初中

数学基础知识

CHUZHONG
SHUXUE JI
CHUZHISHI

新蕾出版社

初中数学基础知识

北京二中数学教研室编

新蕾出版社

文字责编：陈世伟
美术责编：郭占魁

初中数学基础知识
北京二中数学教研室　编

新蕾出版社出版
天津新华印刷一厂印刷
天津市新华书店发行
开本787×1092毫米　1/32　印张10　字数210,000
1984年1月修订第1版　　1984年1月第1次印刷
印数：1—327,000
统一书号：R7213·202　定价：0.81元

说　　明

本书曾于八二年十二月初版。再版时注意到初中数学教材的变动，对本书内容作了适当的修改。在习题部分增加了相当数量的基础练习题目，对难度稍大、综合性较强的习题作了筛选。

本书根据《全日制十年制学校数学教学大纲（试行草案）》及现行课本编写而成。全书分为两大部分：代数（代数、平面三角初步）和平面几何。共十二章。每章包括内容提要、范例及习题三个部分。内容提要是对重要的概念、定理、公式和法则进行归纳和整理；例题的选取注意精练、有代表性，解法详尽，格式步骤力求规范，多数例题附有多种解法，并说明解题思路和注意事项；习题注重基础练习，含有少量难度稍大和综合性较强的题目。每章习题均附答案或提示。

本书附有综合练习五组，每组习题均有详尽解答，便于读者自我检查。

本书力求适合平时教学的要求，涉及知识力求系统、完整、全面。

本书可供初中学生和自学青年学习数学时参考。

参加本书编写和再版修订工作的有韩本如、王祯祥、韩

乐明、王福生、陈铭华、郭文贤、陈灵敖、梁寿山、赵秀春、梁新儒、梁瑛等。

对于本书内的缺点错误，欢迎批评指正。

编　者

一九八三年九月

目　　录

代　　数

平 面 几 何

代　数

第一章　实　数

一　有关数的基本概念

1．**自然数**　表示物体个数的1，2，3…等叫做自然数．显然，自然数的个数是无限的；最小的自然数是1，没有最大的自然数．

2．**整数**　包括正整数、零和负整数．

3．**有理数**　形如$\frac{p}{q}$（p、q是整数，且$q\neq 0$）的数叫做有理数．若用小数形式表示，那么有理数一定是有限小数或者循环小数．

4．**无理数**　无限不循环小数叫做无理数．

显然，无理数不能用$\frac{p}{q}$（p、q是整数，且$q\neq 0$）来表示。

5．**实数**　有理数和无理数统称实数．

实数的分类如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数（正分数和负分数）
      - 有限小数
      - 循环小数
  - 无理数（正无理数和负无理数）——无限不循环小数．

6． **数轴** 规定了正方向、原点和长度单位的直线叫做数轴．

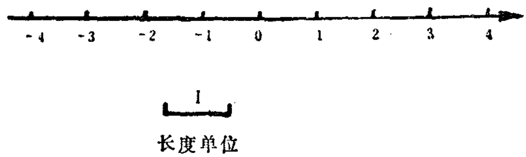


图 1-1

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的．

7． **相反数** 只有符号不同的两个数叫做互为相反数．（如果a是任何一个实数，那么它的相反数用$-a$来表示．零的相反数是零．）

8． **绝对值** 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．即

$$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\ -a(a<0).\end{cases}$$

$|a|$的几何意义是数a在数轴上的对应点到原点的距离．

9． **倒数** 如果两个数的积等于1，那么它们叫做互为倒数．（零没有倒数）

10． **算术根** 在实数范围内，一个正数的正的n次方根叫做这个正数的n次算术根，记做$\sqrt[n]{a}$ （$a>0$）．（零的算术根是零）．当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根（$a>0$），简称算术根．根据算术根的定义可得$\sqrt{a^2}=|a|$．

11． **实数的大小比较** 设有两个实数a和b，并且设数轴上的A点表示实数a，B点表示实数b．

（1）如果B点在A点的右边，那么$b>a$．即在数轴上表示的两个实数，右边的数总比左边的数大．

（2）如果B点和A点重合，那么$b=a$。

由此可知：正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

12. **实数的六种基本运算**（加、减、乘、除、乘方、开方）**以及它们之间的关系**。

（1）加法法则：同号两数相加，把它们的绝对值相加，取原来加数的符号；异号两数相加，用较大的绝对值减去较小的绝对值，取绝对值大的加数的符号。

特殊情况：两个相反数相加等于零；任何数与零相加，仍得这个数。

（2）减法法则：减去一个数，等于加上这个数的相反数。

用字母表示：$a-b=a+(-b)$。

可见，正负数的加法与减法，可以互相转化．遇到减法时，只要把减数的符号改变后，化为加法，就可以按加法法则进行运算。

（3）乘法法则：

①先求出两个数的绝对值的积；

②按以下规则确定积的符号——同号取正，异号取负。

（4）除法法则：

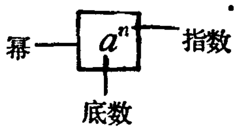
①先求出两个数的绝对值的商；

②按以下规则确定商的符号——同号取正，异号取负。

一个数除以另一个数，等于这个数乘以另一个数的倒数，即$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq 0)$。

（5）乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方，即

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n}$$



（6）开方：求一个数的方根的运算叫做开方．求a的n（n是自然数）次方根，叫做把a开n次方；求一个数的平方根的运算，叫开平方；求一个数的立方根的运算，叫开立方．

当根指数是偶数时，被开方数必须是正数或者零；当根指数是偶数、被开方数是正数时，开方的结果有两个值，它们互为相反数，其中正的一个方根就是算术根．

13．**运算定律** 设a、b、c为任意实数，则有：

（1）加法交换律 $a+b=b+a$．

（2）加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$．

（3）乘法交换律 $ab=ba$．

（4）乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$．

（5）分配律 $(a+b)c=ac+bc$．

14．**运算顺序**

（1）在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减．

（2）一个式子里如果有括号，先进行括号里的运算．

（3）适当利用运算定律．

15．**有关近似计算的一些概念**

（1）准确数与近似数：表示量的准确值的数叫做准确

数，表示量的大约的值的数叫做近似数。

（2）近似数的截取方法：用四舍五入法。

（3）近似数的有效数字的个数：从它最左的不是零的数字算起，到最后一位保留的数字为止，一共有几个数字，就说这个近似数有几个有效数字。

二　例题

例1　计算 $16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times(+2)$.

解： 原式 $=16\times9+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-8)-(-3)\times(+2)$

$=144-15-6+15-144+6$

$=0$.

说明：（1）先乘方，再乘除，最后加、减；（2）将互为相反数的数合并，运算就比较简捷，也不易弄错。

例2　计算 $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

解： 原式 $=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)$

$=-\frac{3}{8}+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}$

$=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$$= -\frac{3}{8}.$$

说明：把分母之间有倍数关系的分数先合并起来，运算就变得简捷.

例3 计算 $2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$.

解：原式 $=2.75-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)-4\frac{2}{3}$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-4\frac{2}{3}$$

$$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$$

$$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}$$

$$=-1\frac{7}{8}.$$

说明：如果式子里既有小数又有分数，一般先把小数化成分数，再进行运算.

例4 计算 $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$.

解：原式 $=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{3}{10}.$$

说明：先把带分数化成假分数，把除法化成乘法，再进行计算.

例5 计算 $\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1-2^2+$

$$(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3-\sqrt[3]{-27}.$$

解：原式$=\left[25\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times 8\div 7+1-4+4-9+27$

$+3$

$=(-15+15)\times 8\div 7+1-4+4-9+27+3$

$=22.$

例6 计算 $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|-\sqrt{(-3)^2}.$

解：原式$=5-49+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}-3$

$=-44+\frac{2-5}{6}-3$

$=-47\frac{1}{2}.$

例7 比较下列各数的大小：

$$-\frac{5}{6},\quad -\frac{6}{7},\quad -0.8.$$

解：$-\frac{5}{6}=-\frac{175}{210}$，$-\frac{6}{7}=-\frac{180}{210}$，$-0.8=-\frac{168}{210}$，

$\because\quad -180<-175<-168$，

$\therefore\quad -\frac{6}{7}<-\frac{5}{6}<-0.8.$

例8 计算 $\sqrt{3}+\frac{1}{7}-\left(2.335-\frac{5}{3}\right)$（精确到0.01）.

解：原式$\approx 1.732+0.143-2.335+1.667$

$=3.542-2.335$

$=1.207$

$\approx 1.21.$

例9 把下列各数分别填在相应的括号内：

$6，-\frac{1}{2}，-37，0，-1，0.16，3\frac{1}{2}，0.1\dot{2}，\sqrt{3}，-\sqrt{2}，\pi.$

整数集合{ …}， 分数集合{ …}，

正数集合{ …}， 负数集合{ …}，

有理数集合{ …}， 无理数集合{ …}，

解：整数集合$\{6，-37，0，-1，\cdots\}$，

分数集合$\left\{-\frac{1}{2}，0.16，3\frac{1}{2}，0.1\dot{2}，\cdots\right\}$，

正数集合$\left\{6，0.16，3\frac{1}{2}，0.1\dot{2}，\sqrt{3}，\pi \cdots\right\}$，

负数集合$\left\{-\frac{1}{2}，-37，-1，-\sqrt{2}，\cdots\right\}$，

有理数集合$\left\{6，-\frac{1}{2}，-37，0，-1，0.16，3\frac{1}{2}，0.1\dot{2}，\cdots\right\}$，

无理数集合$\{\sqrt{3}，-\sqrt{2}，\pi，\cdots\}$.

例10 （1）画数轴，并标出表示下列各数的点：

$2，-2\frac{1}{2}，-1，3，2\frac{1}{3}，|-3.5|.$

（2）写出满足不等式$-5\leqslant x<1$的整数x的值，并在数轴上表示出来。

解：（1）

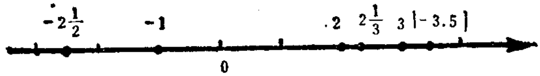


图 1-2

（2）x 的值为 -5，-4，-3，-2，-1，0。

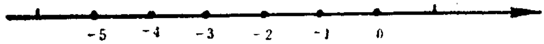


图 1-3

例11 下列各式在a是什么数时成立，什么数时不成立？

（1）$|a|=a$；（2）$|a|=-a$；（3）$|a|=|-a|$；

（4）$a=-a$。

解：（1）当$a\geqslant 0$时，$|a|=a$成立；当$a<0$时，$|a|=a$不成立。

（2）当$a<0$时，$|a|=-a$成立；当$a>0$时，$|a|=-a$不成立。

（3）a为任何实数，$|a|=|-a|$都成立。

（4）当$a=0$时，$a=-a$成立；当$a>0$或$a<0$时，$a=-a$不成立。

例12 计算 $|1-a|+|2a+1|+|a|$ $(a<-2)$。

解： $\because$ $a<-2$

$$\begin{aligned}\therefore\ & |1-a|+|2a+1|+|a| \\ &= 1-a-(2a+1)-a \\ &= 1-a-2a-1-a \\ &= -4a.\end{aligned}$$

例13 解方程$|x-4|=5$。

解： 当$x-4>0$时，$|x-4|=x-4$，原方程可化为

$$x-4=5.$$

$\therefore \qquad x=9.$

当$x-4<0$时，$|x-4|=-(x-4)$,原方程可化为

$$-(x-4)=5.$$

$\therefore \qquad x=-1.$

所以原方程的解为$x=9$，$x=-1$.

说明：解这种方程，关键在于合理地去掉绝对值的符号，以便转化为不带绝对值符号的方程来解。

当使用定义去掉绝对值符号时，需要分段进行讨论；如果是解方程，必须把本段的前提与本段的解结合起来考虑.

例14 已知一个四位数的各位数字的和能被3整除，证明这个四位数能被3整除.

证明：设这个四位数为$1000a+100b+10c+d$（a、b、c、d取0，1，2，…，9中的数，且$a\neq 0$），于是

$$\begin{aligned}&1000a+100b+10c+d\\=&(a+b+c+d)+999a+99b+9c\\=&(a+b+c+d)+9(111a+11b+c)\end{aligned}$$

因为$a+b+c+d$能被3整除，9也能被3整除，所以这个四位数必能被3整除.

习 题 一

1. 判断下列各命题：

（1）最小的整数是零；

（2）最小的自然数是1；

（3）一个数的相反数比它本身小，这个数是负数；

（4）零的倒数是零；

（5）$a^2>a$；

（6）如果$|m|=|n|$，则$m=n$.

2. 填空：

（1）大于－1而小于＋1的整数是____；

（2）绝对值小于6的负整数有____，不小于－5的负整数有____；

（3）写出比－2大的三个负数____，如果$|y|=25$，那么$y=$____；

（4）80494（保留三个有效数字）≈____（精确到____位）；

（5）$1\frac{1}{2}$的相反数是____，它们的和是____，商是____，x与它相反数的差是____；

（6）$-\frac{2}{5}$的倒数与$\frac{3}{10}$的倒数的和的相反数是____；

（7）如果a的绝对值等于a的相反数，那么a应该是____；

（8）适合不等式$-3.5<x\leqslant 1$的整数是____；

（9）用“>”或“<”号连结下式：

①如果$0<a<1$，那么a____$\frac{1}{a}$；

②如果$a<0$，那么a____$-a$；

③$182^2$____$(-183)^2$；

④$727^3$____$(-727)^3$.

（10）①已知$2.073^2=4.297$，则$-2073^2=$____，$0.02073^2=$____；

②已知$5.398^3=157.3$，则$(-53.98)^3=$____，0.05398^3