应用型高等学校教材

概率论与数理统计

主编　刘家春
主审　陈桂林

哈尔滨工业大学出版社

应用型高等学校教材

概率论与数理统计

主　编　刘家春
副主编　齐丽萍
主　审　陈桂林

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 提 要

本书是为应用型高等学校学生编写的教材。本书通过预篇将高中与大学知识有机地衔接起来，突出强调了处理各种问题的思路、方法和步骤，着重培养学生提高解决问题的能力。本书力求深入浅出，通俗易懂，突出应用。全书例题量大，解题详细，便于教学。

主要内容包括预篇、随机事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理，数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、单因素试验的方差分析及一元正态线性回归，书后附有详细的习题解答。

本书适用于应用型高等学校学生，也可作为成人教育和高职高专的相关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘家春主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2005.9

(应用型高等学校教材)

ISBN 7-5603-2190-9

Ⅰ.概…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.①概率论-高等学校:技术学校-教材　②数理统计-高等学校:技术学校-教材

Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 102411 号

出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787×960　1/16　印张 19.5　字数 416 千字
版　　次　2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5603-2190-9/O·183
印　　数　1~3 000
定　　价　28.00 元

前　言

概率论与数理统计作为数学的一个重要分支，在许多领域中有着广泛的应用。现在，不但理工学科，而且经济学、管理学等专业，对概率统计的要求也越来越高。由于概率统计是研究随机现象内在规律的，它所用的方法不同于以往学过的数学，所以初学者往往感到比较难学。

本书针对职业教育和成人教育的特点，力求深入浅出，通俗易懂，从实际问题出发，引出基本概念，进而上升到理论，特别强调了处理各种问题的思路、方法和步骤，力求做到全面并富有启发性，以便使读者能够举一反三，触类旁通，开拓处理问题的思路，提高解决问题的能力。本书的主要内容包括预篇、随机事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理，数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、单因素试验的方差分析及一元正态线性回归。同时，本书针对学生的特点将全部习题做了较详细的解答。书中有“*”的部分为选修内容。

本书在编写过程中征求了哈尔滨工业大学华德应用技术学院领导和任课教师的意见，并得到了竺培国教授的大力支持。娄少春、刘福荣、李晶莹对本书提出了宝贵意见。

本书预篇、1、2、3、4、5 章由刘家春编写，6、7、8、9 章由齐丽萍编写，姚克剑参加了部分章节的编写和修改工作，王游参加了校对工作。全书由刘家春统稿，由哈尔滨工业大学陈桂林教授主审。

由于编者水平有限，书中疏漏之处恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 7 月于哈工大

目　　录

预　篇

0.1　概率统计研究的对象

人们在实践活动中可能遇到各种各样的现象，但归结起来不外乎两类：一类是确定性现象；另一类是随机现象。

确定性现象是指，在一定条件下必然发生或必然不发生的现象。例如，在标准大气压下将水加热到100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然落回地面，这些现象都是必然发生的。而在标准大气压下，10℃的水结冰；同性电荷相吸引，这些现象是必然不发生的。

随机现象是指，在一定条件下，可能发生也可能不发生的现象。例如，掷一枚硬币正面向上；向某一目标进行射击，目标被击中。这样的现象，可能发生，也可能不发生，所以都是随机现象。

随机现象可能发生，也可能不发生，是否有规律可寻呢？人们经过长期的实践，发现这类现象虽然就每次试验来说，具有不确定性，但在大量重复试验中，它们的发生是有规律的。例如：

掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很多时，正面和反面出现的次数几乎各占1/2。

对一个目标进行射击，当射击次数非常多时，弹孔的分布呈现出一定的规律性。

从上面的实际例子可以看到，随机现象也具有规律性，概率统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

0.2　排列和组合

在计算概率时，经常利用排列和组合，为此，我们把它们的主要内容加以回顾。

一、两个基本原理

1.加法原理

完成一件事情，有两类不同的办法，第一类办法中有 m 种方法，第二类办法中

有 n 种方法，那么完成这件事情共有 $m+n$ 种不同的方法。例如，从底楼到二楼有三个楼梯和两部电梯，那么，从底楼到二楼的走法共有 $3+2=5$ 种。

2.乘法原理

完成一件事情，必需经过 k 个步骤，第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，……，第 k 个步骤有 n_k 种方法，则完成这件事情共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种不同的方法。例如，从甲村到乙村有 2 条路，从乙村到丙村有 3 条路，且从甲村到丙村必须经过乙村，则从甲村到丙村共有 $2\times 3=6$ 种不同的走法。

二、排列

1.选排列

从 n 个不同元素中，每次取出 r 个元素，按一定顺序排成一列，称为从 n 个元素取 r 个元素的一种**选排列**，所有不同排列的总数记为 P_n^r。

构成一个选排列可分 r 个步骤，第一步，从 n 个元素中任取一个，共有 n 种取法，当第一个取定后再取第二个，此时只有 $n-1$ 种取法。依此类推，选取第 r 个时，因为前边的 $r-1$ 个已经取定了，所以只能从剩下的 $n-(r-1)=n-r+1$ 个中任取一个，共有 $n-r+1$ 种取法。由乘法原理知

$$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1) \tag{0.1}$$

这就是 n 个元素取 r 个元素的选排列总数的计算公式。

2.全排列

将 n 个不同的元素，按一定的顺序排成一列，称为 n 个元素的一种**全排列**。n 个元素的全排列总数记为 P_n^n 或 P_n。

全排列是选排列中 $r=n$ 的情况，故

$$P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 1=n! \tag{0.2}$$

3.有重复的排列

从 n 个不同的元素中，每次取 k 个元素（$k\leqslant n$），允许重复，这种排列称为有重复的排列，其排列总数记为 R_n^k。

构成一个有重复排列可分 k 个步骤进行：第一步从 n 个元素中任取一个，共有 n 种取法，对于第一步的每种取法，第二步仍有 n 种取法，……，由乘法原理知

$$R_n^k=n\cdot n\cdots n=n^k \tag{0.3}$$

***4.不尽相异元素的全排列**

首先看一个例子：设有 5 个元素 a,a,a,b,c，其中 3 个 a 是相同的。今把它们按一定顺序排成一列，求有多少种不同的排法。

设有 x 种不同的排法，就其中一种排法如 $abaac$ 而言，若把三个 a 区别为 a_1，a_2,a_3，则可得 $P_3=3!$ 种不同的排列，就是说，就 x 种不同排法里的每一种，若把 a

区别为 a_1,a_2,a_3,则得到$(3!)x$种排列,这恰好是5个不同元素 a_1,a_2,a_3,b,c 的全排列总数,即 $P_5=5!$,从而

$$(3!)x=5!$$

所以

$$x=\frac{5!}{3!}$$

如果5个元素是 a,a,a,b,b。把它们按一定顺序排成一列,设不同排列总数为 y,就其中一种如 $abaab$ 而言,如果把两个 b 区别为 b_1,b_2,则得 $P_2=2$ 种不同的排列。就是说对 y 种排列的每一种,如果把 b 区别为 b_1,b_2,则得到$(2!)y$ 种不同的排列,这个数字与 x 相等,即

$$(2!)y=x$$

所以

$$y=\frac{5!}{3!2!}$$

一般地,设有 n 个元素,其中有 k 种不同的元素,第一种元素有 n_1 个,第二种元素有 n_2 个,……,第 k 种元素的 n_k 个($n_1+n_2+\cdots+n_k=n$),将 n 个元素排成一列,称为 n 个**不尽相异元素的一种全排列**,不同的排列总数为

$$N=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \tag{0.4}$$

三、组合

1. 不同元素的组合

从 n 个不同的元素中每次取出 k 个元素,不计顺序组成一组,称为从 n 个元素中取 k 个元素的**一种组合**,所有不同组合的总数记为 C_n^k(或记为$\binom{n}{k}$)。

从 n 个不同元素中取 k 个元素的选排列,可以分两步进行:先从 n 个元素中取 k 个元素组成一组,然后将这一组 k 个元素全排列,由乘法原理知

$$P_n^k=C_n^k\cdot k!$$

于是

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{0.5}$$

式(0.5)即是 n 个元素取 k 个元素组合总数的计算公式,规定 $C_n^0=1$。

2. 分组组合(多组组合)

将 n 个不同的元素分成 k 组,第一组有 n_1 个,第二组有 n_2 个,……,第 k 组有 n_k 个($n_1+n_2+\cdots+n_k=n$),若组内元素不计顺序,则不同的分法共有

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\cdots\cdot C_{n_k}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \tag{0.6}$$

组合。

3. 常用的组合公式

$$\begin{cases} C_n^r = C_n^{n-r} \\ C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1} \\ C_{m+n}^r = \sum\limits_{i=0}^{r} C_m^i C_n^{r-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n \end{cases} \tag{0.7}$$

***4. 有重复的组合**

从 n 个不同的元素中有放回地取 r 次，记下结果，所得结果不计顺序组成一组，称为 n 个元素取 r 个元素的一种**有重复的组合**，不同组合总数记为 H_n^r。

为了得到 H_n^r 的计算公式，我们先分析比较简单的例子。

从 1,2 两个数中有放回地取 3 次，所得结果组成一组，共可分成四组，把 3 个数按从小到大的顺序，整理得

$$(1,1,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,2,2)$$

对各组的 3 个数从左到右分别加上 0,1,2，得

$$(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)$$

这恰好是从 1,2,3,4 这 4 个数中任取 3 个数的组合，其总数为 $C_4^3 = 4$，即

$$H_2^3 = C_4^3 = C_{2+3-1}^3$$

一般地，把 n 个不同的元素与 1 到 n 的 n 个数对应起来，则从 n 个不同的元素中有放回地取 r 次化为从 1 到 n 的 n 个数中有放回地取 r 次，组成一个重复组合。将其 r 个元素从左到右按由小到大的顺序排列，得到的结果设为

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r) = a \tag{$*$}$$

对这些数从左到右顺次分别加上 $0,1,2,\cdots,r-1$，结果设为

$$(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r) = b \tag{$**$}$$

即 $$b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, \cdots, b_r = a_r + (r-1)$$

在式($*$)中有相同的数掺着排列，而在($**$)中全部是不相同的数，而且数的种类也增加为

$$1,2,3,\cdots,n+r-1$$

可见$(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r)$是上述 $n+r-1$ 数中取 r 个数的一种组合，其总数为 C_{n+r-1}^r。于是得到

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r \tag{0.8}$$

0.3 二项式定理

当 n 为整数时 $(a+b)^n$ 的展开式为

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + \cdots + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{0.9}$$

这个展开式称为**二项式定理**，其中第 $k+1$ 项

$$C_n^k a^k b^{n-k}$$

称为**通项**。展开式的所有系数

$$C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^k, \cdots, C_n^n$$

称为**二项式系数**。

第一章　随机事件与概率

1.1　随机事件

一、随机试验

如前面所说，概率统计是研究随机现象内在规律的。对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种科学试验，为了方便起见我们统称为试验。

例 1　掷一枚硬币，观察出现的结果。

例 2　掷一颗骰子，观察出现的结果。

例 3　观察其传呼台，在 7 点到 8 点接到的呼叫。

这些例子都是试验，仔细分析，可以发现这些试验具有如下的共同特点：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)试验的所有可能结果不止一个，而且事先是已知的；

(3)每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验之前不能确切预言。

我们称满足上述 3 个条件的试验为**随机试验**，记为 E。比如上面例 1，例 2，例 3 的试验分别记为 E_1, E_2, E_3。

二、随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**，简称为**事件**，今后我们用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示事件。

例如，在 E_1 中，记 H = “出现正面”，T = “出现反面”；在 E_2 中，记 e_i = “出现 i 点”($i = 1,2,\cdots,6$)，A = “出现偶数点”，B = “出现的点数大于 2”，…；在 E_3 中，记 e_i = “接到 i 次呼叫”($i = 0,1,2,\cdots$)，C = “最少接到 5 次呼叫”…… 都是随机事件。

对 E_2 中的事件进行分析我们发现，e_1 = “出现 1 点”，…，e_6 = “出现 6 点”，这些事件是最基本的，不能再分的事件，这样的事件称为**基本事件**，而事件 A, B 都是由若干个基本事件组成的事件，称为**复合事件**。

一般地，称随机试验 E 的每一个可能结果为**基本事件**(**或样本点**)，记为 e。而

由多个基本事件组成的事件称为**复合事件**。

在 E_2 中我们还可以考虑两个特殊的事件，"出现的点数大于 6"和"出现的点数不大于 6"，前者在每次试验中都不可能发生，后者在每次试验中都必然发生。

一般地，我们称在每次试验中都不可能发生的事件为**不可能事件**，记为$\varnothing$；称在每次试验中必然发生的事件为**必然事件**，记为 Ω。严格地讲，不可能事件和必然事件不是随机事件，但为今后讨论方便，我们把它们作为随机事件两个极端情况，也把它们看作随机事件。

三、样本空间

我们称试验 E 的所有基本事件所构成的集合，为 E 的**样本空间**，记为 S。

在上面的例子中

E_1 的样本空间为

$$S_1 = \{H, T\}$$

E_2 的样本空间为

$$S_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

其中，e_i = "出现 i 点"，$i = 1,2,\cdots,6$。

E_3 的样本空间为

$$S_3 = \{e_0, e_1, \cdots\}$$

其中，e_k = "接到 k 次呼叫"，$k = 0,1,\cdots$。

由于随机事件是基本事件或是由基本事件组成的复合事件，故随机事件就是样本空间 S 的一个子集。

如在 E_2 中，e_i = "出现 i 点" = $\{e_i\}$，它是 S_2 的单点子集；A = "出现偶数点" = $\{e_2, e_4, e_6\}$，B = "出现的点数大于 2" = $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$… 都是样本空间的子集。于是，引入样本空间之后我们将随机事件定义如下：

称样本空间 S 的某个子集为**随机事件**，简称为**事件**。当且仅当子集中的一个基本事件发生，才称该事件发生。

空集$\varnothing$作为 S 的子集，不包含任何基本事件，在每次试验中都不可能发生，故称为**不可能事件**。

样本空间 S 作为本身的子集，包含了所有的基本事件，在每次试验中都必然发生，故称为**必然事件**。

对于一个随机试验，应该弄清它的样本空间和有关的随机事件。

例 4 设 E 为将一枚硬币连掷两次，观察出现的结果，试写出 E 的样本空间和事件 A = "第一次出现正面"，B = "第二次出现正面"，C = "至少出现一次正面"，D = "出现两次反面"。

解　E 的样本空间为

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

其中,H = "出现正面",T = "出现反面"。

$$A = \{(H,H),(H,T)\}, \quad B = \{(H,H),(T,H)\}$$

$$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\}, \quad D = \{(T,T)\}$$

例5　设 E 为从一批灯泡中任取一只,测试它的使用寿命。试写出 E 的样本空间和事件 A = "寿命不大于50小时",B = "寿命在50小时到100小时(含100小时)之间"。

解　E 的样本空间为

$$S = \{t \mid t \geqslant 0\}$$

其中,t 为灯泡的寿命。

$$A = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 50\}, \quad B = \{t \mid 50 < t \leqslant 100\}$$

1.2　事件的关系和运算

由前面的讨论可见,随机事件就是一个集合,所以集合的关系和运算对事件同样成立。下面我们用概率的观点来讨论事件的关系和运算。

一、包含和相等

若事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称 B **包含** A,或称 A **包含于** B,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

若 $B \supset A$ 且 $A \supset B$,则称事件 A 与 B **相等**,记为 $A = B$。

判断事件的包含关系,一定要看谁发生导致谁发生。例如,某种动物活25岁为事件 A,活20岁为事件 B,因为 A 发生 B 必然发生,但 B 发生 A 不一定发生,所以 $B \supset A$。

二、事件的交(或积)

由事件 A 与 B 同时发生所构成的事件 C,称为 A 与 B 的**交(或积)**,记为

$$C = A \cap B \quad 或 \quad C = AB$$

例如,在1.1节的例4中,$A \cap B = \{(H,H)\}$,$A \cap C = A$。

推广:

$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n \Leftrightarrow C$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生构成的事件。

三、事件的并(或和)

由事件 A 与 B 至少一个发生所构成的事件 C,称为 A 与 B 的**并(或和)**,记为 $C = A \cup B = A + B$。

例如,在 1.1 节的例 4 中,$C = A \cup B, C \cup D = S$。

推广:

$C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \Leftrightarrow C$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件至少一个发生所构成的事件。

四、互不相容事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B **互不相容**(或 A 与 B **互斥**)。由该定义可见

$$A \text{ 与 } B \text{ 互不相容} \Leftrightarrow AB = \varnothing$$

例如,在 1.1 节例 4 中 A 与 D, B 与 D, C 与 D 互不相容。

推广: 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容 $\Leftrightarrow$

$A_iA_j = \varnothing(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n) \Leftrightarrow A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容

五、对立事件

由事件 A 不发生所构成的事件,称为 A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$。由该定义可见

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A\overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = S$$

六、事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件 C,称为 A 与 B 的**差**,记为

$$C = A - B = A\overline{B}$$

事件的上述关系和运算,可用图 1.1 直观地表示。

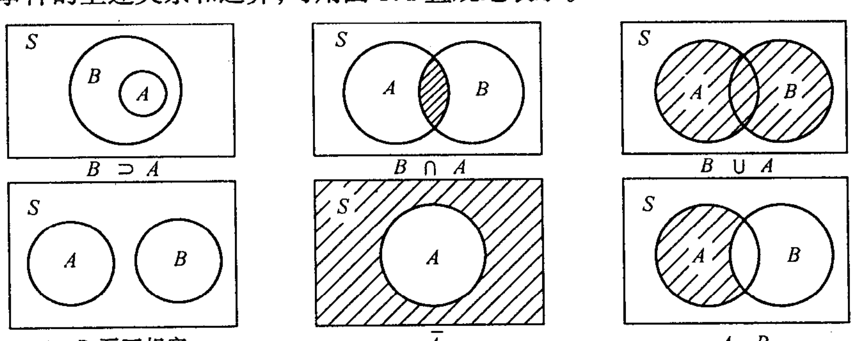

图 1.1

为了将事件的关系和运算与集合的关系和运算作对照,如表 1.1。

表 1.1

符　号	概　　率　　论	集　　合　　论
S	样本空间,必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件(样本点)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相当的,故根据集合的运算性质,可推得事件的运算性质如下:

吸收律:若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, AB = A, A \cap A = A$。

交换律:$A \cup B = B \cup A, AB = BA$。

结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$。

分配律:$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$。

对偶律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$。

例 1　圆柱形产品,只有当高和直径均合格时才是合格品,试考察下列事件的关系和运算。

A_1 = “产品合格”,B_1 = “产品不合格”;

A_2 = “高合格”,B_2 = “高不合格”;

A_3 = “直径合格”,B_3 = “直径不合格”;

A_4 = “高合格,直径合格”,B_4 = “高合格,直径不合格”。

解　因为 A_1 发生必然导致 A_2 发生,所以 A_2 包含 A_1,即 $A_2 \supset A_1$,同理有

$$A_3 \supset A_1, B_1 \supset B_2, B_1 \supset B_3, B_1 \supset B_4。$$

由$A_1 \supset A_4$且$A_4 \supset A_1$,知 $A_1 = A_4$。

A_2, A_3 同时发生则 A_1 发生,即 A_1 是由 A_2, A_3 同时发生所构成的事件,故

$$A_1 = A_2 \cap A_3 = A_2A_3$$

B_2, B_3 至少一个发生则 B_1 发生,所以 $B_1 = B_2 \cup B_3 = B_2 + B_3$。

A_1 与 B_2 互不相容,A_1 与 B_3,A_1 与 B_4 也互不相容。

$\overline{A}_1 = B_1, \overline{A}_2 = B_2, \overline{A}_3 = B_3$。

B_4 是由 B_1 发生而 B_2 不发生所构成的事件,所以

$$B_4 = B_1 - B_2 = B_1\overline{B}_2$$

例 2 设 A, B, C, D 是四个事件,试用它们表示下列事件:

(1)H_1 = "仅 A 发生";

(2)H_2 = "A, B, C, D 恰有一个发生";

(3)H_3 = "A, B 中至少有一个发生而 C, D 均不发生";

(4)H_4 = "A, B, C 中不多于一个发生,但 D 发生";

(5)H_5 = "A, B 中至少有一个发生,C, D 中至少有一个不发生";

(6)H_6 = "A, B, C, D 至多有两个发生"。

解 (1)$H_1 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$;

注意 这里最容易犯的错误是,① 误以为 $A \cup B \cup C \cup D = S$,把 H_1 写成 $S - B - C - D$;② 将 $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 与$\overline{BCD}$ 等同起来,将 H_1 写成 $A\,\overline{BCD}$。

(2)$H_2 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$;

(3)$H_3 = (A \cup B)\bar{C}\bar{D}$;

(4)$H_4 = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C})D = (\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{C})D$;

(5)$H_5 = (A \cup B)(\bar{C} \cup \bar{D}) = (A \cup B)\overline{CD}$;

(6)$H_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} +$
$A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD =$
$\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{D} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{D} \cup \bar{C}\bar{D}$

从上面的例子可见,同一个事件可以有不同的表示方法,当然要选一个简单的。

从例 1 可以发现,欲求一个事件的对立事件,只需把原来的事件加以"否定",否定词"不" 要放在原事件的关键词前面。

例 3 袋中有红、黄、蓝三色的球各若干(都多于 3 个),今从中任取三个球,记 A = "三个球的颜色全同",则 A 的对立事件为(　　)。

(A)"三个球的颜色全不同"　　(B)"三个球的颜色不全同"

(C)"三个球无红且无黄"　　(D)"三个球无蓝或无黄"