

数量经济学原理 与 经济控制论

张启人 著

湖南财经学院科研处

一九八三年

绪 论

今天，我国社会主义建设的关键时刻，“四个现代化”向纵深发展的阶段，摆在我们面前的有着浩如烟海，错综复杂的问题。急中之急的问题是什么(What)?为什么是当务之急(Why)?问题症结安在(Where)?解决什么人的问题(Who)?什么时候解决(When)?怎样找到解决紧迫问题的钥匙(How)?牵涉这类5W1H的大问题是一切热爱社会主义祖国的人所共同关心的大事。中央指出，实现四个现代化，一靠政策，一靠科学。这是抓住了事物本质的英明论断。然而，科学靠政策支持，政策靠科学指导。发展科学技术是实现四个现代化的先决条件，科学技术现代化是四化的关键。而发展政策科学又是取得科学技术现代化的必要前提，经济控制论则是政策科学中主要的基础理论之一。

当前全世界科学技术发展的总趋势是数学科学、自然科学、社会科学、系统科学、思维科学和人体科学六大科学体系交融渗透和互相支持。科学技术进步的特点主要表现在自动化、信息化、边缘化、模型化、智能化、社会化、系统化和最优化。然而，在高度发达的物质文明面前和全世界不同地区的发展极不平衡的现实面前，资本主义世界正面临着一系列新的、紧迫的甚至严重的问题，诸如人口激增，生态破坏，环境污染、能源短缺、交通拥挤、经济停滞、教育僵化、暴力犯罪……所有这些与社会经济有关的“软”系统已经或正在构成对工农业生产等“硬”系统的威胁因素。由于社会主义制度的优越性，这些新的“软”问题在我国几乎都在不同程度上得到了或正在得到“控制”。目前，至少在经济领域内，我国几乎是世界上唯一欣欣向荣的国家。然而，

我们又必须清醒地看到，上述社会经济问题正从许多方面妨碍着四化建设，构成一定程度的威胁。为了到本世纪末实现工农业总产值翻两番的宏伟战略目标，有必要从现在开始就特别重视科学技术中“软科学”的发展和应用，以便在有限的资源条件下最大限度地发挥内涵经济效益或社会效益。这要求我们最优地分配资源、资金、统筹规划、合理布署，正确预测适时决策。要达到这些目的，必须采用定性与定量相结合的方法，找出社会经济系统各个环节的最优控制解，找出每个具体问题的数量分析途径和工具，力争国民经济的所有方面都得到满意的协调。把控制论、系统理论、系统工程、管理科学、经济科学和数学紧密地结合起来，试图找出上述问题的答案的一门新兴横断科学，就叫经济控制论。

象对控制论的解释一样，经济控制论的内容和方法有着形形色色、见仁见智的解释。本书采用广义的系统观点来探讨社会经济系统的数量分析、预测和最优化控制问题，因而把经济控制论既看成是控制论的一个分支，也解释成系统科学中软科学的一部分。这种扩大视野的见解虽然不见得能迎合某些默守成规者的口味，但作者相信这是使经济控制论跳出经院式理论探讨的较好途径。事实上，也符合经济控制论当前的显而易见的发展趋势。

0.1 系 统

简言之，有多个矛盾要素的统一体都叫系统。更详细点：系统是相互间关联着的元素集，以集体行为完成特定功能的有机结合体。太阳系、电子计算机、城市、汽车、家庭都是系统。

要素或元素本身也可能是系统，它们相对于原系统来说是子系统，子系统本身又由更基本的元素组成，形成一种多级递阶结构，例如，城市系统包含了城市交通、公用事业（燃气、水、电）

土地使用（住宅、商业、文化、教育、绿化等）和能源等子系统各有不同的体系结构，都有作为基本元素的人。人本身也是一个系统，包含了消化、呼吸、神经、心血管、内分泌等子系统；人体各系统还能进一步分成器官、组织、细胞等各层子系统。

一般说，系统 S 可用集合符号表示：

$$S = \{A, R\} \quad (0.1.1)$$

$\{A\}$ 指要素集， $\{R\}$ 指关系集（系统的行为模式）。 R 集包括对 A 集的这种规律， A 内各元素间的相互关系， A 与外部环境、约束和控制现象之间的关系等。例如钢铁厂生产一吨铁需0.7吨焦炭；焦化厂用1吨丸得到0.78吨焦炭；一台设备每天只用2小时来生产部件等々，都是一些“关系”，并包含在形成问题的集 R 之中。因此集 R 可以由一些系统元素间的方程或不等式来定义。例如若仅仅通过集 A 及其中不同元素 a_i 和 a_j （ $i, j=1, \dots, n$ ）之间是否存在通信的知识来定义系统，则可以用简单的图或可能为有向图来代表它，其中

$$R = (r_{ij}) \quad (0.1.2)$$

其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若从 } a_i \text{ 到 } a_j \text{ 存在通信} \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$$

概括起来，系统有六个共同属性：

1. 可分性；
2. 关联性；
3. 矛盾性；
4. 功能性；
5. 统一性；
6. 递阶性（即层次性）

这些属性的具体意义可从字面领会。

0.2 控制论

控制论 (Cybernetics) 是本世纪四十年代初开始萌芽、四十年代末粗具雏形、五十年代中逐步拓广、六十年代得到迅速发展、七十年代获得广泛有效应用的一门新兴学科。

二次大战期间，美国数学家诺伯特·维纳 (Norbert Wiener 1894-1964) 为首的一些科学家经常在一起集会，讨论当时各自科学领域内存在的许多难题。战后，这种讨论变成定期性的辩论会。维纳开始发现在各种截然不同的科学范畴之间存在着许多带本质性的共性的东西。1947年维纳在巴黎举行的一次国际性学术会议上首次发表了他的这一发现，翌年，以“控制论”为主题，以“即动物和机器中的通信和控制”为副题写了一本书，今天，被认为是《控制论》的头一本经典著作。

维纳本人也是信息论的创始人，是后来发展的计算机科学和智慧科学的重要人之一。在控制论里，维纳针对充满矛盾性、不定性和关联性的不完备的客观世界，深刻揭示了信息、反馈、通信、控制、系统、平衡、因果、稳定、有序、有组织等一系列现代科学概念的本质联系和普遍属性。控制论使人们第一次有可能把物质世界和非物质世界、有生命和无生命过程的动态关联作为整体加以研究。拿一句话来解释，控制论是研究包括人在内的生物系统和包括工程在内的非生物系统、以及与二者均有关系的社会经济系统内部通信、控制、调节、组织、平衡、稳定、计算及其与周围环境相互作用或反馈的各种自然科学和社会科学的统一的科学方法论。

控制论的全部思想方法是辩证唯物论的。控制论认为一切“控制论系统”都可以通过不断改进的信息传输加以认识；通过适当手段加以控制。这说明系统的可知（可观）性和可改造（可控性）。

不宁唯是，控制论引导人们积极地能动地寻求解决问题的具体方法。

1951年，在法国巴黎召开了控制论世界大会。会上宣布成立控制论世界组织，维纳担任了第一屆主席。七十年代初，该组织改名为“一般系统论和控制论世界组织”。目前它拥有35个会员国，召开过五次“控制论与系统国际会议”。1975年在布加勒斯特举行的第三次会议上决定颁发国际控制论金质奖章。第一枚奖章授给了罗马尼亚总统齐奥塞斯库同志。

美国匹兹堡大学每年开一次国际性“控制论与社会”学术讨论会，几乎全世界每个角落都先后有代表参加，至今已开过十一次。欧洲从1972年起，每两年召开一次全欧控制论和系统研究学术交流会，一次比一次更丰富。

二十年来控制论在许多发达国家中的广泛运用，加速了这些国家工农业现代化的步伐，提高了这些国家的国民收入、生活和技术水平。相形之下，许多发展中国家农业生产落后，经济实力和国际贸易始终处于劣势，没有在社会、经济领域普遍推行控制论方法或许是一主要原因之一。有鉴于此，近些年来，上述世界组织提出了把控制论方法向第三世界传播的口号。他们认为：只有全人类的富裕才能换取全球性的经济稳定和持久和平。虽然他们有时受到政治观点或阶级偏见的局限，但传播自然科学方法论的初衷毕竟是可以借鉴的。

应当指出，维纳早期的《控制论》主要以研究物理世界为界。直到六十年代中才从理论发展和实际应用两方面证明，《控制论》事实上也是解决社会主义系统问题的有效手段。目前，现代控制论原则上分理论与应用两个部类。如果按应用范围划分，有工程控制论、生物控制论、医学控制论、神经控制论、社会控制论、经济控制论、教育控制论、人口控制论、环境控制论、能源控制论、行为控制论等。虽然本书主要讨论《经济控制论》，但我们的“系

统观点”促使我们同时研究那些足以影响经济系统的一切子系统。

当探讨经济、工程、社会或生物领域内的某一问题时，一项控制论方法包含下列几步：

- 1、通过元素及其相互关系定义与问题对应的总体系统；
- 2、尽可能通过系统元素以定量方式来定义问题；
- 3、通过考虑确定性和随机性元素的效应来研究系统的通信和控制机构；
- 4、预先决定怎样在不同情况下进行活动的决策机构。

顺便说明一下：控制论和控制理论的涵义是不同的，前者涵盖了后者。控制理论 (Control Theory) 即自动控制理论，属于工程控制论的理论部分。工程控制论的应用部分属于自动化技术范围。自动化包括自动控制和自动操作 (指令程序控制) 两类。

0.3 控制论系统

控制论系统是由两个或更多相互关联和制约的元素在特定环境条件下共同组成的受控的在体。它又是某一较大系统的子系统。

元素指人或物，包括生物；也指问题或事理，包括社会组织。但任何控制论系统总存在能量流，物料流和信息流三个彼此联系的动态过程。对社会组织也如此。

任何一个控制论系统除具有0.1节所述六个共同的系统属性外，还具有下列六个特征。

- 1、受控性 即系统的可镇性 (可稳定性)
- 2、目标性 即行为的目的性。
- 3、因果性 即时间的有序性。
- 4、可组织性 即空间的有序性。

5. 反馈性 即 输入输出的关联性。

6. 动态性 即要素的时间依存性。

以下分别加以讨论。

1. 受控

控制论中把系统的外部影响叫做环境。环境对系统的效应叫激励 (Stimuli) 或系统输入, 经济系统中则叫外生 (Exogenous)。人为的输入或带有某种目的输入即称控制, 而系统对于环境的效应叫响应 (Responses) 或系统输出。系统对任意激励的响应在很大程度上取决于系统内要素被组织起来的途径。

环境对于系统毫无作用的系统叫封闭系统; 总是存在环境影响的系统叫开放系统; 环境仅对系统内某一或某些子系统起作用时, 就叫部分封闭系统。

受控系统必然是开放系统。受控意味着可以找到改变系统内部状态或外部行为 (响应) 的控制 (输入) 变量 (即手段)。控制本身则包含着比较广泛的内容, 如表 0.3.1

表 0.3.1 不同范畴内“控制”的概念 (举例)

内 容	控制系统	管理系统	环境系统	临床医学	军事系统	现场操作
过程	控 制	决 策	治 理	治 疗	指 挥	操 纵
措施	信号 (误差)	调度 (投资)	处理 (法律)	处 方	命 令	指 令
信息	观 测	会 计, 统计	监 测	化 验	侦 察	检 测
信道	反馈 (前馈)	反映 (会议)	调查 (讨论)	主诉 (视察)	汇报 (请示)	仪表, 传感
信息处理	调节 (比较)	预 测	数据库	预后 (陈外)	袭击, 转移	校 正
估 计	测 辨 (过滤)	分 析	统计推断	辨 证	判 断	排除故障
进 程	综 合	计 划	规 则	方 案	战略, 战术	维修, 更新

2. 目标

一般说, 系统输出 y 随时间变化的规律(往々也叫发展 Involution 或观测 Observation)是设计者首先关心的事。通过它们可以跟某一任务或目的联系起来。这种目的在工程上叫设定点。一般指预期的系统输出。例如在调节问题中, 输出应当达到, 然而跟随固定的设定点; 在伺服机构或跟踪问题中, 输出均跟随看随时间变化的设定点。控制则通过调节输出的行为以完成预定任务。对于社会经济系统, 目标往々跟某种决策机构联系在一起。有时候目标只是为了降低失业率, 而在另一些场合, 目标是为了最有效地利用现有资源。无论是工程系统还是社会经济系统(以及生物遗传工程), 最理想的目标无非是要求“最优地”控制这些系统, 以便“多快好省”地达到目的。

想要了解什么样的控制才是最优的, 必须事先知道:

- 甲. 能把任何控制效果定量化的目标函数;
- 乙. 能借以预测任何控制效果的数学模型;
- 丙. 影响系统过去、现在和将来的一切环境因素的必要知识。

可见基本的最优化问题(仍与“小系统”的相同)是利用乙的模型和丙的环境知识, 通过极小化(或极大化)甲的目标函数来求控制集。其所以必须要有个模型, 是因为即使最简单的系统, 控制数也可能很多。同时, 要想证实特定控制的效果, 很唯利用系统本身进行(重复)实验。例如有的实验很危险(象核反应堆的控制系统); 有的实验则几乎不可能(象一般的社会经济系统)。

因此, 一个控制或决策的优化问题涉及三个定量知识: 目标模型、环境。控制和输出必须满足一定条件。这些条件叫做约束。满足约束的控制和输出, 分别叫容许 (Admissible) 控制和容许输出。这些约束条件通常体现在上述“模型知识”里。

约束可能是等式, 例如 $g(u, y) = 0$ 。不过最常用的是不等式

式约束 (如 $g(u, y) \leq 0$)，这些约束有时能在每一时刻均被满足，但有时须满足这类约束的积分。

瞬时不等式约束通常对应于实际限制。

例 0.3.1 设 u_1, u_2 均为控制，则约束

$$|u_1| \leq M, \quad |u_2| \leq N$$

决定了控制空间 U 中的一个封闭区域，常叫容许约束区，用 $\tilde{U}$ 表示 (图 0.3.1)

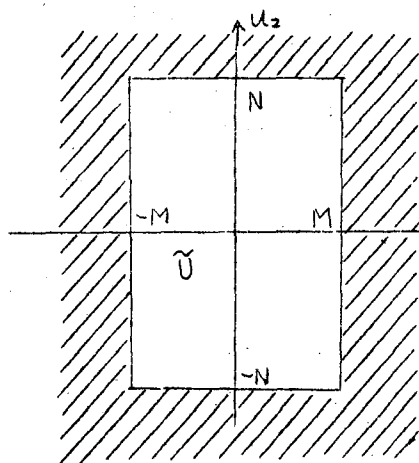


图 0.3.1 容许约束区 $\tilde{U}$

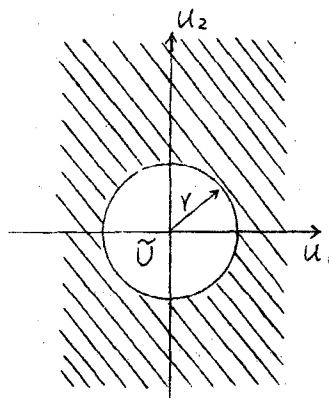


图 0.3.2 另一种容许约束区

如果约束是

$$u_1^2 + u_2^2 \leq \gamma^2$$

则容许约束区如图 0.3.2

积分不等式约束如

$$\int_0^T f(t) dt < k$$

之类，通常指某个与控制轨线有关的变量上所加限制。例如考虑火箭燃料时就是如此。

对于输出的约束，情况相似，可看成是对设定点的约束。

尽管设定点只有一个，但完全有可能存在“殊途同归”的现象，即有很多种方案（控制轨线）能既满足约束，又能达到设定点。在这种情况下，我们需在所有这些控制轨线当中作出选择，以便“最优”地抵达目的地。

为了在各种可能的容许控制当中作出合理选择，必须有一个“合理”的标准，也就是目标函数（也叫判据函数、性能指标、费用函数、价值函数、支付函数、福利函数、损失函数等）。选定目标函数通常是个既重要又困难的问题，往往需要设计者的主观判断和/或经验。在软系统中，确定目标函数之前，广泛征求专家们的意见和请示或揣摩决策人的偏好，总是不可少的环节。

静态系统中，目标函数的特点是适用于瞬时。动态系统中，采取积分形式的目标函数将取决于控制轨线和系统的演变（发展）。例如

$$J = \int_{t_0}^{t_f} r dt$$

就是一种积分目标函数，这里 r 为基本指标。又如

$$J = g(t_f)$$

则是作为终点判据的目标函数，因为它仅涉及最后时刻上的变量值。

控制随时间的演变，工程上叫控制轨线（Control Trajectory），软系统中叫策略（Strategy）或政策（Policy）。有时统称控制律。被研究的时间间隔则叫时区（Horizon）。时区可能有界，也可以无限；可以事先选定，也可能与过程发展有关。事前不固定的时区叫自由区（例如确定时区按是否已达到设定点为转移）。一般工程上的时区多系无限长。社会经济问题的时区则往往以年月日计。准确达到设定点、使目标最优化，同时满足约束的控制律或最优控制轨线。

工程上（特别是小系统）遇到的目标函数大都是纯量函数，相应的最优化问题就叫单目标优化。一部分工程系统和大多数社会经济系统往往有多重目标，这时目标函数本身也是向量函数，相应的最优化问题叫做向量赋值优化（或多判据、多目标、多屏性，多目的，这些名称散见于近期文献中，意义略有不同。

常见纯量目标函数的数学形式见表 0.3.2。

表 0.3.2 常见纯量目标函数

系统	目标函数	说明
静态	$J_1 = \sum_i C_i u_i$	J_1 为变量 u_i 的线性函数， C_i 为常数。
	$J_2 = \sum_i C_i u_i^2$	称二次目标函数。
	$J_3 = \varphi_1(u_1) + \dots + \varphi_n(u_n)$	称可分目标函数，其中单变量 u_i 的函数 $\varphi_i(u_i)$ 不一定是线性的。
	$J_4 = \varphi(\underline{u})$	最一般的泛函形式， φ 可以是非线性函数，自变量为向量 $\underline{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。
动态	$J_5 = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$	最小时间问题。终点时间 t_f 自由，用某种寻优程序确定。
	$J_6 = \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^T Q (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) dt$	时区固定，极小化均方误差问题。 $\bar{\underline{x}}$ 为基程状态向量
	$J_6 = \int_{t_0}^{t_f} dt + M \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^T Q (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) dt$	t_f 自由， M 为加权因子。它是 J_5 和 J_6 的结合。
	$J_8 = \int_{t_0}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt$	L (一般) 为状态 $\underline{x}$ 、控制 $\underline{u}$ 和时间 t 的非线性泛函 (Lagrange 问题)
	$J_9 = G[\underline{x}, \underline{u}, t] \Big _{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt$	Bolza 问题，动态优化的一般形式 (只有第一项称 Mayer 问题)

3. 因果

所谓因果性，就是系统的响应不能超前于激励。由于系统本身的空间距离，响应必然滞后于激励。激励为因，响应为果。“物有本末，事有始终”。因此，描述系统的模型应当用因果律加以检验。近年在发展计量经济学理论当中，探讨所谓“合理期望”（Rational Expectations）时往往涉及计量经济学模型是否符合因果性的问题，因为未来的政策不可能在现在产生经济效益。

4. 可组织

可组织意味着能确知要素之间的关系，亦即能找出系统的关系集 R ；还意味着能对这些关系施加某种影响，加以调查、归纳或重新组态。

5. 反馈

研究系统中的变化，并作出相应的决策是控制论方法的基本特征。因此，不仅为了对不同的系统输入来估计其输出，而且要考虑输出对于输入的“反作用”，即对于系统内元素行为的反作用。控制论中把这种反作用叫做反馈效应。

值得强调的是：控制论认为反馈是自然界和一切生物中普遍存在的属性，也是人类社会结构中普遍存在的属性，一切人工系统能否有效地进行控制，关键也在于是否能有效地利用反馈机制，特别是信息的反馈。

生物系统通过自身反馈（例如血压、体温调节）获得机体平衡的性质叫内稳定性。

反馈现象很早就被用来设计技术系统和自动控制系统。瓦特的离心调速器、乃奎斯的电子管反馈放大器，都是早期应用的例子。

反馈现象普遍存在于社会经济系统中。所谓按价值规律办事，

接控制论的观点无非是有效地利用经济领域的反馈规律。

6. 动态

所谓动态，即系统特征随时间变化的现象。动态现象几乎普遍存在于一切系统之中。例如，宇宙飞船、室内取暖、矿山采掘之类的物理系统；组织层次的变动、部落的变迁或经济结构的行之类的社会系统；遗传变异、生态退化或人口增长之类的生命系统。虽然动态系统的例子数不胜数，但描述动态系统的数学方法却寥々无几。最常用的数学工具是微分或差分方程，分别视系统行为发生在连续时间还是离散时间而定。

实现一个控制^{te}系统（图 0.3.3）需要了解系统的输入—输出

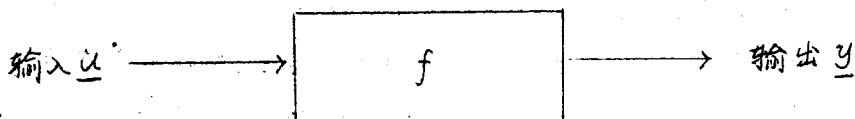


图 0.3.3 控制论系统

或激励—响应机构。这意味着对于集 A 和 R 的已知知识，可以下述关系确定输出向量 $y = (y_1, \dots, y_p)$ ：

$$f: \{A, R\} \rightarrow y \quad (0.3.1)$$

其中 f 为映射关系，这个关系表明若已知 f ，就能从 $\{A, R\}$ 的知识确定 y 。如果我们不知道 f ，就把映射叫做黑箱，而问题变成从观测 A 和 y 或 u 和 y 来测辨 f 。

考虑到前面提到的六个特征，可以得到：

$$y = f(A, R, T, u, t) \quad (0.3.2)$$

叫做系统的行为方程。式中，除 A, R 仍如前， T 叫变换算子，反映可组织性； u 是控制变量，代表受控性； t 是反映动态过程的时间变量； f 本身代表着因果性。唯有系统的反馈性须通过另

外的方式表达。

设时间 t 的输入向量 u_t 引出输出 y_t ；又令系统的结构是使得 y_t 影响时间 $t+1$ (t 是离散的, $t = \dots, 1, 0, 1, \dots$) 的输入 u_{t+1} ，则与图 0.3.3 所示的开环系统不同，我们有图 0.3.4 所示的闭环反馈系统。

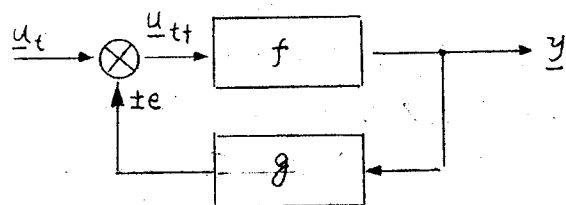


图 0.3.4 简单反馈环

从图 0.3.4 可以得到支配系统行为的下列关系：

$y_t = f(u_t)$ (0.3.3)； $x_{t+1} = x_t \pm e_t$ (0.3.4)； $e_t = g(y_t)$ (0.3.5)。
或 (0.3.4) 和 (0.3.5) 可以看成是形成了特征集 R ，事实上如果我们也把 (0.3.3) 考虑为属于集 R ，并未失去一般性。

6 动态。动态系统即特性随时间变化的系统。我们所遇到的系统，一般说都是动态系统。只是极特殊的场合，在为了分析上的方便时，才可能把一个动态系统暂时当作静态处理。

描述系统动态行为的最普通数学工具是微分方程和差分方程，它们分别对应于系统行为连续变化和离散变化。后者的高散时间依问题性质而建，一般说视对连续时间系统的采样方式而异。例如经济系统的采样数据可能以天计、以月计或以年计，则离散时间系统的“均匀”采样间隔也将是天、月或年。宏观经济的离散时间间隔往往较长，如五年计划即以五年为期。

0.4 一些实例。以下我们列举某些初等的系统实例来说明描述这些系统行为的方式方法。例 0.4.1 几何增长。

描述人口或种群增长、植物生长、科学领域的累计出版物、材料消耗、一笔贷款的利息累计等服从如下的线性。

差分方程规律：

$$x(k+1) = ax(k)$$

数值 $x(k)$ 代表变量 (例如人口) 在 k 时刻的大小。参数 a 是决定增长率的常数。对于正的增长, a 的值必然大于 1, 从而每个后继的大小大于前项一个固定的因子。

若给定初始大小 $x(0) = 1$, 可以递推地求出往后各值。特别是, 易于看出 $x(1) = a$, $x(2) = a^2$, 而一般地 $x(k) = a^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。从这一模型产生的典型增长模式如图 0.4.1。从这一简单线性关系得到的增长模式叫做几何增长, 因为数值的增加——如几何级数各项。

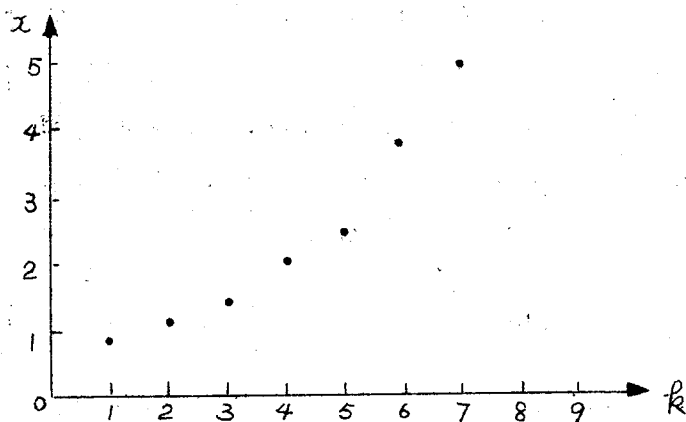


图 0.4.1 几何增长

例 0.4.2 Cohort 种群模型

上例所给简单的增长模型对于种群变化的完全分析是不够的, 特别是种群再生产活力水平在正常寿命期内并不一致的情况。较符合实际的模型必须计入种群内的年龄分布。这种类型的经典模型叫做配组 (cohort) 种群模型。

种群按相等的年龄间隔 (例如 5 年) 分成年龄组, 即第一组包括年龄在 0 与 5 年之间的所有成员, 第二组包括 5 年到 10 年的等。配组模型本身是个与基本组配间隔对应的单一时间周期为

区间的离散时间动态系统。设雌雄分布相同，可以只考虑雌性部分。令 $x_i(k)$ 为时间 k 第 i 年龄组的（雌性）种群，又设年龄组从 0 到 n ，描述系统行为时，仅需描述这些数字如何在一个时间周期中变化。

首先，除了即将考虑的死亡的可能性之外，显然经过一个时间周期，第 i 年龄组将变为第 $(i+1)$ 个年龄组。计入给定年龄组的个体死亡率之后，这种向上的递进将被存活因子衰减，净递进可用简单式子描述：

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (0.4.1)$$

其中 β_i 为一段时间第 i 年龄组的存活率，必可用统计数据确定。

上述方程不能确定的唯一年龄组是 $x_0(k+1)$ ，即在上一个时段期间出生的个体组。它们是前一时段内存活的种群的后代。这一组内的个体数取决于其他年龄组各自的出生率和取决于前一时段当中每个这种年龄组有多大，确切点，

$$x_0(k+1) = x_0 x_0(k) + x_1 x_1(k) + x_2 x_2(k) + \dots + x_n x_n(k) \quad (0.4.2)$$

其中 x_i 为第 i 年龄组的出生率（用 i 年龄组每时段雌性后代的数目表示）。

例 0.4.3 国民经济

国民经济主要由三个状态因素表示：

$Y(k)$ = 集约国民收入

$C(k)$ = 消费品（和劳务）生产的价值

$I(k)$ = 投资货物的生产

可选作控制变量的因素是：

$G(k)$ = 政府支出

$T(k)$ = 税率