



鍾善基主編

初等数学概论

知识出版社

中学数、理、化教学参考用书

初等数学概论

鍾 善 基 主编
张君达 明知白
周沛耕 王建民 编著

知识出版社
北 京

内 容 提 要

本书对初等数学的大部分内容作了简明、深入浅出的介绍。全书按初等代数、平面三角、初等几何、解析几何分类，每类又分若干章专题概论。在每一专题概论中汇有数学发展史资料，简介所论知识的结构系统并以现代数学观点剖析、引伸与拓广传统的初等数学内容。非欧几何简介是为读者另辟的一个非初数学的专题概论。

本书可作高等师范院、校数学系初等数学课程教学参考用书，高师数学系学生用书，中学数学老师教学研究用书。全书论述精辟，文字简炼，通俗易懂。凡具有高中文化水平的读者均可学习与阅读本书。

初 等 数 学 概 论

鍾善基 主编

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街17号)

新华书店总店北京发行所经销 张家口地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张25 插页4 字数480千字

1990年6月第1版 1991年5月第2次印刷

印数：2001~3200

ISBN 7-5015-0290-0/G · 96

定价：12.00元

献给教师的书

蘇步青題



前 言

长期以来，中等学校与高等师范院、校的数学教育工作者普遍注意研究“中学数学与高等数学的衔接问题”。作为一名中学数学教师，更关心的是“如何使自己的数学教育思想与教学方法适应高等数学的教与学的需要”。作为一名高等师范院、校的数学教育教师，他将研究“怎样使学生在近代数学思想、观点的指导下，分析与选用中学数学的教材与教学方法”。随着数学教育学的创建与发展，这一研究课题已经日益受到人们的关注。

我国的中学数学课程是一门含有多学科、多分支内容的课程。显然，科学的知识系统与学科的教学系统是两个不尽相同的概念。事实上，就数学的科学知识系统来说，很难对中学数学课程中的某些内容作出“初等”或“高等”的划分。《初等数学概论》仅就我国中学数学课程中的若干内容较为深入地作了简明扼要的论述。

本书共分五部分。第一部分是中学数学的代数分支的若干内容，计有数与数域的扩充，方程与方程组，函数与映射，不等式的原理与性质，数列的一般知识，复数及排列、组合与二项式定理等内容。第二部分是平面三角的若干内容，计有三角函数与反三角函数、三角变换及三角与几何等内容。第三部分是初等几何的若干内容，计有平面几何、立体几何等内容。第四部分是平面解析几何的若干内容，计有

坐标系、曲线、直线、圆锥曲线及参数方程等内容。第五部分是非欧几何简介。全书共分十二章，每章具备各自的独立性与系统性。为使读者对中学数学中各数学分支有一个全局的认识，每一数学分支的引言都简要地介绍了本学科的发生、创建与发展的历史。全书力图使读者以高等数学的观点认识某些中学数学的教学知识体系，故对某些章节的内容进行必要的拓广与引伸。诸如域的扩充、超越数、函数方程、平面三角的某些理论、近代概率观点、布尔巴基公理化定义、几何变换及非欧几何等内容的简介。

《初等数学概论》可以作为高等师范院校开设“中学数学教材教法课”、中学数学老师教学与进修提高时的教与学的参考用书。

本书由北京师范大学钟善基教授主编，负责全书的设计与终审定稿及修改部分原稿的工作。全部书稿完成后，由北京师范大学教育科学研究所张君达副教授初审并作了部分的修改工作。

目 录

前 言

第一部分 代 数

第一章 数系	3
一、自然数理论	10
1. 基数理论	11
2. 序数理论	12
二、有理数域	15
三、实数集	21
1. 无理数的引入	22
2. 实数集及其性质	28
3. 代数数与超越数	33
附录: 希尔伯特数学问题	39
第二章 方程与方程组	43
一、等式与方程	52
二、同解方程与同解原理	56
三、方程的近似解法	61
1. 累试法	61
2. 弦位法	62
四、扩充域与不动点原理简介	64
1. 关于代数方程解的充要条件的认识	64

2. 不动点原理的认识.....	67
第三章 函数与映射	76
一、函数与映射.....	81
二、反函数及其性质.....	88
三、复合函数.....	95
四、函数方程简介.....	102
1. 函数方程的概念.....	103
2. 函数方程的解法.....	105
3. 关于函数的公理化定义.....	108
第四章 不等式	112
一、不等式的概念与性质.....	113
1. 基本概念与基本原理.....	113
2. 不等式的基本性质.....	115
3. 绝对值不等式的几个重要性质.....	116
二、不等式的解法.....	117
1. 一元一次不等式与一元一次不等式组的 解法.....	118
2. 一元二次不等式的解法.....	118
3. 一元高次不等式的解法.....	119
4. 分式不等式的解法.....	123
5. 无理不等式的解法.....	124
6. 绝对值不等式的解法.....	126
7. 一些简单的超越不等式的解法.....	127
三、经典不等式.....	128
1. 有关平均数的不等式.....	128
2. 柯西不等式.....	137

3. 霍尔德不等式与闵科夫斯基不等式	139
四、不等式的证明	140
1. 不等式的基本证明方法	141
2. 放缩法与数学归纳法	146
3. 微分法	149
五、不等式的应用	150
第五章 数列	156
一、数列的一般知识	158
1. 数列的表示法	159
2. 数列的基本性质	164
3. 数列的通项问题与前 n 项和问题	164
二、等差数列与等比数列	167
1. 等差数列的定义和性质	167
2. 等比数列的定义和性质	174
3. 等差数列与等比数列的两套公式及其运用	180
三、数列求和问题	187
1. 两类基本的求和问题	188
2. 混合数列的求和	195
3. 自然数的方幂和及其应用	196
四、等比差数列、高阶等差数列与循环数列	201
1. 等比差数列	201
2. 高阶等差数列	203
3. 循环数列	209
第六章 复数	211
一、复数集	214

1. 复数集内的元素	214
2. 共轭复数	221
3. 复数的三角形式	230
4. 复数集上的一元 n 次方程和复数的 n 次 方根	239
二、复数与几何	255
1. 复数集、复平面、向量集	255
2. 方程的曲线与函数的图象	265
3. 复数运算的几何意义	275
第七章 排列、组合、二项式定理、概率初步	286
一、排列、组合	287
1. 解排列、组合问题的八种基本思维方法	288
2. 具有较多限制条件的排列、组合问题 举例	304
3. 其他类型的排列、组合问题选讲	313
二、二项式定理	326
1. 二项式定理与组合数性质	326
2. 杨辉三角与组合数性质	342
三、概率初步	346
1. 事件与概率	346
2. 概率计算的例题选讲	348

第二部分 三 角

第八章 平面三角	363
一、三角函数与反三角函数	364
1. 三角函数的定义	365

2. 三角函数的图象和性质	373
3. 反三角函数	390
4. 三角函数值的反演	395
二、三角公式与三角变换	397
1. 三角公式	398
2. 三角函数的求值	418
3. 三角函数式的化简与证明	428
4. 三角方程的求解	439
三、三角与几何	452
1. 解三角形的基本理论	452
2. 解三角形的基本类型	466
3. 应用举例	472
4. 用三角方法解决几何问题	481

第三部分 初等几何

第九章 平面几何	495
一、平面几何研究的问题	495
二、当前平面几何的研究方向	522
第十章 立体几何	524
一、立体几何需要的基本能力	524
二、研究立体几何的内容、方法及解题规律	
的三个专题	543
1. 异面直线的成角和距离	543
2. 对称原则	558
3. 关于四面体的基本结果	561

第四部分 平面解析几何

第十一章 解析几何	578
一、坐标系中的基本问题和坐标方法.....	581
1. 坐标系.....	581
2. 坐标法在中学数学中的应用.....	591
二、曲线与方程.....	602
1. 曲线与方程的概念.....	602
2. 轨迹方程.....	608
3. 用待定系数法求曲线的方程.....	620
三、直线和圆锥曲线.....	624
1. 直线.....	624
2. 圆锥曲线.....	636
四、坐标变换.....	662
1. 坐标轴的平移.....	667
2. 坐标轴的旋转.....	670
3. 一般二次方程的讨论和化简.....	673
五、参数方程、极坐标.....	678
1. 参数方程.....	678
2. 极坐标.....	697
六、解析几何中的几个专题.....	725
1. 曲线系方程.....	725
2. 平面区域和二元不等式.....	740
3. 最大(小)值问题.....	755
4. 定值问题.....	765

第五部分 非欧几何

第十二章 非欧几何简介.....	769
一、非欧几何简介.....	769
二、关于“模型”的认识.....	775
三、罗巴切夫斯基几何简介.....	777
四、关于黎曼几何.....	784

第一部分 代 数

代数一词来自“Kitab al jabr w'al-muqabala”一书的书名，后来演变为algtbra，这就是拉丁文的“代数学”。

随着代数学的不断发展，人们对代数以及代数所研究的基本问题的认识在逐渐加深。16世纪后期韦达引进字母表示法，当时代数主要研究字母的计算、含有字母的公式的变换以及求解代数方程等问题。人们的认识更多局限于代数与算术的区别上。18世纪末及19世纪初，不少数学家致力于一元 n 次代数方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

的根号解问题的研究，并提出相应的理论。有的人把代数理解为研究方程理论的科学，如19世纪中叶谢尔的代数书中，称代数是代数方程理论。几乎与此同时，19世纪60年代欧拉在《代数学引论》中则把代数定义为各种量的计算的理论。19世纪后期，代数研究的领域逐渐拓广到力学、物理学等方面，研究的对象也进一步发展为向量、矩阵、张量、旋量、超复数等。由于对若干不是数的对象可以用类似于普通计算的方法来进行计算，因而相应发展起来各种不同的代数结构。这时，人们开始把代数理解为研究各种代数结构的科学，

即所谓公理化代数或抽象代数。

抽象代数的主要内容是研究带有运算的集合，即代数系统。抽象代数在数学的其它分支以及自然科学和科学技术等许多领域中都有重要的应用。

由于科学系统与教学系统的区别，中学代数学科与近代数学在内容、意义和方法上有显著差异。中学代数学科是一门综合性的学科，它的内容涉及到数学中代数、分析、概率统计等分支。它与平面三角、平面几何、立体几何以及解析几何等学科有着密切的联系。当代课程论、教学论以及学习心理学的发展都要求教材高度精选与结构化，在对中学代数学科的内容进行分析时，应该尽量体现近代数学的观点。其中，常量与变量、离散与连续、必然与或然等数学观点以及集合与映射的思想、归纳与演绎思维等都应予以足够重视。

第一章 数 系

数的概念的扩充与进位制的发展

数的概念的产生与发展是实践的需要，它与量的度量和记量有着密切关系。人们在原始的多与少的概念的基础上，逐步把数从具体事物中抽象出来，借助人的天然计数器——两只手，自然地产生了十进位值制记数法。随着科学技术的不断发展，数的概念日趋完善，非十进位制记数法相继产生。数的概念的扩充与进位制的发展大大促进了科学技术的发达，为数学本身的发展奠定了坚实的基础。

1. 数的概念的扩充

从代数结构的观点出发和运用公理化体系的方法来认识与处理数的概念的扩充，对于理解抽象与严谨的科学的数的理论十分必要。

(1) 引入新数

从数学本身的发展来看，一类新数的产生常是为了适应某种运算的需要。所谓定义一种运算，确切地说应是在某(数)集合中定义一种运算，事实上，运算可实施的范围常是研究运算时的主要问题之一。例如，在扩大自然数集 $Z^+ \cup \{0\}$ 中可实施加法与乘法的运算，在整数集 Z 中可实施加法、减法与乘法的运算等。定义一种新的运算是指定义一种原(数)集合所不具备的运算。这种新的运算结果将引入一类新数，而新

数的产生将使旧(数)集扩展为新(数)集,由此数的概念向前发展了一步,这便是数的概念扩充的规律.例如,整数集 Z 中除法运算不是总可以实施的.在定义一种新的运算——除法后,运算结果不一定是整数,就需要定义一类新数——分数.同样,可以认为引入负数是减法运算的需要,引入无理数是开方运算的需要,而引入虚数则是求负数的偶次方根的运算的需要.

应该注意,这里所谈的“由于运算的需要而引入新数”,仅指在某种观点之下引入新数的前提而言.其中并不涉及所引入的新数是否必是某种运算的结果的问题,如由于开方运算存在“开方开不尽”的问题而引入无理数,但不能说“无理数就是开方开不尽的数”.其实,通过其它运算及方法同样可以引入无理数,如 $\sin 1$, $\lg 2$, π 等是无理数.

(2) 扩展数集

在数的概念的发展过程中,引入的新数与旧数组成一个旧数集的扩集——新的数集,它不同于仅由新数组成的集合.显然,新的数集将能解决旧的数集所不能解决的运算上的矛盾.新的数集应保持旧的数集的主要性质及基本运算律,同时保证旧数作为新的数集的元素仍能进行原有的运算.按照这种要求所进行的数集的扩展与数的概念扩充的关系是密不可分的.例如,引入的新数无理数与旧数有理数组成一个新的数集的同时,就预示数的概念由有理数扩充为实数.

令旧数为 α ,旧的数集为 A ,新数为 $\bar{\alpha}$,新数集为 $\bar{A}$,概念扩充后的新数为 β ,扩展的新的数集为 B .每一次数的概念扩充的程序如图:

显然,由运算需要而引入的新数 $\bar{\alpha}$ 与数的概念扩充后所