罗晓晖 编

李群概论及应用

LIQUN GAILUN JI YINGYONG

河南大学出版社

李群概论及应用

罗晓晖 编

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

李群概论及应用/罗晓晖编.一开封:河南大学出版社,1999.9

ISBN 7-81041-657-X

Ⅰ.李… Ⅱ.罗… Ⅲ.李群-概论 Ⅳ.0152.5

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第28309号

河南大学出版社出版

(开封市明伦街85号)

河南大学出版社电脑照排

河南大学印刷厂印刷　河南省新华书店发行

1999年9月第1版　1999年9月第1次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:6.75

字数:169千字　印数:0—1310册

定价:13.90元

前　言

李群理论是基础数学的一门理论学科，是建立在代数、几何与拓扑基础上的一门综合学科，因而是数学各专业的研究生必修的一门课. 但国内专门介绍李群理论的著作非常少，而且过于专业化，因而本人萌发了编写此书的念头. 本书概括介绍了李群与李代数的基础知识，使读者对李群理论有一个一般化的了解，并且把它应用到微分几何上来，产生了活动标架法. 而活动标架法又与物理中的刚体运动相关，因而关于李群论在微分几何上的应用是本书的显著特点之一，也是不同于其它李群论著作的地方.

全书共分六章. 第一章是绪论部分，简略介绍一下后面各章常用到的读者必备的拓扑知识，当然还有很多关于抽象代数、微分几何、拓扑学的知识都认为是读者已具备的知识，就没有再列出. 第二章介绍李群的基本概念与初步性质. 第三章介绍李代数的基本概念与性质. 第四章详细介绍李群与李代数相联系的纽带——指数映射. 它是研究李群理论的基础. 第五章介绍 E. Cartan 把李群理论应用于微分几何的思想，使读者在研究微分几何时可以开拓思路. 第六章则是更深一步地阐述紧李群与紧李代数的概念.

总而言之，本书是在假设读者已学过抽象代数、微分几何、拓扑学、微分方程等数学系本科生必修的理论课的基础上，面对数学系高年级学生及研究生编写的，是学习与研究更深数学理论的一本不可缺少的专业书. 需要指出的是，关于李群理论的进一步发展，例如，李群的无限维表示和调和分析、齐性空间和其上函数论、李群理论在代数群上的推广等等，使李群与代数、几何、分析等各方面密切相关. 有兴趣的读者可在读过此书的基础上再进行其它

方面的研究学习.

本书是在研究生讨论班的讨论稿基础上修改扩充而成的。编写过程中得到了我的导师梅向明先生的指点与帮助,在此表示最诚挚的谢意.

由于水平所限,书中难免有不妥之处,恳请读者不吝赐教.

编者　罗晓晖

1999年3月

目　　录

第一章 绪 论

本章的主要目的是介绍一些以后各章常用到的拓扑学方面的定义和定理.其中有些定理的证明请参阅有关拓扑学教材,我们在此略去,而对有些定理给出简单的证明.

§1.1 拓 扑 群

定义 1.1.1 Hausdorff 空间 G 中如果能引进乘法与取逆运算,使 G 构成一个群,且乘法运算和取逆运算分别是 $G\times G$ 到 G 和 G 到 G 的连续运算,则 G 称为拓扑群.这两种运算分别记为

$$\text{乘法运算}\quad (x,y)\mapsto xy,$$

$$\text{取逆运算}\quad x\mapsto x^{-1}.$$

乘法与取逆运算是连续映射的等价条件是映射 $(x,y)\mapsto xy^{-1}$ 是 $G\times G$ 到 G 的连续映射.

定义 1.1.2 设 G 为拓扑群,任取 $g\in G$,映射

$$L_g:\ x\mapsto gx,\ \forall\ x\in G;$$

$$R_g:\ x\mapsto xg,\ \forall\ x\in G$$

都是 G 的自同胚,称 L_g 为左平移,R_g 为右平移.它们有性质

$$L_{g^{-1}}=(L_g)^{-1},\quad R_{g^{-1}}=(R_g)^{-1}.$$

若记 $$\mathrm{ad}g=L_g(R_g)^{-1}:\ x\mapsto gxg^{-1},$$

则 $\mathrm{ad}g$ 不仅是拓扑群 G 的自同胚,而且是拓扑群 G 的普通的同构.

由拓扑群的定义,显然有下面的定理.

定理 1.1.1 设 e 为拓扑群的单位元素,则存在 e 的邻域组

$\{U_e\}$，适合下列条件：

(1) $\bigcap\limits_{U\in\{U_e\}} U=\{e\}$.

(2) 任取 $U,V\in\{U_e\}$，则存在 $W\in\{U_e\}$，使 $W\subset U\cap V$.

(3) 任取 $U\in\{U_e\}$，$g\in G$，则存在 $V\in\{U_e\}$，使得 $gUg^{-1}\subset U$.

(4) 任取 $U\in\{U_e\}$，则存在 $V\in\{U_e\}$，使得 $V^{-1}\subset U$.

(5) 任取 $U\in\{U_e\}$，则存在 $V\in\{U_e\}$，使得 $V^2\subset U$.

拓扑群 G 中任一点 g 均有基本邻域组

$$\{U_g\}=\{gU \mid \forall\, U\in\{U_e\}\},$$

$$\{U_g{}'\}=\{Ug \mid \forall\, U\in\{U_e\}\}.$$

由此可知自同胚 L_g 与 R_g 的重要性.

定理 1.1.2 任取正整数 n 及 $U\in\{U_e\}$，则存在 $V\in\{U_e\}$，使得 $V^{-1}=V$，$V^n\subset U$.

证明：因为 $e^n=e$，由拓扑群乘法的连续性可知，对 G 的单位邻域 U，存在单位邻域 $V_1,V_2,\cdots,V_n$，使得

$$V_1V_2\cdots V_n\subset U.$$

取
$$V_0=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n,$$

它仍为单位邻域，显然

$$V_0^n\subset V_1V_2\cdots V_n\subset U.$$

由于拓扑群的取逆运算 $g\mapsto g^{-1}$ 为自同胚，而 $e^{-1}=e$，所以对于单位邻域 V_0，V_0^{-1} 也是单位邻域. 取 $V=V_0\cap V_0^{-1}$，它仍为单位邻域，且显然 $V^{-1}=V$，$V^n\subset V_0^n\subset U$. □

定理 1.1.3 连通拓扑群 G 是由任一单位邻域 U 生成的，确切地，有 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U^n$.

证明：存在单位开邻域 $V\subset U$，而 $V^n(n=1,2,\cdots)$ 都是单位开邻域，所以 $V_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V^n$ 为 G 中开集. 由于拓扑群 G 连通，所以为了证明 $V_0=G$，只要证明 V_0 为 G 中闭集即可. 任取 $g\in\overline{V}_0$，则 gV^{-1}

为 g 的邻域，所以有 $gV^{-1}\cap V_0\neq\varnothing$，这就证明了存在 m，使 $g\in V^{m+1}\subset V_0$，即证明了 $\overline{V}_0\subset V_0$，于是 $V_0=G$. 又显然

$$G\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}V^n=V_0=G.$$

至此证明了 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$. □

定义 1.1.3 拓扑群 G 的子集如果对群的运算构成子群（或正规子群），且按拓扑空间 G 的诱导拓扑，它仍为拓扑群，则把该子集称为拓扑群的子群（或正规子群）.

定理 1.1.4 设拓扑群 G 局部连通，则它的单位分支（即 G 作为拓扑空间含单位元素 e 的连通分支）G_e 为 G 的开正规子群，且 G 的任一连通分支可以记作 gG_e，其中 g 为这个单连通分支的代表.

证明：任取 $g\in G_e$，则 L_g 为 G 的自同胚，所以 $L_g^{-1}(G_e)=g^{-1}G_e$ 仍为 G 的连通分支. 然而 $e=g^{-1}g\in g^{-1}G_e$，这就证明了 $g^{-1}G_e$ 仍为 G 的单位连通分支，所以 $g^{-1}G_e=G_e$，$\forall\ g\in G_e$. 也就证明了 $G_e^{-1}G_e=G_e$，即 G_e 为 G 的子群.

再任取 $g\in G$，则由于 $\mathrm{ad}g$ 为 G 的自同胚，所以 $(\mathrm{ad}g)G_e=gG_eg^{-1}$ 仍为 G 的连通分支，然而

$$e=geg^{-1}\in gG_eg^{-1},$$

即

$$gG_eg^{-1}=G_e,\ \forall\ g\in G.$$

于是证明了 G_e 为 G 的正规子群. 由于左平移为自同胚，所以定理的后一断言显然成立. □

定理 1.1.5 拓扑群 G 的开子群必闭，且当 G 局部连通时，它为 G 的一些连通分支之并.

证明：显然只证 G 的开子群必闭即可. 设拓扑群 G 的子群 H 为开子集，任取 $g\in G\backslash H$，则 $L_g(H)=gH$ 仍为 G 中开集. 由于 H 为子群，所以 $gH\cap H=\varnothing$，且

$$\Big(\bigcup_{g\in G\backslash H}gH\Big)\cap H=\varnothing,$$

$$(\bigcup_{g\in G\setminus H} gH)\cup H=G.$$

由于 $\bigcup_{g\in G\setminus H} gH$ 为 G 的开子集，它的补集为 H，所以 H 为 G 的闭子集. □

定理 1.1.6 拓扑群 G 的中心

$$C=\{c\in G \mid gc=cg, \forall\, g\in G\}$$

是 G 的闭正规子群.

§1.2 基 本 群

设 X 是弧连通且局部单连通的 Hausdorff 拓扑空间，基点 $P_0\in X$，I是闭区间$[0,1]$.

定义 1.2.1 若连续映射 $f:I\to X$，有 $f(0)=f(1)=P_0$，则称 f 为 X 中的闭曲线.

定义 1.2.2 设 f 和 g 是 X 中闭曲线. 如果存在一族曲线 $f_s(t)(0\leqslant s\leqslant 1)$，使得

$$f_0(t)=f(t),\ f_1(t)=g(t),\ f_s(0)=f_s(1)=P_0,$$

则称 f 同伦于 g，记为 $f\sim g$.

容易看出同伦是一个等价关系，即它满足

(1) 自反性：$f\sim f$.

(2) 交换性：若 $f\sim g$，则 $g\sim f$.

(3) 传递性：若 $f\sim g, g\sim h$，则 $f\sim h$.

我们把闭曲线 f 的同伦类记成$[f]$，即若 $g\in[f]$，则 $g\sim f$. 若 $f\sim P_0$，则把$[f]$记成单位元素 e.

定义 1.2.3 设 X 是弧连通空间. X 称为单连通的，如果 X 中每一条闭曲线都满足$[f]=e$.

定义 1.2.4 定义闭曲线的乘法和取逆如下：

乘法：$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$

取逆：$f^{-1}(t)=f(1-t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

如果 f 和 g 不是闭曲线，则仅当 $f(1)=g(0)$时，$f*g$ 才有定义.

定理 1.2.1

(1) 如果 $f_1\sim f_2, g_1\sim g_2$，则 $f_1*g_1\sim f_2*g_2$.

(2) 如果 $f_1\sim f_2$，则 $f_1^{-1}\sim f_2^{-1}$.

证明：(1) 设 f_1 通过曲线族 f_s 同伦于 f_2，g_1 通过曲线族 g_s 同伦于 g_2，则 f_1*g_1 通过曲线族 f_s*g_s 同伦于 f_2*g_2.

(2) 设 f_1 通过 f_s 同伦于 f_2，则 f_1^{-1} 通过 f_s^{-1} 同伦于 f_2^{-1}. □

推论 $[f]*[g]=[f*g]$,

$[f]*e=e*[f]=[f]$,

$[f^{-1}]*[f]=[f]*[f^{-1}]=e$,

$[f]^{-1}=[f^{-1}]$.

定义 1.2.5 X 上全体闭曲线的等价类构成一个群，称为 X 的基本群，记作 $\pi(X,P_0)$. 我们通常略去基点 P_0，记作 $\pi(X)$.

定理 1.2.2 设 X 和 Y 是连通的拓扑空间，$p:X\to Y$ 是连续映射，$p(P_0)=Q_0$，则

(1) p 把以 P_0 为基点的闭曲线映成以 Q_0 为基点的闭曲线.

(2) $p(f*g)=p(f)*p(g)$.

(3) 若 $f\sim g$，则 $p(f)\sim p(g)$.

证明留给读者.

推论 p 诱导同态

$$p_*:\pi_1(X,P_0)\to\pi_1(Y,Q_0),\ p_*[f]=[p(f)].$$

定理 1.2.3 给出连续映射

$$p:\ X\to Y,\ P_0\mapsto Q_0,$$
$$q:\ Y\to Z,\ Q_0\mapsto R_0,$$

则$(qp)_*=q_*\cdot p_*$.

证明留给读者.

§1.3 覆盖空间

定义 1.3.1 令 $p:Y\to X$ 是投影(在上映射). p 称为覆盖映射,如果对于任意点 $P\in X$,存在点 P 的单连通邻域 U,使得 $p^{-1}(U)=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$,其中 U_α 是 $p^{-1}(U)$的单连通分支,并且同胚于 U.

注意 $p^{-1}(P)$是离散的,它有一基数. P 点作微小移动时,基数不变. 若 X 是连通的,则这个基数对于整个 X 都是一样的. 特别地,当基数等于 1 时,p 是一同胚.

例如,设 $\mathbf{R}$ 是实数轴,S 是单位圆,$p:\mathbf{R}\to S$ 定义为

$$x\in\mathbf{R}\mapsto \mathrm{e}^{2\pi ix}\in S,$$

则 p 为覆盖映射.

定理 1.3.1 设 $p:Y\to X$ 是覆盖映射,$f:I\to X$ 是 X 上一路径,则 f 可以惟一提升为 Y 中的路径 $g:I\to Y$,使得 $p(g)=f$.

证明:用邻域 U 覆盖 $f(I)$. 因为 I 紧致,所以只需有限个邻域就可以盖住 $f(I)$. 又因为 p 是局部同胚,所以我们可以逐个邻域地提升 $f(I)$,并且这种提升是惟一的,从而整体的提升也是惟一的. □

定理 1.3.2 令 $p:Y\to X$ 是覆盖映射,端点相同的路径 f_1 和 f_2 在 X 上同伦. 设 g_1 和 g_2 分别是 f_1 和 f_2 在 Y 上的提升,$g_1(0)=g_2(0)$,则 $g_1\sim g_2$,即存在曲线族

$$H_s:\ I\to Y,\ H_0=g_1,\ H_1=g_2;$$

$$H_s(0)=g_1(0)=g_2(0),\ H_s(1)\text{是常曲线}.$$

常曲线就是可以收缩成一点的曲线.

证明:设 f_1 通过曲线族 f_s 同伦于 f_2,则存在连续映射

$$F: I\times I\to X, (s,t)\mapsto f_s(t),$$
$$F_0=f_1,\ F_1=f_2.$$
设 I' 是 $I\times I$ 中连结 $(0,0)$ 与 (s,t) 的线段，则 $F(I')$ 是 X 上的曲线. 连结 $f_1(0)=f_2(0)=P_0$ 与 $f_s(t)$，它可以提升为 Y 中一曲线. 连结 $g_1(0)=g_2(0)=Q_0$ 与 $H_s(t)$，于是得到映射 $H:I\times I\to Y$. 下面要证明映射 H 连续.

同邻域 U 覆盖线段 I'，则邻域 $F(U)$ 覆盖 $F(I')$，提升后邻域 $\tilde{U}$ 覆盖 $H_s(t)$. 如果 (s',t') 属于 (s,t) 的邻域 U，则提升后 $H_0(t')$ 属于 $H_s(t)$ 的邻域 $\tilde{U}$，所以 H 是连续的. 注意到
$$F_0=f_1,\ F_1=f_2,\ f_1(0)=f_2(0),$$
所以 $F(0,0)=F(1,0)$，提升后 $H(0,0)=H(1,0)$. 令 $H_0=g_1$，$H_1=g_2$，则 $g_1(0)=g_2(0)$，所以 $H:I\times I\to Y$ 给出同伦 $g_1\sim g_2$. 而 $F(s,1)$ 是以 $f_1(1)=f_2(1)$ 为端点的闭曲线，提升后 $H_s(1)$ 也是以 $g_1(1)=g_2(1)$ 为端点的闭曲线，但是 $F_s(1)$ 是常曲线，故提升后 $H_s(1)$ 也是常曲线. □

推论 1 $\pi_1(X)$ 传递作用于 $p^{-1}(P_0)$.

证明：设 $[f]\in\pi_1(X)$. 对于 $Q\in p^{-1}(P_0)$，定义 $[f]$ 右作用 Q 为：使 f 提升为 g，$g(0)=Q$，则定义 $Q[f]=g(1)$. 容易证明
$$Q([f_1]\cdot[f_2])=Q[f_1*f_2],\quad Q[e]=Q.$$
此外任取 $p^{-1}(P_0)$ 中两点 Q_1 和 Q_2，用 $g(t)$ 相连，令 $f=p\cdot g$，则 $Q_1[f]=Q_2$. □

推论 2 如果 X 是单连通的，$p:Y\to X$ 是覆盖映射，则 p 是同胚.

因为 $\pi_1(X)=e$，所以 $p^{-1}(P_0)$ 中只有一点，所以推论 2 的证明是显然的.

下面我们再来看一看覆盖空间与基本群的关系. 我们要指出的是，X 的覆盖空间（差一同胚）一一对应于 $\pi_1(X)$ 的子群.

定理 1.3.3 设 $p:Y\to X$ 是覆盖映射，则 $p_*:\pi_1(Y)\to\pi_1(X)$ 是一一的.

证明：设 $p_*[g_1]=p_*[g_2]$，则 $pg_1\sim pg_2$. 根据定理 1.3.2，它们的提升 $g_1\sim g_2$，所以$[g_1]=[g_2]$. □

推论 $\pi_1(Y)$同构于 $\pi_1(X)$的子群

$$H=\{\alpha\in\pi_1(X)\mid Q_0[X]=Q_0\},$$

其中 Q_0 是 Y 的基点.

定理 1.3.4 设 $p_1:Y_1\to Y_2$，$p_2:Y_2\to X$ 都是覆盖映射，则 $p_1=p_2\cdot p:Y_1\to X$ 也是覆盖映射. 令 $p_{i*}[\pi_1(Y)]=G_i\subset\pi_1(X)(i=1,2)$，则 $G_1\subset G_2$. 反之，若 $G_1\subset G_2$，则存在覆盖映射 $p:Y_1\to Y_2$，使得 $p_1=p_2\cdot p$.

证明：$p_1=p_2\cdot p$ 是覆盖映射是显然的. 设 f 是 X 中以 P_0 为端点的闭曲线，它可以分别提升为 Y_1 和 Y_2 上从 P_1 和 P_2 出发的曲线

$$P_2=p_2^{-1}(P_0),\quad P_1=p^{-1}(P_2).$$

设 $[f]\in G_1\subset\pi_1(X)$，即$[f]\in p_{1*}[\pi_1(Y)]$. 上面推论指出 f 提升后，f_1 是 Y_1 中的闭曲线，因此 $f_2=pf_1$ 也是 Y_2 中的闭曲线. 由于

$$p_2f_2=p_2pf_1=p_1f_1=f,$$

所以

$$p_{2*}[f_2]=[f]\in G_2\subset\pi_1(X),$$

即 $G_1\subset G_2$.

再证反之. 设 $P\in Y_1$，f_1 是 Y_1 上连结 P_1 和 P 的曲线，则 $f=p_1(f_1)$是 X 中连结 P_0 和 $p_1(P)$的曲线. 再把它提升到 Y_2，我们得到连结 P_2 到 $p_2^{-1}[p(P)]$中一点 Q 的曲线，我们定义这点 $Q=p(P)$. 首先我们要指出，这样定义的点 Q 与曲线 f_1 的选择无关. 设另选曲线 f_1'连结 P_1 和 P_2，则 f_1 和 f_1'构成 $\pi_1(Y)$的一个元素 α，$p_{1*}(\alpha)\in G_1\subset G_2$，因此 $f=p_1(f_1)$和 $f'=p_1(f_1')$在 Y_2 中的提升 f_2 和 f_2'也构成一闭曲线，这说明 Q 点是惟一的. 容易证明 $p:Y_1\to Y_2$ 是连续的，p 为覆盖映射，并且 $p_1=p_2\cdot p$. □

推论 如果$G_1=G_2$，则p是同胚. 这说明覆盖空间在差一同胚的意义下是惟一的.

证明：设P_2是Y_2的基点，$p_2(P_2)=P_0$，要证$p^{-1}(P_2)$只有一个点. 用反证法. 设$p(P_1)=p(Q)=P_2$，f_1是Y_1中连结P_1和Q的曲线，则pf_1是Y_2中的闭曲线，$p_1f_1=p_2(pf)$是X中的闭曲线，而且pf_1是p_1f_1在Y_2中的提升. 由于$[pf_1]\in G_2=G_1$，所以p_1f_1在Y_1中的提升也应该是闭的，从而f_1是闭的，即$P_1=Q$. □

定理 1.3.5 设G是$\pi_1(X)$的子群，则存在覆盖空间$p:Y\to X$，使得$p_*(\pi_1(Y))=G$. 特别地，取$G=\{e\}$，则存在X的单连通覆盖.

证明：设f_1和f_2是X上从同一基本点P_0出发并且有相同端点的曲线. 如果$[f_1*f_2^{-1}]\in G$，则记$f_1\sim f_2$，这是一个等价关系. 在此等价关系下，记f的等价类为$\{f\}$，定义Y是所有等价类$\{f\}$的集合，并且定义映射$p:Y\to X$为$p[\{f\}]=f(1)$. 再定义Y中$\{f\}$的邻域如下：命U是X中$f(1)$的单连通邻域，g是U中以$f(1)$为始端点的曲线，则$\{f\}$的邻域是元素$\{f*g\}$的集合. 可以证明，在此拓扑下，X是连通的和局部连通的 Hausdorff 空间，并且映射$p:Y\to X$是覆盖映射，而且$\pi_1(Y)=G$. (参阅 Pontrjagin 著《连续群》中译本，下册，第九章，定理 7.8). □

概括上面定理，我们得到，若X是一个弧连通和局部单连通的 Hausdorff 空间，有基本群$\pi_1(X)$，则存在$\pi_1(X)$的子群G与X的覆盖空间(差一同胚)之间的一一对应关系，使得对于覆盖映射$p:Y\to X$来说，$p_*(\pi_1(Y))=G\subset\pi_1(X)$. G中包含所有$[f]\in\pi_1(X)$，使得f可以提升为Y的闭曲线. 特别地，当$G=\{e\}$时，我们差一同胚惟一地得到X的单连通覆盖空间$\widetilde{X}$，称为X的覆盖空间.

第二章 李 群

在第一章我们扼要介绍了一下拓扑群(也称为连续群),它具有群和拓扑这样两种结构,而且群的运算对其拓扑来说是连续的.在本章中,我们将介绍李群,它既具有群的结构,又具有可微结构,而且群运算对于其可微结构来说是可微的.

§2.1 李群的基本概念与实例

一、李群的基本概念

定义 2.1.1 设 G 为拓扑群.如果它满足下列条件:

(1) 在 G 中能引进微分结构,使它成为一个 C^∞-微分流形(或解析流形).

(2) 对于 G 中的微分结构来说,G 的群运算是 C^∞ 的(或解析的):

$$乘法: G\times G\to G,\ (x,y)\mapsto xy,$$

$$取逆: G\to G,\ x\mapsto x^{-1},$$

则称 G 为 C^∞-李群,简称李群.如果 G 是实或复 C^∞-微分流形,则 G 称为实或复 C^∞-李群.如果 G 是实或复解析流形,则 G 称为实或复解析李群,以后我们将证明 C^∞-李群实质上就是解析李群,因此以后我们不再区别 C^∞-李群与解析李群,而视问题的需要把李群看成 C^∞ 的或者解析的.

上述群运算是 C^∞ 的条件可以合并成映射

$$G\times G\to G,\quad (x,y)\mapsto xy^{-1}$$