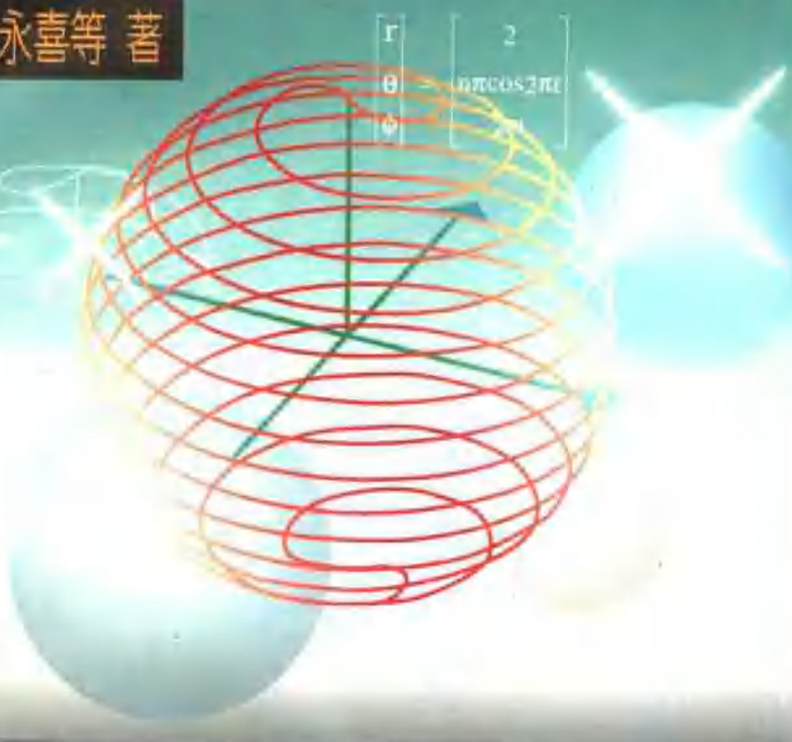
数学
教学论文及论著摘要汇集

SHUXUE JIAOXUE LUNWEN JI LUNZHU ZHAIYAO HUIJI

古永喜等 著



北京师大二附中 教坛艺术丛书

第五集

北京师范大学第二附属中学

数学教学论文及论著摘要汇集

古永喜　　等著

2003 年 5 月

古永喜　1934年5月生，江苏省六合县人。1952年在金陵中学毕业后考入北京师范大学数学系。1956年在数学系毕业后留校任助教。1958年到1994年在北京师大二附中教数学。

1961年到1998年在《数学通报》上共发表论文十四篇。代表作有《由图形的运动变化显示几何元素间的关系》；《读书札记——谈谈平面几何中的辩证法》。主要论著有《运动着的图形　平面几何中的辩证法》。

序　言

古永喜老师是我校数学教研组高级教师。1956 年毕业于北京师范大学数学系，同年进入政治教育系哲学研究班学习。1958 年 9 月来北京师大二附中（前身为北京第四十六中学）工作，1994 年退休。在长期的教学实践中，古老师逐步形成了自己独特的教学风格。他注重基础，注重贯彻“少而精”的原则。深入地钻研教材，反复琢磨如何以最恰当的方式提出问题和解决问题。例如在立体几何的教学中，古老师认为根据题意正确地画出图形是很重要的。备课时通过分析对比，在课堂上把所选择的形象用直观的图形展示在学生的面前。这对提高学生的空间想象力和分析解决问题的能力都起到了重要作用。

古老师重视把科研与教学紧密结合起来。自觉地运用唯物辩证法来研究数学中的问题，认为不仅有它哲学上的根据，而且有它数学上的根据。例如古老师明确提出平面几何的辩证法是研究运动变化着的图形，也就是研究几何题之间的内在联系，以及它们之间的相互转化的规律。多年来古老师把研究成果在《数学通报》等杂志上发表，这次结集出版是件很有意义的事情。对青年教师学习老教师的教学思想与经验也是有益的。

北京师大二附中数学教研组

2003 年 5 月

目　　录

序言　　北京师大二附中数学教研组

第一部分　《数学通报》论文十四篇 1

第一篇　谈谈中学几何课中计算问题的教学
古永喜　1961年第9期 2

第二篇　谈谈初中二年级几何课的学习复习工作
古永喜　严扶平　1962年第12期 11

第三篇　由图形的运动变化显示几何元素间的关系
古永喜　1981年第4,5期 20

第四篇　读书扎记——谈谈平面几何中的辩证法
古永喜　1986年第12期 47

第五篇　对一种特殊四边形的一些研究
古永喜　杨敏　1987年第6期 55

第六篇　三角形与四边形之间的联系与转化
古永喜　杨敏　1987年第12期 61

第七篇　一道几何题的来龙去脉
古永喜　杨敏　1988年第4期 68

第八篇　对无限凸四边形的面积与半周长之比的一些探索
古永喜　杨敏　1989年第2期 74

第九篇　从两圆的内、外公切线的长谈起
古永喜　杨敏　1990年第5期 83

第十篇　类比推理与立体几何教学
傅佑珊　古永喜　1991年第11期 92

第十一篇 一个教案的设计——运用“发现法”教学的一点体会
古永喜 1992年第12期……97
第十二篇 运用“类比推理”应注意的三个问题——由圆和球中有关极值问题想到
古永喜 傅佑珊 1993年第7期……107
第十三篇 化归方法与立体几何教学
傅佑珊 古永喜 1998年第2期……116
第十四篇 培养学生推广问题的能力
傅佑珊 古永喜 1998年第10期……133

第二部分 论著、编著摘要四篇……141

第十五篇 《运动着的图形平面几何中的辩证法》摘要
……142
第十六篇 《教法学法考法平面解析几何》摘要
……177
第十七篇 《高二数学》摘要
……181
第十八篇 《高中立体几何教案》摘要
……234

第　一　部　分

《数学通报》论文十四篇

第一篇

谈谈中学几何课中计算问题的教学

古永喜

（北京师大二附中）

在最近一个时期内,很多数学工作者,特别是从事中学数学教育工作的同志们,都在热烈地讨论中学几何课的目的和任务,以及有关教学方法问题;并且讨论的范围除了已经涉及到内容安排的问题外,也进一步涉及到了中学几何教学中发展学生逻辑思维能力的问题。显然,这是非常必要的,因为只有通过这样的讨论、研究,才能更好地改进中学几何教学。但是就笔者所知,有关中学几何课中的作图和计算方面的问题,尤其是有关计算问题的教学目的和要求以及如何进行教学等,似乎讨论的还不多,因此笔者愿从这个方面--中学几何课中的计算问题(以下略称几何计算)发表一些个人的看法,提供同志们参考,并希望有助于问题的讨论。

一、几何计算的教学目的

如所周知,"使学生系统地研究图形的性质,并且应用这些性质来解计算题和作图题"是中学几何课的主要目的之一,如果对这目的略加分析,便可看出它一方面说明了要正确地解决有关图形方面的实际问题——计算与作图,必须有系统几何理论作指导;而另一方面又说明要使学生对几何理论学习得深刻、巩固,则又必须通过有关的计算和作图才能达到,因此由这项目的可知:理论和计算、作图的结合是使学生学好知识的关键。

如果再从实际当中所遇到的作图问题看来,很多问题在作图之前,是要先通过计算的手续的,这也就是说必须先把所绘制图形的各个元素正确地计算出来,根据这些数据进行作图,才能得到正

确的图形,这样一来,又可看出能否进行正确的计算,便又成为与能否作出正确图形密切相关的问题了。

使学生学习几何计算,从它的使用对象来说,当然是有关图形方面的数量问题,但是从计算方法上来说,在中学范围内,实际上是属于算术和代数方面的,当然这些方法是要在算术和代数课中来解决,但是要想使学生对这些方法的运用具有一定高度的技能和技巧,仅仅通过算术和代数题的练习,显然是不够的。必须通过解决一些联系各个学科的实际问题,也就是一般所说的综合题,才能达到目的,而几何计算题正好就是综合题的一种,因此几何计算题也是联系各个学科的必不可少的一种问题,通过以上的分析,不难看出,在中学数学课中几何计算题的教学目的,如果概括地说来应该有三个方面,这就是:

(1) 使学生巩固所学的几何理论知识;

(2) 使学生了解几何理论在实际中的应用,并学习应用方法;

(3) 培养学生的计算技能和熟悉技巧。

二、几何计算在教学上的要求

谈到几何计算在教学上的要求,最好先将课本所选编的内容,随着年级,划分出几个阶段,以便于问题的说明。下面就目前常用的几种课本,对几何内容分为三个阶段,并对每一个阶段的内容略加分析(限于篇幅主要只谈平面几何部分):

(一)小学阶段。这一阶段的几何知识是结合着算术教材分散地编排的。它的内容高度,就达到简单形体的面积和体积的计算公式为止;而它的理论深度,也只是以实验、观察的办法来确立公式,并不作逻辑的证明。至于应用的广度,则以学生能正确地将问题中的已知量代入公式,然后通过加、减、乘、除以及简单的乘方运算,将正确的结果计算出来为主。

(二) 从系统课开始到比例几段以前。这一阶段的几何计算问

题是配备在各个定理之后的。从它的理论深度来说,在解计算题时,是要本着定理证明的精神,不仅要得出正确结果,还要阐明解法的理论依据,而从它的广度来说,虽然在这一阶段只用到算术运算和代数中简单的方程的解法,但从解题的步骤看来,已不仅仅停留在直接套用定理的结论的阶段了;而对于所选的计算题,它的方法也不是只有一种,而是比较灵活,可有不同的解法了。

为了更易看出问题的实质,不妨进一步通过几个实例予以说明:

例 1. 如图 1-1, $ABCD$ 是等腰梯形,$AB \parallel CD$, $\angle A=60°$, $\angle$-$ABC=90°$,$AB=10$ 厘米,求 $\angle ABCDR$ 的周长。(解略)

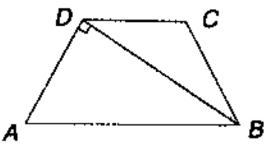


图 1-1

显然,这不是一个只直接套用定理、公式就能解决的问题,必须先根据等腰梯形的概念,明确了问题的关键在于求两底和一腰的长度之后,才能进上步考虑它的解法,在解题过程中虽然容易看出$\triangle ABC$ 是含 60°的直角三角形并且斜边 $AB=10$ 厘米,但因学生所学过的定理是"在直角三角形中,如果有一锐角是 30°,那么它所对的直角等于斜边的一半",因而又必须在说明了$\angle ABD=30°$之后再根据这个定理求 AB 的长度,在理由上才算充足,至于 CD 的长度,则又必须根据梯形的概念、平行线的性质、等腰梯形的性质、等腰三角形的判定等定理,才能算出。因此虽然在计算方法上只须使用算术的方法,但在要求、步骤上则已非小学阶段所可比拟的了。

例 2. 已知两圆半径之比是 5:3;当两圆外切时,它们的圆心距是 24 厘米,问当两圆内切时,它们的圆心距是几厘米?(解略)

从这个例题看来,当然学生对于两圆的位置与半径和圆心距的相依关系如果不够熟悉,那将是不可能解出的。然而即使学生已经熟悉,如果不能很快地发现这是个比例分配问题,或者很快归结

为二元一次方程组的问题,那还是不能很快地求出结果来。这也就是说要很快地解这样的题,非对几何、代数灵活地互相使用不可。

例 3. 如图 1-2, AB,AC 分别切圆 O 于 $B,C,\angle BAC=30^\circ$。求 $\overset{\frown}{Bmc}$ 和 $\overset{\frown}{Bnc}$ 的度数。

这个例题的解法很多,常用的有以下几种。

[解 1]利用二元一次方程组

$$\begin{cases}\overset{\frown}{Bmc}+\overset{\frown}{Bnc}=360^\circ\\ \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{Bmc}-\overset{\frown}{Bnc})=30^\circ\end{cases}$$

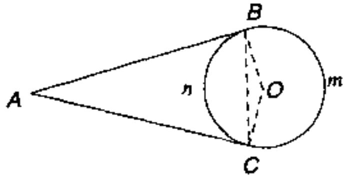


图 1-2

[解 3] 连结 OB,OC 利用切线性质、四边形内角和再通过$\angle BOC=180^\circ-\angle BAC$ 的性质来解。

[解 4] 连结 BC,通过$\angle CBA=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)$和$\angle CBA=\overset{\frown}{BnC}$ 的性质来解。

因此,无须多加分析,已能说明在这一阶段中,也需要学生能善于从各个方面考虑,使用不同的方法来解计算题的(如在这四种解法中,前两种解法偏重于方程的布列问题,后两种偏重于几何推理问题)。

(三) 比例几段以后,在这一阶段由于几何知识讲的更多,因而解计算题时所利用的定理也随着加多起来。此外在这一阶段由于所讲的几何知识多属度量性的,因此,这一阶段的几何计算题中,有关恒等变换的问题占相当大的比重。此外由于这时在代数课中,不仅已讲过一次方程,同时也讲到了二次方程、开方等知识并且由于在相似三角形之后,就讲到三角函数及其应用,因而这一阶段可以说是全面提高学生的几何计算能力、培养他们解综合题的能力阶段。下面也举几个例子来说明这一阶段的几何计算题所含的具

体内容。

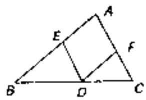


图 1-3

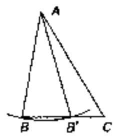


图 1-4

例 1. 如图 1-3,在ΔABC中,$AEDF$是菱形,$AB=15$厘米,$AC=10$厘米。求AB的长度。(解略)

例 2. 如图 1-4,在ΔABC中,$AB=14$厘米,$AC=16$厘米,$\angle C=60°$。求BC的长度。(解略)

例 3. 在ΔABC中,$\angle B=60°$,$\angle C=45°$,$BC=2$厘米,求BC边上的高。(解略)

在这三个例中,解例 1 时,是要依靠很多定理的。如菱形的性质(对边平行,四边相等,对角线平分顶角);三角形内角的平分线把对边分成两个线段与两邻边成比例;与三角形的一边平行的直线分其它两边成比例等,因此必须熟悉这些定理,才能找出已知量和未知量间的关系,使问题得到解决。解例 2 时,虽然用的几何定理很少,它的解决主要是依靠解一元二次方程;但是如果没有掌握好解一元二次方程的方法,就是会根据定理找出已知量和未知量间的关系,问题也不易解决。特别是这问题最后对两根的几何意义的讨论,如果忽视了,仍旧得不到完善的解答。解例 3 时,如果善于使用特殊角的三角函数知识,那么解起来不但简便,而且对复习应用所学的三角知识是有好处的。

通过以上的分析,便不难看出,几何计算在教学上的要求,实际上可以这样来考虑:首先,在解几何计算题时,要使学生能善于运用所学的代数知识(列一元一次、二元一次、一元二次方程及解这方

程,根式运算、某些恒等变形)和三角知识(三角函数的定义,特殊角的三角函数,解直角三角形)。并且还要和几何知识结合在一起综合地运用,而决不满足于只能解简单套用公式的问题。

其次,在解几何计算题时,要养成学生认真考虑每步理论根据的习惯,务使他们对待这样问题,就象对待证明题一样,立论严谨,结论完整。

最后,要及时配合其它学科,培养学生的计算技巧和用于解实际问题的能力,务使学生克服"计算是属于算术、代数的,几何计算只是解决图形的,解得是否快,结果是否精确关系不大"的偏见。

三、 学生在学习中容易发生的问题

(一) 不善于用代数方法来解计算题。学生在解几何计算题时,往往感觉:尽管需要用较多的几何知识也比较习惯、好办;但若遇到代数知识较多的题便感到难办,甚至有时不知从哪里入手。例如解例"已知平行四办形一边的长是 9 厘米,并且这边等于周长的 $\frac{3}{10}$,求其余各边的长"和"已知梯形两底的比为 7:3 而差为 3.2 厘米,求中位线的长"。这样的题,事实上用一元一次方程和二元一次方程组来解是比较容易的,否则就较难。但学生往往不能很快地从这方面来考虑。

(二) 不能灵活地应用定理。学生在解几何计算题时也常常出现这种情况,如由边数求内角和、由梯形的两底求中位线、由弧来求和圆有关的角等,感到比较容易并且一般不会发生什么错误。但是反过来,由内角和求边数、由梯形的一底及中位线求另一底、由和圆有关的角来求弧时,就会感到困难,并且也容易出错。当然,容易出错的原因,一方面是由于学生不了解一定理或一公式的多用,而另一方面也常常是由于代数运算出错而造成解答错误。(事实上几何教师对学生发生的代数上的错误,是完全有责任来详加矫正

的,因为这对促使学生改正这些错误是会有好处的。)

此外,象解这样的题,如图 1-5,$AC=CE=EC$,$AB\parallel CD\parallel EF\parallel GH$,$GH=3\dfrac{3}{4}cm$,$CD=3.25cm$,求 EF 和 AB 的长。

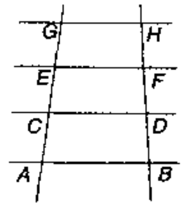


图 1-5

在这题里,困难之一是首先要学生看出 $CDHG$ 和 $ABFE$ 是两个梯形,并且能证出 EF 和 CD 分别是它们两个的中位线;困难这二是求 EF 容易求 AB 难,而对这两点困难解决的怎样,也是反映出掌握知识的灵活性的。

(三) 不重视准确作图。在解几何计算题时,有时也常常由于画图不准确而产生了解题的困难,甚至发生解不出的情况。例如:"在ΔABC 中,$\angle A=10\angle B$,$AB=9.6cm$,求:(i)各角的度数;(ii)AB 边上的高。"当然在求各角的度数时,图画的怎样关系还不大,但是如果没有正确的图形,要想求出AB边的上高便较为困难。又如:"已知平行四边形 $ABCD$,$AB=8$cm,$BC=3$cm, $\angle A$ 和$\angle B$ 的分角线与 DC 分别交于 E,F,求 DE,EF,FC 三段各长多少。"如果在这题的图形中,AB、BC 的长是从给出的长度按比例画出的,那么结果便很容易得出[如图 1-6(a)],但若画图不准确[如图 1-6(b)]显然就不可能得出结果。

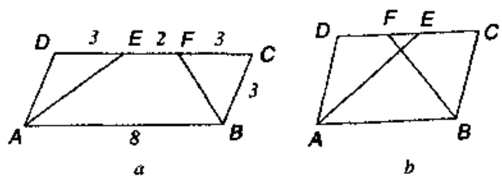


图 1-6

上面所提出的三项不过是就笔者在教学中感到常出现的问题,事实上学生在解几何计算题时,所产生过的较零星琐碎问题还是

各种各样的,限于篇幅,便不再详加叙述了。

四、 几何计算教学中应注意的几个问题

(一) 几何计算既然是建立在对几何概念、定理和算术、代数运算的基础上的,所以在进行几何计算题的教学时,应注意全面了解学生的数学水平,尤其对学生代数知识的掌握情况要了解清楚。因此与代数教师的配合是非常必要的。另外,解几何计算题时所需要的知识面是较广的,因此通过几何计算的教学,应注意全面提高学生的数学水平,不论在解题过程中发生的错误是属于代数方面的还是属于几何方面的,教师都应认真矫正。

(二) 在几何计算中,既然有些问题的解决需要用到较多的几何知识,有些问题的解决需要用到较多的代数知识,那么就有必要把这些情况让学生知识,并且逐步使他们在遇到几何计算题时,能较快地找到合适的方法。一般说来,已知条件和要求的未知量的关系较明显时,用代数方法来解;当已知量和未知量的关系不明显时,则要较多地从已学的几何定理去寻求,已便通过推理的过程,得出已知量和未知量的关系,并且通过例题来给学生讲解清楚。

(三) 使学生灵活地掌握定理、公式的运用,使其了解一个定理、一个公式的多用法。为此,在讲完有关的定理和公式后,多出一些不同类型的习题让学生练习是很必要的。象前面所举的例子,讲完梯形中位线的定理后,明确公式的多用法在于知道两底和中位线三者中两者的长度就可以求出第三者。又如在讲完多边形内角和=$(n-2)\times180°$这个公式后可以指出这个公式有四个用处:由给出的边数求内角和;由给出的内角和求边数;当多边形每一个内角都相等时上述公式可变成:每一个多边形的内角$=\frac{(n-2)\times180°}{n}$(这里要指出 n 既代表边数,又可代表角数,因多边形的边数和角数是一样的);此外还可由给出的边数求每一个内角

的度数,或者由给出每一个内角的度数来求出边数。

(四) 为了培养学生综合运算能力,教师应经常有意地在解几何计算题中挖掘出这方面的因素。也就是在解几何题时,应尽量应用所学过的代数、三角知识。不但在讲例题时考虑到这上点,而且在留习题时也要考虑到这一点。这样,学生在解几何计算题时就能逐渐习惯从各方面来考虑问题,而不致局限于所学过的几何知识范围了。

第二篇

谈谈初中二年级几何课的学期复习工作

古永喜　　严扶平

(北京师大二附中)

目前,初中二年级的学生已经学习了将近一学期的平面几何的知识,并且进入学期总复习的阶段了。怎样在这最后阶段把他们的学习质量,在原有的基础上提高一步,这是教初二几何的老师们共同关心的问题。在这里愿意谈谈我们的一些点滴体会以供参考,并请指教。

回顾这学期初二几何教学的主要要求不外以下三个方面:
使学生对概念要明确,语言的表达和实际理解要一致,并且能初步地从概念出发来考虑问题。

一、使学生对概念要明确,语言的表达和实际理解要一致,并且能初步地从概念出发来考虑问题。

二、使学生能分清定理的条件和结论;了解定理的应用范围;分清正定理和逆定理、性质定理和判定定理,并能正确的运用。

三、使初步掌握解题的基本方法。

1. 分清题目的类型,并能区分出"已知"和“求证”、“已知”和“求解”、“已知”和“求作”以及各类题目的书写格式。

2. 在解题过程中,能初步掌握两种思考问题的方法:分析法和综合法。

3. 了解反证法的意义,以及反证法的步骤。

4. 初步掌握添加辅助线的方法。

5. 能根据题意画出正确的图形。

6. 能利用算术的知识或代数的知识(已学的)来解有关几何中