新世纪百科
知识金典
XINSHIJI
BAIKE ZHISHI
JINDIAN

重庆出版社

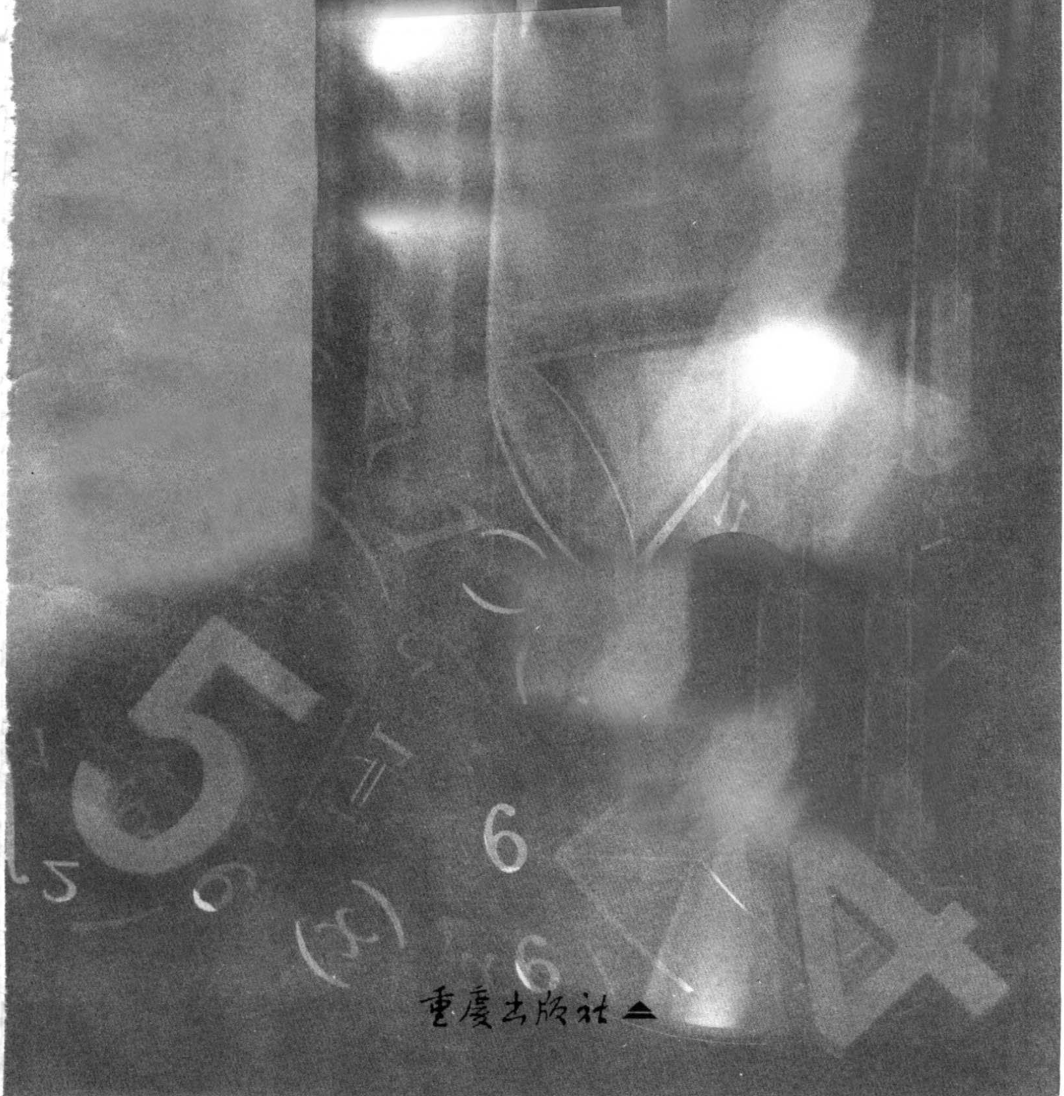
初中数学
试题评析

张惠莉 主编

新世纪百科
知识金典
XINSHIJI
BAIKE ZHISHI
JINDIAN

初中数学试题评析

张惠莉 主编



重庆出版社

责任编辑　**黄友六**
封面设计　**金乔楠**
技术设计　**刘黎东**

新世纪百科知识金典

初中数学试题评析

张惠莉　主编

重庆出版社出版、发行　（重庆长江二路205号）
新 华 书 店 经 销　重庆新华印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张6.5　插页4　字数166千
1999年4月第一版　1999年4月第一版第一次印刷
印数:1—5,000

*

ISBN 7-5366-4175-3/G·1456
定价:10.20元

漫游数学花园
其乐无穷

朱玉

朱玉：浙江师范大学校长、数学教授。

新世纪百科知识金典

◆ **顾　问**（以姓氏笔画为序）：

马少波　王伯敏　刘厚生　乔　羽
冰　心　全山石　江　平　杨子敏
李家顺　张岱年　张振华　柯　灵
柳　斌　铁木尔·达瓦买提
桑　弧　桑　桐　秦　怡　蒋孔阳
翟泰丰　蔡子民　滕　藤　滕久明
戴爱莲　魏　巍

◆ **总主编**：

张　虞　李书敏

◆ **副总主编**：

许友梅　陈金才　熊静敏　黑淑琴
蒲华清　薛振安　柏家栋　傅之悦

◆ **总编委**（以姓氏笔画为序）：

文晓村　王中玉　叶延滨　曲　炜
许友梅　陈金才　吴申耀　李书敏
李荣昌　沈　寂　张　虞　张文槐
杨　巍　郑达东　郑可仲　单树瑶
柏家栋　钟代福　徐卓平　夏树人
梁子高　曾如信　傅之悦　黑淑琴
蒲华清　缪新亚　熊静敏　薛振安

主　编:张惠莉
副主编:许鸣岐
撰　稿:张惠莉　许鸣岐
　　　李道洲　施佩梅

总序

翟泰丰

21世纪就在眼前。我们既要把握中华民族全面振兴的极好机遇，同时又要迎接世界各国综合国力主要是经济力的激烈竞争。科技是第一生产力，发展高科技是在综合国力竞争中立于不败之地的关键所在。培养一代有理想、有道德、有文化、有纪律的公民，在综合国力激烈竞争中赢得胜利，是决定中华民族命运的大事。

党的十五大为建设有中国特色社会主义的伟大事业绘制了宏伟的蓝图，赋予了教育文化战线的同志为建设有中国特色社会主义文化而奋斗的光荣任务。青少年是中华民族全面振兴的希望，因此，加强对青少年的教育就提到了全社会的面前。除了课堂的“传道授业”外，更要重视教育与改革开放的伟大实践相结合，面向现代化，面向世界，面向未来，教育青少年树立为中华民族全面振兴而奋发努力的使命感和责任感，托起明天的太阳。

“书籍是人类进步的阶梯”。好的书籍，是精神文明的营养素，是青少年的精神粮食，它在思想道德建设和文化建设中有着不可替代的作用，也是进行科学普及、社会教育和信息传播的重要工具。

改革开放以来，出版了一系列高品位的青少年读物，取得了

很大成绩，但和时代要求相比，同亿万青少年的需要相比，还是远远不够的。一些见利忘义之徒，千方百计制造不堪入目的黄、灰、黑出版物，通过种种非法渠道，流入一些学生的书包课桌，毒害他们的心灵，令人扼腕。形势要求新闻出版界、教育科技界、文化艺术界的同志不断努力，创作编写出更多、更好的内容丰富、情趣高尚的青少年读物。

《新世纪百科知识金典》是一批在教育、文化战线上工作了多年的同志策划组织的。他们辛勤劳作，团结协作，历时三年编写出来。该书包容了许多学科的知识，有别于辞条式的编写方式，把知识的介绍与赏析融为一体，既是传统美德的传播、新知识的普及，又是对前人积累下的知识财富的学习鉴赏，也是迎接21世纪，普及文化科学知识的展示。这是一套兼具思想性、新鲜性、知识性、趣味性特点的读物，其中有许多知识，对青少年来说可能还是陌生的、新鲜的，在日常生活中经常“会面”，而又不知其所以然，本书正可以扫除一些盲点，弥补知识的不足。

这么多同志默默无闻地耕耘着这方土地，可谓功德无量。无怪乎许多专家学者、前辈名家对这套书给予热情指导与支持，并乐意为每个分册命笔题词。

我希望《新世纪百科知识金典》编写出版会受到广大青少年读者的欢迎，成为青少年喜爱的良师益友，我也希望有更多的同志为广大的青少年创造更多更好的精神粮食。

1998年2月

目录

一、实数、代数式

[题 1]　计算下列各式,把运算的结果用科学记数法表示:

(1) $(5.2\times10^{8})\times(6\times10^{6})$;

(2) $(-2\times10^{-10})\div(4\times10^{3})$.

解: (1) $(5.2\times10^{8})\times(6\times10^{6})=5.2\times6\times10^{8}\times10^{6}$

$=31.2\times10^{14}$

$=3.12\times10^{15}$.

(2) $(-2\times10^{-10})\div(4\times10^{3})=-2\div4\times(10^{-10}\div10^{3})$

$=-0.5\times10^{-13}$

$=-5\times10^{-14}$.

评析　有关科学记数法的数字运算结果仍应用科学记数法表示.

[题 2]　$\sqrt{\left(-6\frac{1}{4}\right)^{2}}$的平方根是(　　)

(A) $-6\frac{1}{4}$.　　(B) $\pm6\frac{1}{4}$.

(C) $2\frac{1}{2}$.　　(D) $\pm2\frac{1}{2}$.

解: 由$\sqrt{\left(-6\frac{1}{4}\right)^{2}}=\left|-6\frac{1}{4}\right|=6\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$,而$\frac{25}{4}$的平方根

是$\pm\frac{5}{2}=\pm2\frac{1}{2}$,所以选D.

评析 注意$\left(-6\frac{1}{4}\right)^2$的平方根与$\sqrt{\left(-6\frac{1}{4}\right)^2}$的平方根的区别.又由于$\sqrt{\left(-6\frac{1}{4}\right)^2}$是一个正实数,因此它的平方根应是两个互为相反的数.

[题3] 求$\sqrt{m^2-4m+4}$的平方根.

解: 因为$\sqrt{m^2-4m+4}=\sqrt{(m-2)^2}=|m-2|$,所以

当$m\geqslant2$时,$\sqrt{m^2-4m+4}$的平方根是$\pm\sqrt{m-2}$;

当$m<2$时,$\sqrt{m^2-4m+4}$的平方根是$\pm\sqrt{2-m}$.

评析 在二次根号下的被开方式必须是非负实数.本题中的$|m-2|$是非负实数,它的平方根是存在的,但应分清$m-2$是正、负或零,为此按$m\geqslant2$及$m<2$两种情况加以讨论解题.

[题4] 如果$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$,求$\frac{2x-3xy-2y}{x+xy-y}$的值.

解: 由$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$,得$\frac{y-x}{xy}=5$,$x-y=-5xy$,其中$x\neq0$,$y\neq0$.因此

$$\frac{2x-3xy-2y}{x+xy-y}=\frac{2(x-y)-3xy}{(x-y)+xy}=\frac{2(-5xy)-3xy}{-5xy+xy}$$
$$=\frac{-13xy}{-4xy}=3\frac{1}{4}.$$

评析 由条件知x、y都不可能为零,因此可把所求式子中的$x-y$转化为关于xy的式子,而后求得式子的值.这是一种条件转化的方法.

[题5] 已知 $x^2-5x+1=0$,求下列各式的值:

(1) $x+\frac{1}{x}$; (2) $x^2+\frac{1}{x^2}$; (3) $x^3+\frac{1}{x^3}$.

解：(1) 已知 $x^2-5x+1=0$，则 $x\neq0$，$x^2+1=5x$，两边同除以 x，得 $x+\dfrac{1}{x}=5$.

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=5^2-2=23.$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=5(23-1)=110.$

评析　由 $x^2-5x+1=0$ 得知 $x\neq0$，因此两边可以同时除以 x 而求得 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值，继而利用 $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$，求得 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 及 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的值.类似地可求 $x^4+\dfrac{1}{x^4}$、$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ 等的值.

[题 6]　已知 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$，求 $\dfrac{3x^2-2xy+z^2}{4x^2+yz-y^2}$ 的值.

解：设 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k$，则 $x=3k$，$y=4k$，$z=5k$.因此

$$\frac{3x^2-2xy+z^2}{4x^2+yz-y^2}=\frac{3(3k)^2-2(3k)(4k)+(5k)^2}{4(3k)^2+(4k)(5k)-(4k)^2}=\frac{28k^2}{40k^2}=\frac{7}{10}.$$

评析　由已知 x、y、z 的连比，求分子、分母是关于 x、y、z 的二次式的式子的值，为此可利用设比值为 k 来进行计算.这是利用比值进行转化的方法.

[题 7]　已知 $x=\dfrac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}$，$y=\dfrac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-\sqrt2}$，求多项式 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

解：$x=\dfrac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}=\dfrac{(\sqrt3-\sqrt2)^2}{(\sqrt3+\sqrt2)(\sqrt3-\sqrt2)}=5-2\sqrt6$，

$y=\dfrac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-\sqrt2}=\dfrac{(\sqrt3+\sqrt2)^2}{(\sqrt3-\sqrt2)(\sqrt3+\sqrt2)}=5+2\sqrt6$，

所以 $3x^2-5xy+3y^2=3(x^2-2xy+y^2)+xy$

$=3(x-y)^2+xy$

$=3[5-2\sqrt{6}-(5+2\sqrt{6})]^2+(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})$

$=3(-4\sqrt{6})^2+(25-24)=289.$

评析 由已知条件分别把 x、y 化简后得知它们是共轭根式,因此在求值过程中充分利用共轭根式的性质使运算简便.

[题 8] 已知 $|x+2|+\sqrt{y-3}=0$,求 $(x+y)^3-xy$ 的值.

解: 已知 $|x+2|+\sqrt{y-3}=0$,则有 $\begin{cases}x+2=0,\\y-3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$ 因此

$$(x+y)^3-xy=(-2+3)^3-(-2)\times 3=1+6=7.$$

评析 两个非负实数之和为零,则这两个非负实数都为零.本题由此先求得 x、y 的值,使题得解.类似的如有条件 $|x+2|+|y-3|=0$,$\sqrt{x+2}+\sqrt{y-3}=0$,$(x+2)^2+(y-3)^2=0$ 等,都可利用此性质先求出 x、y 的值来.

[题 9] 已知:$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2\sqrt{y}(\sqrt{x}+3\sqrt{y})$.

求:$\dfrac{3x+\sqrt{xy}-y}{x+\sqrt{xy}+3y}$ 的值.

解: $\because$ $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2\sqrt{y}(\sqrt{x}+3\sqrt{y})$,

则 $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}-6(\sqrt{y})^2=0$.

$\therefore$ $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})=0$.

$\therefore$ $\sqrt{x}=-2\sqrt{y}$(不合,舍去),

$\sqrt{x}=3\sqrt{y}$.

因此 $\dfrac{3x+\sqrt{xy}-y}{x+\sqrt{xy}+3y}=\dfrac{3(3\sqrt{y})^2+3(\sqrt{y})^2-y}{(3\sqrt{y})^2+3(\sqrt{y})^2+3y}=\dfrac{29}{15}$.

评析 本题从已知条件知 $x\geqslant0,y\geqslant0$，再从已知等式先求得$\sqrt{x}$与$\sqrt{y}$之间的等量关系，使题得解.

[题 10] 已知 $\begin{cases}a+b+c=0,\\a^2+b^2+c^2=1,\end{cases}$ 求 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

解： $\because$ $a+b+c=0,$ ①

$a^2+b^2+c^2=1,$ ②

①的两边平方，得

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0.$ ③

②代入③，得 $ab+ac+bc=-\dfrac{1}{2}.$ ④

②的两边平方，得 $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=1.$ ⑤

④的两边平方，得 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2=\dfrac{1}{4}$，即

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}. \quad ⑥$$

①代入⑥，得 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\dfrac{1}{4}.$ ⑦

⑦代入⑤，得 $a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

$=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}.$

评析 本题中有三个未知数，但仅只两个关系式，一般不可能求出这三个字母的具体数值.因为所求的是这三个字母的四次方的和，而已知的是三个字母的一次的和及平方的和，所以可以通过恒等变换来求解.

[题 11] 已知 $a=2+m^{-3}$，求 $m^{-6}-2am^{-3}+a^2$ 的值.

解： 已知 $a=2+m^{-3}$，两边平方，得 $a^2=4+4m^{-3}+m^{-6}$.

$\therefore$ $m^{-6}-2am^{-3}+a^2=m^{-6}-2m^{-3}(2+m^{-3})$

$$+(4+4m^{-3}+m^{-6})$$
$$=m^{-6}-4m^{-3}-2m^{-6}+4+4m^{-3}+m^{-6}=4.$$

评析 本题已知条件中是 a 和 m 的关系式，而需求值的代数式中也是 a 和 m 的关系式，因此从已知条件中选出一个字母用含另一个字母的代数式表示后，代入需求值的式子中而得到需求的值.

[题 12] 已知：$x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$（a、b 是常数）.

求：$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$的值.

解： 由题知 $a-x\geqslant 0$，而 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$，

$\therefore\ a-\dfrac{2ab}{b^2+1}\geqslant 0$， 即 $\dfrac{a(b^2+1-2b)}{b^2+1}\geqslant 0$.

由 $b^2+1>0$，$(b^2+1-2b)=(b-1)^2\geqslant 0$， $\therefore\ a>0$.

因此，
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a+\dfrac{2ab}{b^2+1}}+\sqrt{a-\dfrac{2ab}{b^2+1}}}{\sqrt{a+\dfrac{2ab}{b^2+1}}-\sqrt{a-\dfrac{2ab}{b^2+1}}}$$
$$=\frac{\sqrt{\dfrac{a(b+1)^2}{b^2+1}}+\sqrt{\dfrac{a(b-1)^2}{b^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{a(b+1)^2}{b^2+1}}-\sqrt{\dfrac{a(b-1)^2}{b^2+1}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}(|b+1|+|b-1|)}{\sqrt{\dfrac{a}{b^2+1}}(|b+1|-|b-1|)}$$
$$=\frac{|b+1|+|b-1|}{|b+1|-|b-1|}=\begin{cases}b & (b\leqslant -1\text{ 或 }b\geqslant 1);\\ \dfrac{1}{b} & (-1<b<1).\end{cases}$$

评析 本题由已知推得 $a>0$，因而$\sqrt{a}>0$，则化简过程中可以约简后使求值简便.这说明充分发掘已知中隐含条件的重要性.

［题 13］ 化简：$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

解： $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

$=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$.

当$\sqrt{x-1}\geqslant 1$,即 $x\geqslant 2$ 时，

原式$=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$；

当$\sqrt{x-1}<1$,即$1\leqslant x<2$时，

原式$=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2$.

评析 本题中两个被开方式中都含有 $2\sqrt{x-1}$,这具有完全平方式的条件，由此利用完全平方式的平方根进行化简．

［题 14］ 把下列各式分解因式：

(1) $2m^2x^2-4mx-4ny-2n^2y^2$；

(2) x^4-13x^2+36.

解：(1) $2m^2x^2-4mx-4ny-2n^2y^2$

$=2[(m^2x^2-n^2y^2)-2(mx+ny)]$

$=2[(mx+ny)(mx-ny)-2(mx+ny)]$

$=2(mx+ny)(mx-ny-2)$.

(2) x^4-13x^2+36

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$.

评析 本题中的因式分解，一个是四项式的因式分解，且有公因式可提取，因此先提取公因式而后用分组分解法分解因式；一个是四次三项式，且是双二次形式，因此应用十字相乘法分解因式，且指出了分解因式应按数的范围分解到不可能再分解为止．

[题 15] 因式分解： $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$.

解法一： $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$

$=(2x-3y)(3x+y)-x+7y-2$

$=(2x-3y+1)(3x+y-2)$.

解法二： $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$

$=6x^2-(7y+1)x-(3y^2-7y+2)$

$=6\left(x-\dfrac{3y-1}{2}\right)\left(x-\dfrac{-y+2}{3}\right)$

$=(2x-3y+1)(3x+y-2)$.

评析 类似本题中的多项式在整式范围内可以分解因式时可有不同的分解方法.解法一是两次利用十字相乘法进行因式分解的,比较简捷,但必须熟练十字相乘法.解法二是把原题整理成 ax^2+bx+c 的二次三项式形式,利用求根公式法进行因式分解的.在求根时运算较繁,但只要具备判别式是一个完全平方式的条件,总可以利用求根公式法进行因式分解.

[题 16] 把下列各式分解因式：

(1) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2+2y^2z^2$;

(2) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

解：(1) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2+2y^2z^2$

$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-2z^2(x^2-y^2)+z^4$

$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4$

$=(x^2-y^2-z^2)^2$.

(2) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$

$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$