中小学教师参考丛书

高中数学专题教学

主　编　翟连林　傅　立
副主编　王乾岭　李廷修
马宝奇　姚正安
田经一　庞金典

光明日报出版社

高中数学专题教学

主　编　翟连林　傅　立

副主编　王乾岭　李廷修　马宝奇

姚正安　田经一　庞金典

审　订　言　目

光明日报出版社

（京）新登字101号

高中数学专题教学

主　编　翟连林　傅　立
副主编　王乾岭　李廷修　马宝奇
　　　　姚正安　田经一　庞金典

•
光明日报出版社出版发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
天津市宁河县印刷厂印刷
•
787×1092毫米　32开本　8.5印张　185千字
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
印数1—9400　定价：3.80元
ISBN 7—80091—202—7/G・491

前　言

专题教学集知识归纳、方法揭示、能力培养于一体，是阶段或单元教学中重要的环节。

本书的编写，紧扣高中数学教材内容和大纲精神，以突出重点、抓住关键、解决难点、培养能力为宗旨，在认真总结多年的教学经验及对历届高考试题全面分析的基础上，精心选择了十六个专题进行论述和归纳，并附有检查性的四套综合题。

专题内容源于课本、突出双基，坚持少而精，启发式的原则。例题典型、新颖、活泼，分析精辟、富有启发性。解答与说明注重知识的联系及应用，注重规律、方法、技巧的归纳和总结。每个专题配有精心设计并给出解答的问题，这些问题或为专题内容的继续，或用于巩固、提高的训练，成为专题教学中不可分割的一部分。

本书可作为专题教学教材或参考资料。

限于编者的水平，加之时间仓促，谬误之处难免，敬请读者指正。

编　者

1992年1月

目　　录

一、集合与映射的综合应用

张玉云　侯光林

函数是数学研究的一个极其重要的对象，而集合与映射则是研究函数的基础。

§ 1.1　集合与映射

例1　设二次方程$x^2-px+15=0$的解集为A，$x^2-5x+q=0$的解集为B，当$A\cup B=\{2,3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$时，求集合A和B，再求p、q的值。

【解】　法一　已知$x^2-px+15=0$的一根为3，设另一根为$\bar{x}$，则由韦达定理知$3\bar{x}=15$。解之，得$\bar{x}=5$，从而有$A=\{3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3\}$。再由韦达定理可得$p=3+5=8$，$q=2\times3=6$。

法二　由$x=3$是二次方解的解，将$x=3$代入二次方程，得$9-3p+15=0$，解之，得$p=8$；$9-15+q=0$，解之，得$q=6$，再由方程

$$\begin{cases} x^2-8x+15=0, \\ x^2-5x+16=0, \end{cases}$$ 得解集$A=\{3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3\}$。

例2　高中一年级学生共有48人参加了数学小组或物理小组，其中参加数学小组的有32人，参加物理小组的有28人，问同时参加数学小组和物理小组的有多少人？

【分析】　用A表示数学小组，B表示物理小组，n_A，

n_B分别表示A，B的人数，现在要求的是$A\cap B$的人数。

$n_{A\cap B}=n_A+n_B-n_{A\cap B}$。

【解】 用A、B分别表示数学、物理小组，则

$$n_{A\cap B}=n_A+n_B-n_{A\cup B}=28+32-48=12$$

即同时参加数学和物理小组的有12人。

例3 已知全集$I=\{$一切小于15而能被2整除的自然数$\}$，$A=\{$在1与15之间的4的倍数$\}$，$B=\{x|x^2-6x+8=0\}$，求$\overline{A}\cup B$及$\overline{A}\cup B$的真子集的个数。

【分析】 已知一个集合的元素的个数为n，则它有如下形式的真子集：空集、含一个元素的真子集，含两个元素的真子集，…，含$n-1$个元素的真子集。

它们的个数分别为C_n^0，C_n^1，C_n^2，…，C_n^{n-1}。

【解】 $I=\{2,4,6,8,10,12,14\}$，$A=\{4,8,12\}$，$B=\{2,4\}$，由此

$\overline{A}=\{2,6,10,14\}$，$\overline{A}\cup B=\{2,4,6,10,14\}$。

其所有真子集个数为

$$N=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=2^5-1=31.$$

例4 A表示函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域，B表示此函数的值域，试给一个从A到B的1-1对应，并给出其逆映射。

【分析】 一般函数的定义域皆为区间或区间的交、并，而从区间到区间的1-1对应最简单的莫过于线性函数，例如，若$A=[a,b]$，$B=[c,d]$，我们用线性函数$y=mx+n$表示从A到B的1-1对应，则应有

$$\begin{cases}ma+n=c,\\mb+n=d,\end{cases}\text{当然也可有}\begin{cases}ma+n=d,\\mb+n=c.\end{cases}$$

解之即得。

【解】 根据题设隐含条件必须有

$1-x^2\geqslant 0$，即$|x|\leqslant 1$。

所以得$A=[-1,1]$，由此亦可得$B=[0,1]$。

注意：$y=\sqrt{1-x^2}$不是$A=[-1,1]$到$B=[0,1]$的$1-1$对应。下面我们用线性函数来给出$1-1$对应，设此$1-1$对应为$y=ax+b$，

且在此对应下$-1\to 0$，$1\to 1$，于是有以下的关系式：

$$\begin{cases}-a+b=0,\\ a+b=1.\end{cases}$$ 解之，得$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，

即 $y=\frac{1}{2}(x+1)$是$A=[-1,1]$到$B=[0,1]$的$1-1$对应。

显然$x=2y-1$，$y\in[0,1]$是$y=\frac{1}{2}(x+1)$，$x\in[-1,1]$的逆映射（或称之为反函数）。

例5 函数$f(x)$对于$x>0$有意义，且满足条件：$f(2)=1$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x)$是非减函数，试解答：（1）证明$f(1)=0$；（2）若$f(x)+f(x-3)\geqslant 2$成立，求x的取值范围。

【分析】 在已知函数方程（所给关系式）时，有时采取代入特殊值的方法。如令$x=y=1$可得$f(1)=f(1)+f(1)$再就是反复利用关系式和已知条件。

【解】 （1）在$f(xy)=f(x)+f(y)$中，令$x=y=1$，得$f(1)=f(1)+f(1)$，故$f(1)=0$。

（2）由$x>0$且$x-3>0$，知$x>3$ ①，又因为$f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x)$，而由条件$f(2)=1$，得$2=f(2)+f(2)=f(4)$，于是有$f(x^2-3x)\geqslant f(4)$ 再由$f(x)$非减，及上式，得$x^2-3x\geqslant 4$，亦即$x\geqslant 4$或$x\leqslant -1$ ②。

综合①、②，得$x\geqslant 4$。

习　题

1.已知全集$I=\{x|-\infty<x<+\infty\}$, $A=\{x|\cos x<\frac{1}{2}\}$, $B=\{x|x^2-36\leqslant 0\}$，求$A\cap B$。

2.已知二次方程$(\sin\theta)x^2+(2\cos\theta)x+\cos\theta=0$有两个根，求$\theta$的范围，并给出一个从此范围到$(0, 2)$的单值映射。

3.已知函数$f(x)=x^2+px+q$，集合A，B分别是$A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f(x)=x+1\}$，当$A=\{2\}$时，求集合B。

4.设x轴上的点的集合$X=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$，$y$轴上的点的集合$Y=\{y|1\leqslant y\leqslant 4\}$。给出一个从$X$到$Y$的1－1对应，并求此对应的逆对应。

5 设$A=[-1, 0)\cup[1,2]$，$B=[0,2]$，映射f：$A\to B$使B中元素$y=|x|$和A中元素x对应.试证明f：$A\to B$是1－1对应，并求出其逆映射。

解　答

1.由$\cos x<\frac{1}{2}$，得$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<(2k+1)\pi+\frac{2}{3}\pi$ $(k\in Z)$。另由$x^2\leqslant 36$，得$-6\leqslant x\leqslant 6$。由此$\bar{A}$中的点满足$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，于是有

$$\bar{A}\cap B=\left[-6, -\frac{5\pi}{3}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}, 6\right].$$

2.依题意，有$\sin\theta\neq 0$，且$\Delta=4\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta$

$\geqslant 0$，

则 $\begin{cases}\cos\theta\geqslant 0,\\ \cos\theta\geqslant\sin\theta,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta\leqslant 0,\\ \cos\theta\leqslant\sin\theta,\end{cases}$ 且 $\sin\theta\neq 0$。

解之，得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 且 $\theta\neq 2k\pi(k\in Z)$ 或

$2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 且 $\theta\neq(2k+1)\pi(k\in Z)$，即

$$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},\ 2k\pi\right)\cup\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]\cup$$

$$\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},\ (2k+1)\pi\right)\cup\left(2(k+1)\pi,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right].$$

其中 $k\in Z$。令 $y=2\sqrt{2}|\sin x|$，即是从此集到 $(0,\ 2]$ 的一个单值映射。

3.由 $f(x)=x$，得 $x^2+(p-1)x+q=0$。若 $A=\{2\}$，则有 $p-1=2+2$，$q=2\times 2$，得 $p=5$，$q=4$，于是 $f(x)=x+1$，即为 $x^2+4x+3=0$，所以 $B=\{1,\ 3\}$。

4.令 $y=3x-5$，即是从 $[2,\ 3]$ 到 $[1,\ 4]$ 的1－1对应，其逆对应为 $x=\dfrac{y+5}{3}$，$y\in[1,\ 4]$。

5.由题设知：

$$y=\begin{cases}-x\ (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ x\ (1<x\leqslant 2).\end{cases}$$

作这个函数的图象如图1－1所示，从图象知 f 是 A 到 B 的满射，且是单射，故其逆映射存在，为：

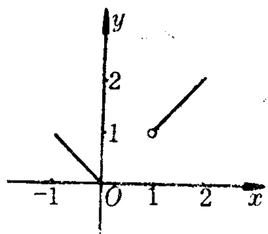

图1－1

$$x=\begin{cases}y,\ y\in(1,\ 2]\\ -y,\ y\in[0,\ 1]\end{cases}$$

§1.2 用映射思想解综合题

例1 已知$f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=3\sin x+2$，求$f(g(x))$的最大值和最小值，并求最值点。

【分析】 此类型的题实际上只须求出$g(x)$的值域，再在此值域为定义域的函数$f(u)$上考虑最值问题。

【解】 由$-1\leqslant g(x)\leqslant 5$，而$f(u)=u^2-2u+3$，在区间$[-1,5]$上可取到最小值$f(1)=2$。

此外由$f(-1)=6$，$f(5)=18$，知$f(u)$在$u=5$取到最大值18。

下面讨论最值点：

（1）当$3\sin x+2=1$时，$\sin x=-\frac{1}{3}$，于是$x=2k\pi-\arcsin\frac{1}{3}$或$x=(2k+1)\pi+\arcsin\frac{1}{3}(k\in Z)$为最小值点。

（2）当$3\sin x+2=5$，即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$为$f(g(x))$的最大值点。

例2 为使方程$\cos^2x-\sin x+a=0$在$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$内有解，求$a$的取值范围。

【分析】 想法统一方程中函数的形式，利用三角公式$\cos^2x=1-\sin^2x$即可。

【解】 原方程变为$\sin^2x+\sin x-a-1=0$。

令$t=\sin x$，则当$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时$0<t\leqslant 1$，因此原题可化为在$0<t\leqslant 1$内，方程$t^2+t-a-1=0$有解，求$a$。

设$f(t)=t^2+t-a-1$，它的对称轴方程为$x=-\frac{1}{2}$，所以，在$0\leqslant x\leqslant 1$内，$f(x)$是单调增函数，因此

$$\begin{cases} f(0)=-a-1<0, \\ f(1)=1-a\geqslant 0. \end{cases} \text{解之，得 } -1<a\leqslant 1.$$

【注】 此题不仅要作变换而且须根据一元二次函数抛物线的单调性来讨论问题。所以解决此类问题必须弄清一些初等函数的特性以及图象的特征。

例3 曲线$x^2+y^2-y=0$与$ax^2+bxy+x=0$的图象有且仅有三个不同的交点，那么实数a，b应满足什么条件？

【分析】 本题是集合与解析几何的综合题，注意曲线的图形有交点，也就是方程组有解。

【解】 方程$x^2+y^2-y=0$可变形为$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

其图形是以$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$为圆心，以$\frac{1}{2}$为半径的圆。

方程$ax^2+bxy+x=0$可变形为$x(ax+by+1)=0$.
其图象是两条直线$x=0$和$ax+by+1=0$.

考虑到y轴$(x=0)$与曲线$x^2+y^2-y=0$有两个交点$O(0,0)$和$A(0,1)$，按题意，直线$ax+by+1=0$只能与曲线$x^2+y^2-y=0$有异于点O，A的一个公共点，可分两种情形：

(1) 直线$ax+by+1=0$与圆$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$相切，且切点异于$O$，$A$，为此只有$a\neq 0$，否则切点将为$O$，$A$.

由直线与圆相切，知圆心到直线的距离是$\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{\left|a\cdot 0+b\cdot\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}$$，化简、整理，得$a^2=4b+4$。

（2）直线$ax+by+1=0$与圆相交，其中有一个交点为A，但直线不与y轴重合。

由$A(0,\ 1)$在直线$ax+by+1=0$上，所以$a\cdot 0+b\cdot 1+1=0$，即$b=-1$。又由原点O的坐标不适合方程$ax+by+1=0$，所以直线不可能经过原点而与圆相交。

由（1）、（2）讨论，知a、b之关系式为

$$\begin{cases}a\neq 0,\\ a^2=4b+4,\end{cases}\quad 或\begin{cases}a\neq 0,\\ b=-1.\end{cases}$$

【注】 在相切情形亦可由$x=-\frac{by+1}{a}$代入$x^2+y^2-y=0$，得关于y的二次方程，再由判别式$\Delta=0$亦可得关系式$a^2=4b+4$。

例4 （1）若规定记号$f_n(x)=f\{f[f\cdots f(x)]\}$，其中$n\in N$，当$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$时，求$f_n(x)$。

（2）设$f(n)=2n+1$，

$$g(n)=\begin{cases}3, & 当n=1时\\ f[g(n-1)], & 当n\geqslant 2时\end{cases}$$

其中$n\in N$，求函数$g(n)$的表达式。

【分析】 这是函数中的递推题，必须根据函数表达式反复递推，最后用数学归纳法证之。

【解】（1）当$n=2$时，

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}},$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}.$$

应用数学归纳法：

设$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1-kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-kx^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-(k+1)x^2}}.$$

所以$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$.

（2）$g(1)=3$,

$g(2)=2g(1)+1=2\times3+1=7$,

$g(3)=2g(2)+1=2(2\times3+1)+1=15$,

$g(4)=2g(3)+1=2[2(2\times3+1)+1]+1=31$,

……

$g(n)=2g(n-1)+1$

$\quad=2(2(2(2\cdots(2\times3+1)+1)+1\cdots+1)+1$

$=2^{n-1}\cdot3+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1$

$$=3\times2^{n-1}+\frac{2^{n-2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$=4\times2^{n-1}-1=2^{n+1}-1$。

利用数学归纳法证明此结论：

当$n=1$时，$g(1)=3$，正确。

设$n=k$时，正确，即$g(k)=2^{k+1}-1$。则当$n=k+1$时，

$g(k+1)=f[g(k)]=2g(k)+1$

$=2(2^{k+1}-1)+1=2^{(k+1)+1}-1$，也正确。

例5 已知R是全体实数，函数$f(x)=x^2+ax+b(a,\ b\in R)$。而$A=\{x|x=f(x)$且$x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],\ x\in R\}$。

（1）证明：$A\subseteq B$；

（2）当$A=\{-1,\ 3\}$时，B将是一个什么样的集合？列出它的元素。

【分析】 此题涉及二次方程，应根据根与系数的关系式解题。

【解】 （1）若$x\in A$，则$f(x)=x$，从而$f(f(x))=f(x)=x$，所以有$x\in B$。

（2）当$A=\{-1,\ 3\}$时，根据根与系数的关系可知由于-1，3是方程$x^2+(a-1)x+b=0$的根，则有

$$\begin{cases} a-1=-(-1+3), \\ b=(-1)\times 3. \end{cases}$$ 于是有$a=-1$，$b=-3$。

由此$f(x)=x^2-x-3$，于是有

$f(f(x))=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$

$=(x^2-x-3)^2-x^2+x$，

从而方程$f(f(x))=x$为$(x^2-x-3)^2-x^2=0$，

即 $(x^2-x-x-3)(x^2-x-3+x)=0$，亦即$(x^2-2x-3)\cdot(x^2-3)=0$，

于是有$B=\{-1,\ 3,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$。

习　　题

1.设$y=ax+2a+1$，当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，y的值有正有负，则实数a应满足什么条件？

2.求方程$\frac{x}{100}=\sin x$的实数解的个数.

3.已知$f[f(x)]=\frac{x+1}{x+2}$，求$f(x)$.

4.设x的函数$y=1-2a-2a\cos x-2\sin^2 x$有最小值$f(a)$，$a\in R$.

（1）试用a写出$f(a)$的表达式；

（2）试决定能使$f(a)=\frac{1}{2}$的a值，对此a求y的最大值.

5 在边长为4的正方形$ABCD$上有一点P（如图1－2），沿着折线$BCDA$由B点（起点）向A点（终点）移动.设P点移过的路程为x，$\triangle ABP$的面积为$y=f(x)$.

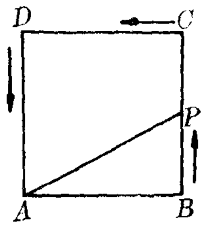

图1－2

（1）求$f(x)$的分段表示式；（2）作出$f(x)$的图象；（3）如果存在反函数，试找出它的反函数；如果不存在反函数，则说明不存在反函数的理由.

解　　答

1.由线性函数的单调性和题所给条件有

$$(\mathrm{I})\begin{cases}y(-1)=a+1<0,\\ y(1)=3a+1>0;\end{cases}\quad(\mathrm{II})\begin{cases}y(-1)=a+1>0,\\ y(1)=3a+1<0\end{cases}$$