用天平称出它的质量 m，然后利用密度公式：$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}$ 算出其密度值。像这样一类把直接测量量代入公式计算出测量值的测量，称为间接测量，相应的被测物理量为间接测量量。

任何物体都具有某些物理特性，而反映这些物理特性的各个物理量所具有的客观真实数值，称为该物理量的真值。测量的目的，就是要力图得到真值。尽管任何物理量的真值都是客观存在的，但在测量时由于受到仪器精度、测量方法、人的视觉能力以及周围环境等条件的限制，使得测量值总是与真值存在着差异，而只能是真值的近似值。这就是说，任何测量都存在着一定的误差，误差即测量值与真值之差。

二、误差的分类

误差产生的原因是多方面的，按其产生的原因和性质的不同，可分为系统误差、偶然误差和过失误差三类。其中，过失误差是由于实验者粗心大意、未按操作规程调整好仪器、看错或记错仪器上的数字，以及计算错误等引起的。很显然，只要实验者实验时严肃认真、耐心细致，严格遵守操作规程，这类误差是完全可以避免的。因此，下面只对前两类误差稍作详细说明。

（一）系统误差

系统误差的特点是：在测量过程中测量值与真值的偏差总是向着某一个方向偏离，或

者都偏大,或者都偏小,其偏离数值恒定或按一定规律变化。

引起系统误差的原因有以下几个方面:

(1)仪器误差。由于仪器本身制造或校准不够完善,或没有将仪器调整到正确的使用状态等引起的误差。例如,千分尺零点没有校正,气垫导轨没有调到水平,分光计的转动轴线与其刻度盘的中心轴未调到重合等原因所引起的读数误差。

(2)方法误差。方法误差又称为理论误差,它是由于测量所依据的理论公式本身的近似性,或是公式中没有考虑到某种实际上已影响到测量结果的因素所致。例如,用单摆测量重力加速度的理论公式是在摆动角 θ 近似为零,小球体积 V 也近似为零的条件下的近似公式,实际测量时的条件是 $\theta\neq 0$、$V\neq 0$,因而产生了方法误差。

(3)环境误差。这是由于某些环境因素与仪器要求的工作环境不一致而引起的。例如,电磁式仪表旁有强磁场存在;环境温度超过标准电池的允许范围等情况。

由于系统误差具有稳定性,因而不能用多次测量的办法使它减少或消除,但只要我们找出产生系统误差的原因,就可以采取相应的措施来减少或消除系统误差,一般是在实验之前或实验过程中,要仔细分析各种可能产生系统误差的因素,并针对这些可能因素采取必要的消除措施(如对仪器示值不准时引人修正值;对理论公式或对测量结果进行修正等)。否则,应在实验完后对系统误差的大小作出估算。

(二)偶然误差

偶然误差是由于一些不固定的或偶然的因素所引起的,如:人的感官对于微小量分辨的差异;仪器本身的物理因素引起的不稳定(如灵敏电流计零点漂移);或由于环境的起伏变化等因素。即使在相同的条件下对同一物理量作多次测量,由于上述偶然因素的影响,其测量值相对于真值也呈现出无规则的变化,时大时小、时正时负,其偏离的大小和方向似乎没有什么规律。但是,当进行大量次数的测量时,这种偶然误差是服从一定统计规律的。大量实验证明,偶然误差服从高斯分布规律,具有以下特征:

(1)在多次实验中,绝对值相同的正误差与负误差出现的几率相等。

(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的几率要大;绝对值很大的误差出现的几率却极小,几乎为零。

从理论上讲,当测量次数趋于无穷时,其偶然误差中正负误差的总和互相抵消,因面多次测量值的算术平均值就趋于真值。这就是说,增加测量次数可以减少偶然误差,但不能完全消除它。

(三)正确度、精密度和精确度

正确度、精密度和精确度,是评价测量结果好坏的3个术语。

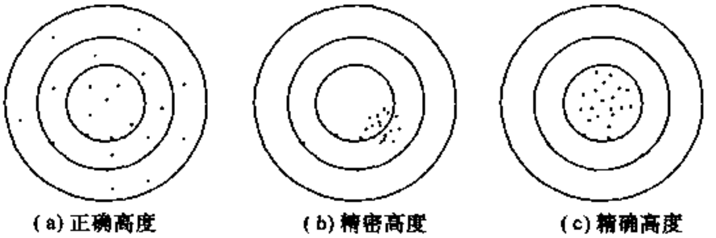
测量结果的正确度,是指测量值与真值接近的程度。正确度高,说明测量值接近真值的程度好,即系统误差小。所以,正确度是反映测量结果系统误差大小的术语,参见图2-1(a)所示。

精密度,是指重复测量所得结果相互接近的程度。精密度高,说明重复性好,多次测量误差的分布密集,即偶然误差小。所以,精密度反映了测量结果偶然误差的大小,参见图2-1(b)所示。

精确度,是指综合评定测量结果重复性与接近真值的程度。精确度高,说明精密度和

正确度都高。所以，精确度反映偶然误差和系统误差的综合效果，参见图 2-1(c)。

为了更好地理解这 3 个术语，可把射击打靶的结果与某次测量的结果进行类比，如图 2-1。



(a) 正确高度　　(b) 精密高度　　(c) 精确高度

图 2-1　射击打靶与测量的类比

由于系统误差产生的原因是可知的，因此在实验时，总要采用相应的方法和措施，尽可能地消除或减小系统误差，误差的计算主要是估算偶然误差。因此，在以后讨论中，都假定系统误差已被消除或修正，只讨论偶然误差，也不再严格区分精密度和精确度，而泛称为精度。

第二节　偶然误差的估算

一、多次直接测量结果及误差估算

(一)算术平均值

为了减少测量的偶然误差，取得测量的最佳值，人们总是在可能的条件下多次重复测量，然后取多次测量值的算术平均值作为测量量的最终结果。例如，我们对物理量 A 进行 n 次测量所得的数值分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则 A 的算术平均值为

$$\bar{A} = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (2-1)$$

按照误差的统计规律，其算术平均值最接近于该物理量的真值，所以称它为最佳值。当 $n \to \infty$ 时，算术平均值的极限就是它的真值，即

$$\lim_{n\to\infty} \bar{A} = A$$

在实际测量中，测量次数不可能取得太多，一般 n 取 10 次时，其算术平均值与真值的接近程度已基本达到要求。

(二)测量误差的估算

如上所述，由于各种偶然因素的影响，使每次测量值与真值之间都有误差存在，即

$$\Delta A_i = A_i - A \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因而，各次测量值不尽相同，它们便构成一个离散的数列。其离散的程度往往与所用仪器的精度、实验者的技能等因素有关。通常用算术平均误差和均方根误差来描述测量的离散程度，它们的定义分别是：

若以 ΔA 表示算术平均误差，则

$$\Delta A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A_i-A|\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta A_i| \tag{2-2}$$

均方根误差也叫标准误差,常用 σ 表示

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_i-A)^2} \tag{2-3}$$

上述两种误差均称为测量量的绝对误差,它们都表示测量的精确程度。绝对误差越小,则测量值靠近真值的程度越高,表示测量的精度越高。

在有限次测量中,由于不可能得到待测量的真值,常常必须用算术平均值代替真值来估算测量误差。然而,这种取代必然引起计算结果的偏差。根据误差理论,必须对式(2-2)和式(2-3)作如下修正,才能得到正确的计算结果,即

$$\Delta A\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta A_i|=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|A_i-\bar{A}| \tag{2-4}$$

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(A_i-A)^2}{n}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(A_i-\bar{A})^2}{n-1}} \tag{2-5}$$

这两种误差定义所得的数值必不相同。由于均方根误差对数据离散程度反应更为灵敏等原因,因而在科学计量中都用它作为偶然误差的量度,这也是它被称为标准误差的原因。但是,计算起来,均方根误差要比算术平均误差复杂得多。在大学物理实验中,主要以掌握误差的估算和分析方法为目标,一般情况下利用算术平均误差进行分析和计算就可以了。

测量中不仅要估算绝对误差,还要估算测量量的相对误差。相对误差是指绝对误差与平均值的比值,常用百分数表示:

$$E_r=\frac{\Delta\bar{A}}{\bar{A}}\times100\% \tag{2-6}$$

对不同物理量的测量进行比较时,相对误差比绝对误差更能确切地表示出测量的精确度。例如,测量两个不同物体的长度分别为 $\bar{L}_1=100.0\text{cm}$,$\bar{L}_2=10.0\text{cm}$,若它们的绝对误差均为 0.1cm,则它们的相对误差分别为

$$E_{r1}=\frac{\Delta L_1}{\bar{L}_1}\times100\%=0.1\%$$

$$E_{r2}=\frac{\Delta L_2}{\bar{L}_2}\times100\%=1\%$$

究竟对哪个物体的测量较为精确呢?显然,用绝对误差是不能说明的,但用相对误差表示,立即看出前者的精确程度明显高于后者。

如果待测量有理论值或公认值 A',也可用百分差来表示测量结果的好坏,即

$$E_{百}=\frac{|A-A'|}{A'}\times100\%$$

(三)测量结果的表示

测量的最后结果中,除了要表示出测量量的数值之外,还要表示出测量误差的大小,并以如下形式表示:

$$A=(\bar{A}\pm\Delta A)(\text{单位})\text{或 }A=(A\pm\sigma)(\text{单位}) \tag{2-7}$$

式(2-7)称为测量结果表达式,它表示测量值主要分布在$(\bar{A}+\Delta A)\sim(\bar{A}-\Delta A)$或在$(\bar{A}+\sigma)\sim(\bar{A}-\sigma)$这一数值区间内。式中所采用的误差类别不同,测量值在区间内的分布概率亦不同。根据理论计算,若采用算术平均误差时,其分布概率为57.62%;若采用均方根误差时,则分布概率为68.3%。当然,不排除多次测量中有部分测量值超出这一区间的情况,但它们毕竟是少数,而且,距离该区间越远,测量值出现的可能性越少。由此可见,测量结果表达式是在标定的区间上给出了测量数据的可信度,不能简单地将它理解为A只取$(\bar{A}+\Delta A)$或$(\bar{A}-\Delta A)$两种值。

例1 对某物体的长度测量6次,其读数如表2-1,试计算测量的结果。

表2-1 对某物体长度6次测量记录

测量次数 n	1	2	3	4	5	6
A_i(cm)	5.42	5.44	5.42	5.43	5.45	5.42
$\lvert\Delta A_i\rvert=\lvert A_i-\bar{A}\rvert$ cm	0.01	0.01	0.01	0.00	0.02	0.01

解:

算术平均值为

$$\begin{aligned}\bar{A}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i=\frac{1}{6}(5.42+5.44+5.42+5.43+5.45+5.42)\\&=5.43(\text{cm})\end{aligned}$$

算术平均误差为

$$\begin{aligned}\Delta A&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lvert\sum\Delta A_i\rvert=\frac{1}{5}(\lvert 5.42-5.43\rvert+\lvert 5.44-5.43\rvert+\lvert 5.42-5.43\rvert+\\&\qquad\lvert 5.43-5.43\rvert+\lvert 5.45-5.43\rvert+\lvert 5.42-5.43\rvert)\\&=\frac{1}{5}(0.01+0.01+0.01+0.00+0.02+0.01)=0.012(\text{cm})\end{aligned}$$

标准误差为

$$\begin{aligned}\sigma&=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}A_i^2}=\sqrt{\frac{1}{5}(0.01^2+0.01^2+0.01^2+0.00^2+0.02^2+0.01^2)}\\&=\sqrt{\frac{0.0008}{5}}\\&=0.013(\text{cm})\end{aligned}$$

其相对误差为

$$E_r=\frac{\Delta A}{\bar{A}}\times 100\%=\frac{0.012}{5.43}\times 100\%=0.22\%$$

或为

$$E_r=\frac{\sigma}{\bar{A}}\times 100\%=\frac{0.013}{5.43}\times 100\%=0.24\%$$

测量结果为

$$A=\bar{A}\pm\Delta A=(5.430\pm 0.012)\text{cm 或 }A=\bar{A}\pm\sigma=(5.430\pm 0.013)\text{cm}$$

二、单次直接测量误差的估算

在实际测量中,常因条件不允许而不能重复测量,或因其偶然误差远小于仪器的最小

刻度而无必要进行重复测量，这些情况下，只需进行一次测量即可。单次测量当然也存在偶然误差，估算单次测量误差的方法一般是由仪器上注明的精度确定，有些仪器没有注明精度，其测量误差以其最小刻度（分度值）的一半来估算。

三、间接测量的平均值及误差估算

（一）误差传递的一般公式

设间接测量 N 是 $A,B,C,\cdots,H$ 的函数，即 $N=f(A,B,C,\cdots,H)$。$A,B,C,\cdots,H$ 都是相互独立的，若各直接测量值的绝对误差分别为 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$，则间接测量值 N 的绝对误差为 ΔN，其算法如下：

对 N 求全微分，得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial f}{\partial B}\mathrm{d}B+\frac{\partial f}{\partial C}\mathrm{d}C+\cdots+\frac{\partial f}{\partial H}\mathrm{d}H \tag{2-8}$$

由于 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 分别相对于 $A,B,C,\cdots,H$ 是一个很小的量，将式(2-8)中的 $\mathrm{d}A,\mathrm{d}B,\mathrm{d}C,\cdots,\mathrm{d}H$ 用 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 代替，则

$$\Delta N=\frac{\partial f}{\partial A}\Delta A+\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B+\cdots+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H \tag{2-9}$$

由于式(2-9)右端各项分误差的符号可正可负，考虑到各项误差符号相同时而出现最大误差的情况，因此，将上式右端各项分别取绝对值相加，即

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\cdot\Delta A+\left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\cdot\Delta B+\left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|\cdot\Delta C+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial H}\right|\cdot\Delta H \tag{2-10}$$

可以推证，间接测量的相对误差是先对 $N=f(A,B,C,\cdots,H)$ 取自然对数，然后求其全微分而得

$$E_r=\frac{\Delta N}{\overline{N}}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial A}\right|\cdot\Delta A+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial B}\right|\cdot\Delta B+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial C}\right|\cdot\Delta C+\cdots+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial H}\right|\cdot\Delta H \tag{2-11}$$

式(2-11)中的 $\overline{N}=f(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\cdots,\bar{H})$。式(2-10)和式(2-11)称为误差传递的一般公式，或称为误差的算术合成。根据以上两式计算出来的常用误差传递公式，列在表2-2中，供参考。

表2-2　几种常用的误差传递公式

函数关系	误差的一般传递公式	标准误差传递公式
$N=A+B$ 或 $N=A-B$	$\Delta N=\Delta A+\Delta B$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2}$
$N=A\cdot B$ 或 $N=\frac{A}{B}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2+\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$
$N=k\cdot A$	$\Delta N=k\cdot\Delta A$	$\sigma_N=k\cdot\sigma_A$
$N=\frac{A^p\cdot B^q}{C^r}$	$\frac{\Delta N}{N}=p\frac{\Delta A}{A}+q\frac{\Delta B}{B}+r\frac{\Delta C}{C}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{p\sigma_A}{A}\right)^2+\left(\frac{q\sigma_B}{B}\right)^2+\left(\frac{r\sigma_C}{C}\right)^2}$
$N=\sqrt[p]{A}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\Delta A}{A}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\sigma_A}{A}$
$N=\sin A$	$\Delta N=\lvert\cos\bar{A}\rvert\cdot\Delta A$	$\sigma_N=\lvert\cos\bar{A}\rvert\cdot\sigma_A$
$N=\ln A$	$\Delta N=\frac{1}{A}\cdot\Delta A$	$\sigma_N=\frac{1}{A}\cdot\sigma_A$

（二）标准误差的传递公式

若各个独立的直接测量值的标准误差分别为 $\sigma_A,\sigma_B,\sigma_C,\cdots,\sigma_H$，则间接测量值 N 的误差估算需要用误差的方和根合成，即绝对误差为

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_H\right)^2} \tag{2-12}$$

相对误差为

$$E_r=\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial C}\sigma_C\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial H}\sigma_H\right)^2} \tag{2-13}$$

式(2－12)及式(2－13)称为标准误差的传递公式，或称误差的方和根合成。表 2－2 中也列出几种常用的标准误差的传递公式，供计算时使用。

从表 2－2 中可看出，对于和或差函数关系，先计算绝对误差要比先计算其他来得方便，而对于乘或除函数关系，先求相对误差则更好些。

误差传递公式，除了可以用来估算间接测量值 N 的误差外，还有一个重要的功能，就是可以用它来分析各直接测量值的误差对最后结果误差影响的大小，这对实验中合理选用仪器和实验方法很有帮助。

例 2 测量圆环面积的公式为 $S=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$，式中的 D 和 d 分别为圆环的外径与内径，试推导出计算 S 误差的公式。

解：显然，这里 S 为间接测量量，它与直接测量量 D 和 d 构成差的关系，因此，应先计算绝对误差较为方便，即

$$\Delta S=\Delta(\frac{\pi}{4}D^2)+\Delta(\frac{\pi}{4}d^2)=\frac{\pi}{2}\bar{D}\Delta D+\frac{\pi}{2}\bar{d}\Delta d=\frac{\pi}{2}(\bar{D}\Delta D+\bar{d}\Delta d)$$

$$E_r=\frac{\Delta S}{\bar{S}}=\frac{\frac{\pi}{2}(\bar{D}\Delta D+\bar{d}\Delta d)}{\frac{\pi}{4}(\bar{D}^2-\bar{d}^2)}=\frac{2(\bar{D}\Delta D+\bar{d}\Delta d)}{\bar{D}^2-\bar{d}^2}$$

例 3 若直接测一物体质量 $m=(8.310\pm0.005)\text{g}$，其体积为 $V=(1.07\pm0.03)\text{cm}^3$，求其密度及其测量误差。

解：若用 ρ 表示密度，则

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{m}}{\bar{V}}=\frac{8.310}{1.07}=7.77(\text{g/cm}^3)$$

由于直接测量量与间接测量量是商的关系，故应先求相对误差较方便，即

$$\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}=\frac{\Delta m}{\bar{m}}+\frac{\Delta V}{\bar{V}}=\frac{0.005}{8.310}+\frac{0.03}{1.07}=0.029$$

$$E_r=\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\times100\%=2.9\%$$

$$\Delta\rho=E_r\cdot\bar{\rho}=7.77\times0.029=0.23\approx0.3(\text{g/cm}^3)$$

测量结果为：$\rho=(7.8\pm0.3)\text{g/cm}^3$

例 4 测量空心圆柱体体积的公式为

$$V=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)h$$

式中:D 为外径;d 为内径;h 为高。试用全微分法推导其绝对误差及相对误差的表达式。

解:这可以有两种方法,一种是先推导出绝对误差公式,再求出相对误差。另一种是先推导出相对误差公式,再求出绝对误差。现推导如下:

(1)先推导出 ΔV:

$$\Delta V=\left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|\Delta D+\left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|\Delta d+\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\Delta h$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\left|\frac{\partial(D^2-d^2)h}{\partial D}\right|\Delta D+\left|\frac{\partial(D^2-d^2)h}{\partial d}\right|\Delta d+\left|\frac{\partial(D^2-d^2)h}{\partial h}\right|\Delta h\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}[2\,\overline{D}\overline{h}\Delta D+2\,\overline{d}\overline{h}\Delta d+(\overline{D}^2-\overline{d}^2)\Delta h]$$

$$=\frac{\pi}{2}(\overline{D}\Delta D+\overline{d}\Delta d)\overline{h}+\frac{\pi}{4}(\overline{D}^2-\overline{d}^2)\Delta h$$

$$E_r=\frac{\Delta V}{\overline{V}}=\frac{2(\overline{D}\Delta D+\overline{d}\Delta d)}{\overline{D}^2-\overline{d}^2}+\frac{\Delta h}{\overline{h}}$$

(2)先推导出$\frac{\Delta V}{\overline{V}}$:

$$\ln V=\ln(D^2-d^2)+\ln h+\ln\frac{\pi}{4}$$

$$E_r=\left|\frac{\partial[\ln(D^2-d^2)]}{\partial D}\right|\Delta D+\left|\frac{\partial[\ln(D^2-d^2)]}{\partial d}\right|\Delta d+\left|\frac{\partial[\ln h]}{\partial h}\right|\Delta h$$

$$=\frac{2(\overline{D}\Delta D+\overline{d}\Delta d)}{\overline{D}^2-\overline{d}^2}+\frac{\Delta h}{\overline{h}}$$

$$\Delta V=E_r\cdot\overline{V}=\frac{\pi}{4}(\overline{D}^2-\overline{d}^2)\overline{h}\left[\frac{2\overline{D}\Delta D+d\Delta d)}{\overline{D}^2-\overline{d}^2}+\frac{\Delta h}{\overline{h}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}(\overline{D}\Delta D+\overline{d}\Delta d)\overline{h}+\frac{\pi}{4}(\overline{D}^2-\overline{d}^2)\Delta h$$

值得注意的是,当某一直接测量量在函数式的不同项的不同因子中重复出现时,就不能利用前述的加、减、乘、除关系中求误差的简便方法,而只能利用全微分的方法求误差,否则将会得到错误的结果。读者可通过例 4 验证这一结论。

三、实验不确定度及测量结果的表示

实验不确定度,是用来描述由于测量误差存在而导致被测量值不能准确测定的程度。国际计量局于 1980 年 10 月通过《实验不确定度的说明建议书》,建议用“不确定度”一词取代误差来表示实验结果,我国也在 1986 年发出用“不确定度”作为误差数字指标的通知。

(一)不确定度的分类和估算方法

不确定度根据其性质和估算方法不同,可分为 A 类不确定度和 B 类不确定度。A 类不确定度是用统计方法计算出的标准误差,用 σ_A 表示;B 类不确定度则是所有不能用统计方法估算的误差,用 u_B 表示。

在表征实验的误差时,两类不确定度合成在一起,其公式为