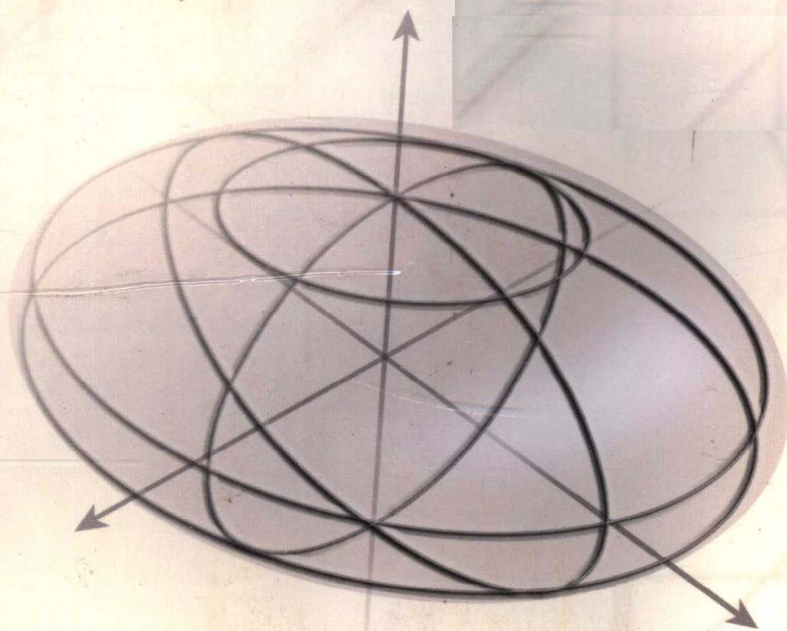


# 高等数学

(上册)

S H A N G C E

殷锡鸣 许树声 李红英 王刚 编著



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

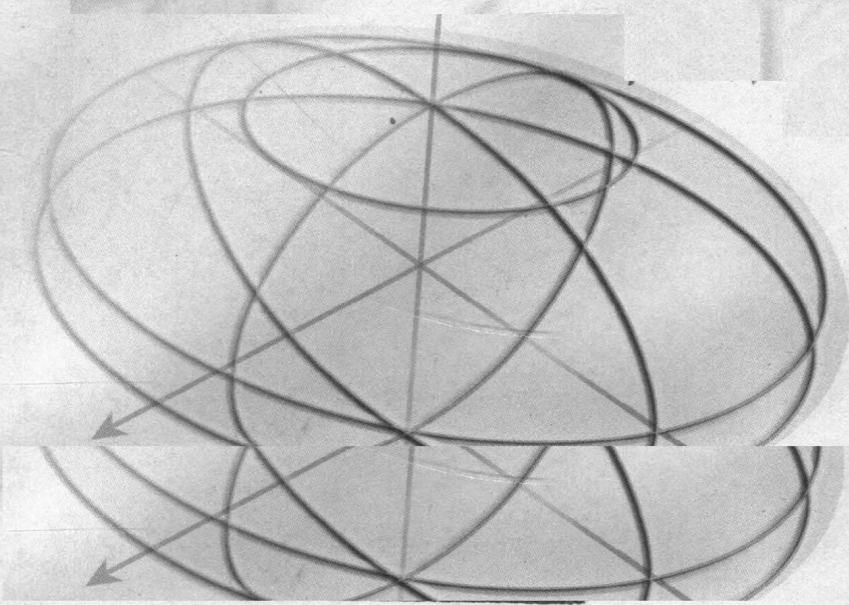
# 高等数学

(上册)

GAODENGSHUXUE

S H A N G C E

殷锡鸣 许树声 李红英 王刚 编著



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/殷锡鸣等编著. —上海:华东理工大学出版社,2004.8

ISBN 7-5628-1591-7

I. 高... II. 殷... III. 高等数学-高等学校-教材  
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 079292 号

## 高等数学

(上册)

殷锡鸣 许树声 李红英 王刚 编著

<b>出版</b> 华东理工大学出版社	<b>开本</b> 787×1092 1/16
<b>社址</b> 上海市梅陇路 130 号	<b>印张</b> 35.25
<b>邮编</b> 200237 <b>电话</b> (021)64250306	<b>字数</b> 823 千字
<b>网址</b> www.hdlgpress.com.cn	<b>版次</b> 2004 年 8 月第 1 版
<b>发行</b> 新华书店上海发行所	<b>印次</b> 2004 年 8 月第 1 次
<b>印刷</b> 上海崇明裕安印刷厂	<b>印数</b> 1—5600 册
<hr/>	
ISBN 7-5628-1591-7/O · 114	定价:38.00 元

# 序 言

众所周知,作为“高等数学”核心内容的微积分是人类智慧最伟大的成就之一.它包含着处理连续量的基本理论和众多的科学思维方法,既是学习其他自然科学和工程技术的重要基础,也是培养理性思维的理想载体,是高等学校理工、经管乃至农林、医文等各类专业的最重要的基础课程之一.

“高等数学”课程的建设 and 改革历来受到各类学校的高度重视.近年来,随着教学改革的不深入,大批各具特色、固化教改新成果的教材不断涌现.本书是华东理工大学近年来“高等数学”课程教学改革成果的结晶.

作者们力求体现“学数学是为了用数学”的课程培养目标,将抽象思维与形象思维有机结合.教材中穿插了数学建模与数学实验,使用数学软件等内容,在加强应用数学能力培养等方面,进行了不少有益的新探索,具有鲜明的特色.在内容的选取上,理论与应用并重,强调概念的实际背景、理论与方法的形成过程和思维方法的讲解.在体系的编排处理上也具有一定的新颖性.

数学建模与数学实验已被确认为是培养学生创新意识、提高应用数学能力的行之有效的的重要途径.本书的作者们在这方面做了很大的努力.结合教学内容在每章都安排了数学建模与数学实验方面的内容和习题,并提供了四个研究性的小课题供学生们课外学习和研讨.这些尝试将会引导与激励学生参与和探索,在培养学生运用数学知识进行研究,创新和解决实际问题的能力方面产生良好的作用.

本书在解决某些数学问题时还引入了数学软件的使用,这为学生适应时代发展需要、掌握现代计算技能提供了发展空间.书中还穿插了一些有关“高等数学”发展历史等人文知识,丰富了教材的可读性.本书的出版为“高等数学”改革教材增添了具有特色的新版本.相信将有助于推动“高等数学”的课程建设与教学改革,为提高“高等数学”课程的教学质量发挥积极的促进作用.

马知恩

2004年7月于西安交通大学

# 编者的话

进入 21 世纪以来,随着科学技术的飞速发展、经济竞争的日益激烈,对技术、人才提出了更高的要求.在高素质科技人才的培养过程中,数学教育正日益显示出其独特的、不可替代的重要作用.高等数学是高等院校绝大多数专业的一门重要的基础课程,它为学生学习后继课程,进一步从事工程技术和科学研究提供必要的数学基础.高等数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养和文化.能否运用高等数学的观念去进行定量的思维,切实解决遇到的实际问题是衡量人才的科学文化素质和数学素质的一个重要标志.

长期以来,我校一贯重视高等数学课程的建设,开展了以课程体系、教学内容和教材建设为核心的教学改革,取得了不少成果.本教材就是在学校的支持下,结合我校原有的谢国瑞教授编写的教材,参照教育部 2004 年颁布的“高等数学课程教学基本要求”,并融入了我们多年来对这门课程的改革实践和设想而组织编写的.旨在传授数学知识的同时,着力于提高学生的数学素养和能力,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识,提高学生学习数学的兴趣,为他们在将来更新知识,科技创新,学习现代数学方法提供必要的数学基础.本书力求在保证教学要求、遵循教学规律的前提下,在教材的体系、选材和编写中突出以下的特点.

## 1. 贯彻“学数学是为了用数学”的课程培养目标

选材以培养理工科应用型人才为出发点,重视数学思想方法和演绎、归纳素质的培养.对定义、定理及有关理论的介绍,注重它们的几何直观和物理背景,力求阐明问题产生的原由、需要解决的问题以及处理问题的基本思想和过程.当“严格”和“直观”相矛盾时,我们选择直观,不过于追求严格而复杂的数学证明.这样做可以潜移默化地使学生了解数学概念来自于实践,是从具体问题中抽象出来的;了解如何从“直观形象”到“数学抽象”,再经数学演绎和归纳产生“数学结论”后,再回到“直观形象”解决“具体问题”的全过程;从而达到培养学生数学思维能力和运用数学知识能力的目的.

## 2. 重点突出,难点分散,对内容体系进行重新整合

极限是微积分的基本工具,为了能尽快地进入对微积分主题的学习(以适应其他课程应用微积分的要求),在原有教材的基础上我们把极限内容作了分散处理:在引入导数概念的同时,重点讨论函数极限,而把数列极限和无穷级数放在一起讨论.这样既可利用微积分方法处理数列极限问题,使学生的数列知识进一步得到提高,又可用它去定义“级数和”的概念,这种处理手法不仅分散了难点,而且经过适当的重复,加深对极限概念的理解.我们把广



义积分的内容作为定积分的应用和推广,放在定积分应用的章节中,以达到分散难点、重复数学方法的目的.在例题的选择上力求全面、典型,在论述的方式上做到通俗易懂,突出对问题难点的分析以及解决问题的思想方法的阐述.我们还增加了微积分在经济学中应用的内容,这部分内容主要是为经济类和工商管理类专业的学生编写的,其他专业的学生可选读.

### 3. 突出数学模型的思想和方法

数学模型几乎是一切应用科学的基础,数学建模和与之相关的计算正在成为科学研究和工程设计的关键工具.我们在这方面作了较大的探索:除了在例题中引入大量的实际问题之外,我们还在大部分篇章中安排了与该章内容相关的数学模型的内容和习题.在书中另外还安排了四个“小课题研讨”,供有兴趣的学生学习或课堂研讨.我们认为在高等数学的早期学习中,渗透数学建模的思想和方法是极为重要的,它不仅能培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力,而且能提高学生学习高等数学以及掌握更多数学知识的兴趣和积极性.可以说,具备良好的数学建模能力是未来高素质创新人才的必备条件.

### 4. 引入数学实验和数学软件的运用

与数学模型紧密相连的就是数学实验和数学软件的运用.长期以来人们总认为数学是不需要做实验的,数学就是凭脑袋、纸和笔进行推理、证明和计算.但是随着计算机和数学软件的发展,数学软件已经成为科学研究的一种基本工具.因此对未来的高素质人才来讲,具备良好的运用数学软件的能力对他们将来的发展是非常重要的.我们在本书中介绍了 Mathematica 数学软件的使用入门,并在许多章节都安排了运用这一数学软件进行计算的内容和习题,以提高学生对数学实验的认识和运用数学软件的能力.

### 5. 例题较多、习题丰富,拓展学生的自学空间

本书选编了较多的例题,给使用本教材的教师提供了较大的选择余地,也为使用本教材的学生拓展了自学空间.每节末配备了大量习题,每章末配备了总习题.为了满足各专业不同层次的教学要求,我们把习题进行了分层安排:习题(A)适合于一般要求的学生使用,习题(B)适合于有较高要求的学生使用,而每章末的总习题适合于考研要求的学生使用.

### 6. 高等数学发展历史的介绍

在本书中,还穿插了一些有关高等数学发展历史等人文知识的内容,我们希望这些资料可进一步丰富教材的可读性和文化氛围.

这里还需要说明,本书中打\*号的内容不属于高等数学的教学要求.只供对数学有兴趣的学生课外学习和教师组织课外活动使用.其中“小课题研讨”中的练习题答案没有给出,因为它不是唯一的.

本书由华东理工大学组织编写.全书共分15章,分上下两册出版,其中第1章、第4章由龚成通编写,第2章、第3章由许树声编写,第5章、第6章、第7章由殷锡鸣编写,第8章由王刚编写,李红英编写了每一章的数学模型与数学实验内容和附录I.殷锡鸣、龚成通、许树声对全书进行了统稿,最后由殷锡鸣定稿.

在这里我们要特别感谢编写组顾问龚成通教授,他在退休之后,不辞辛劳,积极地和我们共同策划并参加了本书的编写.同时我们还要特别感谢王宗尧教授、谢国瑞教授,由于他

们的积极支持和杰出工作为本书的编写提供了良好的基础和条件。

本书是教研组全体高等数学任课教师教改实践和教学研究的共同成果。参加过教材建设立项及编写工作研讨活动的有陈秀华、曹霄临、蒲思立、江志松、苏纯洁、宋洁、刘朝晖、方民、黄文亮、唐雪芬、张明尧、李继根等教师，他们为本书的编写工作提供了许多宝贵的意见和有用的素材，在此向他们表示衷心的感谢。

还要感谢华东理工大学理学院领导鲁习文教授和教务处领导刘百祥同志，是他们的大力支持和关心，使本书得以顺利编写出版。

最后要特别感谢原全国工科数学课程教学指导委员会主任马知恩教授，感谢他对本书的编写提出的许多具体的修改意见及为本书作序。

由于编写者水平有限，书中难免留存错、漏和不妥之处，敬祈专家、读者予以指正。

编者

2004.7

# 目 录

## 1 函数

1.1 实数集 区间 .....	1
1.1.1 集合 .....	1
1.1.2 实数集 .....	4
1.1.3 区间 邻域 .....	6
习题 1.1 .....	7
1.2 函数的概念 .....	8
1.2.1 常量与变量 .....	8
1.2.2 函数的定义 .....	9
1.2.3 函数的表示 分段函数 .....	10
1.2.4 函数的几种特性 .....	12
习题 1.2 .....	15
1.3 初等函数 .....	18
1.3.1 反函数 .....	18
1.3.2 基本初等函数 .....	20
1.3.3 复合函数 .....	22
1.3.4 初等函数 .....	24
1.3.5 双曲函数与反双曲函数 .....	25
1.3.6 非初等函数举例 .....	26
习题 1.3 .....	28
1.4 建立函数关系举例 .....	29
习题 1.4 .....	32
* 1.5 数学模型与数学实验举例 .....	33
1.5.1 函数拟合 .....	33
1.5.2 小课题研讨(一):迭代与动力系统 .....	35
习题 1.5 .....	38
* 1.6 函数概念的形成与发展 .....	39



第 1 章总习题 .....	40
----------------	----

## 2 导数与极限

2.1 导数的概念 .....	42
2.1.1 引例 .....	42
2.1.2 导数概念 .....	44
习题 2.1 .....	48
2.2 函数的极限 .....	49
2.2.1 函数极限的定义 .....	50
2.2.2 极限的性质 .....	59
2.2.3 无穷小与无穷大 .....	61
2.2.4 极限的运算法则 .....	64
2.2.5 无穷小的比较 .....	72
习题 2.2 .....	78
2.3 函数的连续性 .....	81
2.3.1 函数连续的概念 .....	81
2.3.2 连续函数的运算性质 .....	83
2.3.3 初等函数的连续性 .....	85
2.3.4 函数的间断点及其分类 .....	87
2.3.5 闭区间上连续函数的性质 .....	89
习题 2.3 .....	92
2.4 导数的计算 .....	94
2.4.1 函数可导与连续的关系 .....	94
2.4.2 函数的和、差、积、商的求导法则 .....	97
2.4.3 反函数求导法则 .....	99
2.4.4 复合函数求导法则 .....	101
2.4.5 基本求导公式 .....	103
2.4.6 隐函数的导数及对数求导法 .....	104
2.4.7 由参数方程确定的函数的导数 .....	107
2.4.8 极坐标系下曲线的切线问题 .....	109
习题 2.4 .....	110
2.5 高阶导数 .....	113
习题 2.5 .....	118
* 2.6 数学模型与数学实验举例 .....	119
2.6.1 与极限和导数相关的例子 .....	119

2.6.2 小课题研讨(二):机器人设计	121
习题 2.6	124
第 2 章总习题	125

### 3 微分学的基本定理

3.1 微分	127
3.1.1 线性近似	127
3.1.2 微分	130
3.1.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	132
习题 3.1	134
3.2 微分中值定理	136
3.2.1 罗尔中值定理	136
3.2.2 拉格朗日中值定理	138
3.2.3 柯西中值定理	140
3.2.4 中值定理的初步应用	141
习题 3.2	144
3.3 洛必达法则	146
3.3.1 $\frac{0}{0}$ 型	148
3.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	150
3.3.3 几点注意	151
3.3.4 $0 \cdot \infty$ 型与 $\infty - \infty$ 型	153
3.3.5 $1^\infty$ 型、 $\infty^0$ 型及 $0^0$ 型	154
习题 3.3	155
3.4 泰勒公式	157
3.4.1 泰勒公式	157
3.4.2 几个常用函数的泰勒公式	161
3.4.3 泰勒公式的应用	165
习题 3.4	168
* 3.5 数学模型与数学实验举例	170
习题 3.5	171
第 3 章总习题	171

## 4 导数的应用

4.1 函数的单调性、极值与最值·····	174
4.1.1 函数的单调性·····	174
4.1.2 函数的极值·····	176
4.1.3 最大值与最小值·····	180
4.1.4 方程根的个数·····	185
习题 4.1·····	186
4.2 函数的凸性与拐点·····	191
4.2.1 凸(凹)函数的概念·····	191
4.2.2 函数凸性的充分条件和必要条件·····	192
4.2.3 凸函数的性质及其几何意义·····	194
4.2.4 拐点·····	196
习题 4.2·····	197
4.3 平面曲线的曲率·····	199
4.3.1 曲率的概念·····	199
4.3.2 曲率的计算公式·····	201
4.3.3 曲率半径、曲率中心和曲率圆·····	204
习题 4.3·····	206
4.4 渐近线·····	208
* 4.4.1 引言·····	208
* 4.4.2 曲线渐近线的定义·····	209
* 4.4.3 曲线斜渐近线的求法·····	209
* 4.4.4 函数在无穷远处的线性近似·····	211
4.4.5 函数图形的描绘·····	212
习题 4.4·····	214
4.5 相关变化率·····	215
习题 4.5·····	218
4.6 近似计算·····	220
4.6.1 函数值的近似计算·····	220
4.6.2 方程的近似解·····	222
习题 4.6·····	227
4.7 导数在经济学中的应用·····	228
4.7.1 需求分析·····	228
4.7.2 边际分析·····	232
4.7.3 弹性分析·····	234

4.7.4 经济学中的最大值最小值问题 .....	238
习题 4.7 .....	242
* 4.8 数学模型与数学实验举例 .....	244
4.8.1 与微分学应用相关的例 .....	244
4.8.2 小课题研讨(三):活人炮弹 .....	247
习题 4.8 .....	249
第 4 章总习题 .....	249

## 5 积分

5.1 定积分概念 .....	253
5.1.1 定积分问题的产生 .....	253
5.1.2 定积分的定义 几何意义 .....	256
5.1.3 定积分存在的条件 .....	259
习题 5.1 .....	260
5.2 定积分的性质 .....	261
习题 5.2 .....	267
5.3 微积分基本定理 .....	269
5.3.1 两个问题的提出 .....	269
5.3.2 微积分第一基本定理 .....	270
5.3.3 原函数和不定积分 .....	275
5.3.4 微积分第二基本定理 .....	280
习题 5.3 .....	282
第 5 章总习题 .....	285

## 6 积分法

6.1 不定积分的基本积分法 .....	287
6.1.1 不定积分的性质 .....	287
6.1.2 不定积分的换元法 .....	290
6.1.3 不定积分的分部积分法 .....	304
6.1.4 几种特殊类型函数的积分 .....	312
习题 6.1 .....	318
6.2 定积分的基本积分法 .....	322
6.2.1 定积分的换元法 .....	322
6.2.2 定积分的分部积分法 .....	331
习题 6.2 .....	335

6.3 定积分的数值积分法 .....	338
6.3.1 矩形求积方法 .....	339
6.3.2 梯形求积公式 .....	340
6.3.3 抛物线求积公式 .....	344
习题 6.3 .....	348
* 6.4 数学模型与数学实验 .....	349
习题 6.4 .....	352
第 6 章总习题 .....	353

## 7 定积分的应用与广义积分

7.1 定积分的微元法 .....	355
7.2 几何应用 .....	357
7.2.1 平面图形的面积 .....	357
7.2.2 平面曲线的弧长 .....	364
7.2.3 立体体积 .....	367
* 7.2.4 旋转体的侧面积 .....	375
习题 7.2 .....	377
7.3 物理应用 .....	379
7.3.1 变力沿直线所作的功 .....	379
7.3.2 液体对侧面的压力 .....	384
* 7.3.3 引力 .....	386
习题 7.3 .....	388
7.4 其他应用 .....	389
7.4.1 函数的平均值 .....	389
7.4.2 均方根 .....	390
7.4.3 在经济中的应用 .....	391
习题 7.4 .....	396
7.5 广义积分 .....	397
7.5.1 广义积分问题的产生 .....	397
7.5.2 无穷区间上的广义积分 .....	398
7.5.3 无界函数的广义积分 .....	403
* 7.5.4 $\Gamma$ (Gamma)函数 .....	407
习题 7.5 .....	409
* 7.6 数学模型和数学实验举例 .....	411
7.6.1 与积分应用有关的例 .....	411

7.6.2 小课题研讨(四):铁路路基施工方案·····	415
习题 7.6·····	417
第 7 章总习题·····	417

## 8 数列与无穷级数

8.1 数列极限·····	420
8.1.1 数列·····	420
8.1.2 收敛数列·····	424
8.1.3 有界数列和单调数列·····	427
习题 8.1·····	433
8.2 数项级数·····	436
8.2.1 无穷级数的基本概念·····	436
8.2.2 收敛级数的基本性质·····	439
8.2.3 正项级数的性质及其敛散性判别法·····	442
8.2.4 任意项级数的绝对收敛和条件收敛·····	453
8.2.5 交错级数·····	458
习题 8.2·····	463
8.3 幂级数·····	466
8.3.1 函数项级数的一般概念·····	466
8.3.2 幂级数及其收敛域·····	467
8.3.3 幂级数的性质·····	473
8.3.4 幂级数的求和·····	476
习题 8.3·····	478
8.4 函数的幂级数展开及其应用·····	480
8.4.1 泰勒级数·····	480
8.4.2 几个初等函数的麦克劳林级数展开式·····	483
8.4.3 函数展开为幂级数举例 间接展开法·····	486
8.4.4 函数幂级数展开式的应用·····	488
习题 8.4·····	495
8.5 数学模型和数学实验举例·····	496
习题 8.5·····	497
第 8 章总习题·····	497

## 附录 I Mathematica 使用入门

I.1 引言·····	501
-------------	-----



I.1.1	进入 Mathematica .....	501
I.1.2	启动 Mathematica 内核 .....	501
I.1.3	退出 Mathematica .....	501
I.2	数和算术 .....	502
I.2.1	整数和有理数计算 .....	502
I.2.2	浮点数(实数)和复数计算 .....	503
I.2.3	数学常数的输入 .....	504
I.2.4	常用数学函数 .....	504
I.3	变量与代数式 .....	505
I.3.1	变量命名 .....	505
I.3.2	变量赋值与替换 .....	505
I.3.3	清除变量 .....	506
I.4	基本代数运算 .....	507
I.4.1	化简计算结果 .....	507
I.4.2	常用的因式分解函数 .....	508
I.4.3	多项式的运算 .....	510
I.4.4	解方程 .....	510
I.4.5	求函数的极值 .....	511
I.5	微积分 .....	511
I.5.1	求极限 .....	511
I.5.2	求导数 .....	512
I.5.3	求不定积分 .....	513
I.5.4	求定积分 .....	514
I.5.5	无穷级数与无穷乘积 .....	514
I.5.6	常微分方程(组) .....	516
I.6	函数作图 .....	517
I.6.1	二维图形 .....	517
I.6.2	三维图形 .....	519
I.6.3	标准三维几何体的绘制 .....	520

# 函 数

函数是微积分最基本的概念之一,也是微积分的主要研究对象.在中学里我们对函数已经有了某些初步的认识,当由初等数学进入高等数学的学习之初,我们有必要对函数的概念在复习的基础上,作一些更深入的阐述.

由于本课程中所涉及的函数的变量都是实数,本章首先要对实数的几何表示、绝对值、不等式及某些常用实数集合的含义与记号作一些回顾和复习.至于实数更深刻、更本质的有关问题,则不是本课程所要研究的范围了.

为了让读者了解一点微积分的发展史,作为阅读材料,我们在本章最后一节里,简略地介绍一下函数概念的形成与发展.

## 1.1 实数集 区间

### 1.1.1 集合

为了正确地描述函数的概念,并进一步展开对函数的微分和积分的研究,这里先复习一下有关实数集和区间的概念.

#### A. 集合

具有某种共同属性的对象(事物、现象、系统、过程或感觉等等)的汇集(或总合)称为**集合**.集合常用大写字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\dots$ 、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  来表示.

由全体实数构成的集合称为**实数集**,并记为  $\mathbb{R}$ ;由地球上所有动物构成的集合为动物集合; $\dots$ .

集合  $A$  中每一个个体称为集合  $A$  的**元素**.集合的元素一般用小写字母  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\dots$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  等来表示.若  $a$  是集合  $A$  的一个元素,则记为

$$a \in A.$$

读作“ $a$  属于  $A$ ”;若  $a$  不是集合  $A$  的元素,则记为

$$a \notin A \quad \text{或} \quad a \bar{\in} A,$$

读作“ $a$  不属于  $A$ ”.

例如对实数集  $\mathbb{R}$  及数  $x = \sqrt{2}$  与复数  $z = 1 + \sqrt{3}i$  来说, 有

$$x \in \mathbb{R}, z \notin \mathbb{R}.$$

若集合  $B$  的每一个元素, 也都是  $A$  的元素, 即

$$\forall a \in B \Rightarrow a \in A.$$

(这里“ $\forall$ ”是“对于任意的”意思, “ $\Rightarrow$ ”是“总有”或“总能推导出”的意思), 则称集合  $B$  是集合  $A$  的**子集**, 同时也称集合  $A$  是集合  $B$  的**母集** (图 1-1), 并记为

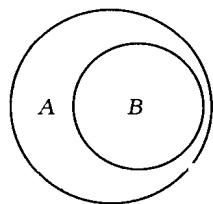


图 1-1

$$B \subset A \quad \text{或} \quad A \supset B,$$

读为“ $B$  含于  $A$ ”或“ $A$  含有  $B$ ”. 在本书中我们对真子集与非真子集的子集(即把母集也看作自己的子集)不加区分地称为子集.

例如根据各种动物的不同属性, 可将动物这个集合分成各种不同的子集——“纲”, 而且我们还知道“纲”内有“目”, “目”中有“科”, “科”下有“属”, 子集中还有子集. 如在 2003 年“SARS”疫情中出了名的果子狸, 它是属于哺乳纲、食肉目、灵猫科、果子狸属. 若回过头来看动物这个“母集”也不过是“生物”这个集合的一个子集而已.

在数学中, 元素和子集是两个完全不同的概念, 虽然还有以集合为元素的集合, 但元素与子集的概念是不能相混的.

### B. 集合的表达形式

通常集合有两种表达形式: **列举法**和**描述法**.

所谓“列举法”是将集合中的所有元素, 逐一列于一个大括号  $\{ \}$  之内, 每个元素间用逗号分开, 且集合中的元素各不相同(当一个元素在这样的表达形式中多次出现时, 它们只表示同一个元素), 由集合的定义可知其表达形式与元素的排列次序是无关的.

列举法通常适用于表示只有有限多个元素的集合, 同时也适用于虽有无穷多个元素, 但可以用适当的方式全部排列出来的集合. 例如:

$$\text{方程 } x^3 - 4x = 0 \text{ 的解集为 } A = \{0, -2, 2\};$$

$$\text{方程 } \sin x = 1 \text{ 的解集为 } B = \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \dots, 2n\pi + \frac{\pi}{2}, -2n\pi - \frac{3\pi}{2}, \dots \right\};$$

而小于 1 的正有理数集合可表示为

$$C = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}.$$

用“描述法”来表示的集合的形式为

$$A = \{x \mid p\}$$

其中竖线前的  $x$  是集合  $A$  之元素的一般记号, 竖线后的  $p$  表示集合  $A$  中所有元素的共同属