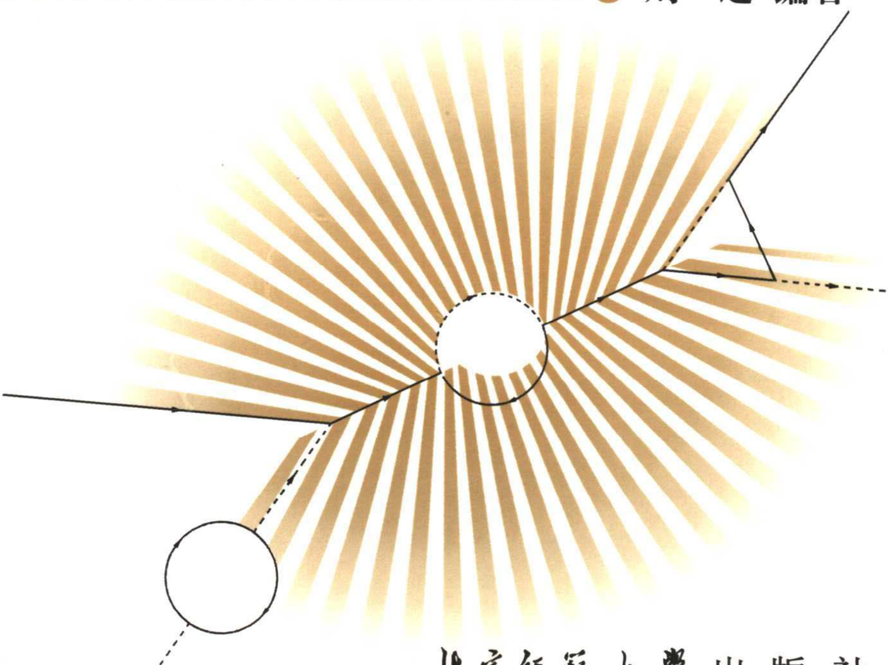
# 量子场论

## （平直时空）

LIANGZICHANG LUN PINGZHI SHIKONG

刘 辽 编著



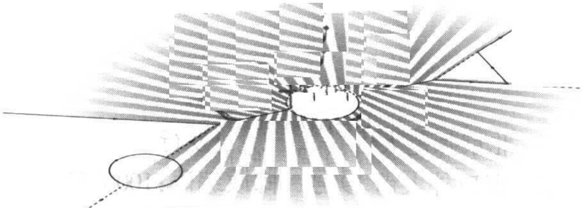
北京师范大学出版社

# 量子场论

## （平直时空）

刘 辽 编著

京师文库 惠存



北京师范大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

量子场论/刘辽编著．- 北京：北京师范大学出版社，
2003.10
ISBN 7 - 303 - 04704 - 2

Ⅰ.量…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.量子场论-高等学校-教材
Ⅳ.0413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 69719 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出 版 人:赖德胜
北京东方圣雅印刷有限公司印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:10.125　字数:265 千字
2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷
印数:1～1 000 册　定价:20.00 元

# PINGZHI SHIKONG DE LIANGZICHANG LUN

Liuliao Bianzhu

北师大教材专著出版委员会审定

资助

北京师范大学出版社

# 序　言

本书乃编者根据多年来在北京师范大学理论物理研究生班使用的《量子场论（平坦时空）讲义》整理而成. 它的对象是非粒子物理专业而从事理论物理教学和研究的人士，如引力和相对论专业. 本书具有下列特点：

1. 强调场论的洛仑兹协变性，这从编者一开始就从旋量分析出发来建立场方程以及洛仑兹协变量子条件的提出即可见一斑.

2. 对一些重要的散射截面进行了一般教本上少见的详尽数学推导. 对规范场论中的基本概念，对$CPT$ 变换，对重整化理论等进行了详细的介绍.

上述特点使得编者相信本书是一本自足的且可作为有志学习量子场论基础知识者的自学参考书.

应提到本书未涉及维数正规化，Zeta 函数正规化以及重正化群方程等一些重要内容，编者将在本书的姊妹篇《量子场论（弯曲时空)》一书中来讲述它们.

最后，编者要对赵峥教授、裴寿镛教授、朱建阳教授和北京师范大学出版社编辑陶艺军先生致以衷心的感谢. 感谢赵峥教授对本书出版所给予的一贯支持与大力协助；感谢裴寿镛教授和朱建阳教授对本书某些章节提出了宝贵的改进意见；感谢本书责任编辑陶艺军先生在本书原稿的审校中进行的细致加工.

编者识

1999 年春

于北京师范大学

# 目　录

# 引　　言

光的粒子说和波动说进行了长期的争论，从17 世纪到20 世纪初，才弄清楚光这种物质具有二象性，它既是一种连续的波场而具有波动性，又是一种分立的粒子而具有粒子性（光量子）.

1924 年32 岁的法国青年物理学家de Broglie 向巴黎大学教授会提交了一篇博士学位论文，以求给Bohr 的氢原子轨道角动量量子化条件$p_\varphi=a\cdot mv=n\hbar$一个自然的解释，在文中他假设任何粒子都伴随着一个引导波，波长为$\lambda=\dfrac{h}{mv}=\dfrac{h}{p}$，并且Bohr 的稳定轨道必须满足驻波条件$2\pi a=n\lambda$；显然由上述二式即可导出$p_\varphi=a\cdot mv=n\hbar$. 1926 年Schrödinger 在de Broglie 波的基础上建立了有名的Schrödinger 方程. de Broglie 波的深刻含义是认为一切物质，不论是光，电子、质子，还是其它的粒子都具有二象性，都是连续的波动与分立的粒子，这二种矛盾属性的统一体. 1927 年的电子衍射实验证实了这一猜想. 今天绝大多数物理学家认为，客观存在本身就是连续的波场与分立的粒子这二种矛盾属性的统一体.

如何来描述微观粒子的这种复杂的二象性行为呢？

（1）20 世纪初到30 年代，建立和发展起来的非相对论和相对论量子力学认为：量子态用态矢来表示，它应满足一定的运动方程；力学量用算符来表示. 把力学量当作算符，应引入量子条件——基本对易关系：

$$[p_j,\ q_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}.$$

式中$q_j$，$p_i$ 系一对正则共轭量.

这一手续称作一次量子化.

量子力学对解决经典理论所遇到的困难是很有成就的. 但非相对论量子力学的数学形式不满足Lorentz 协变性. 因而不能描述高能过程，即使是相对论形式的量子力学，在理论上也存在着负能和负几率困难，在实验上也不能描述高能粒子的消灭和产生过程.

(2)20 世纪40 年代以来又发展起来了狭义相对论形式的量子场论. 或Lorentz 协变量子场论，在这里，量子态用态矢来描写，力学量和波函数都是算符，而且波函数算符（场算符）是最基本的算符. 在平坦的闵可夫斯基时空它们应满足基本的对易关系：

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)]_\pm = T_{\alpha\beta}\Delta(x-y).$$

这一手续称为二次量子化.

量子场论十分成功地描述了微观粒子的电磁相互作用规律. 近几十年来，它在强作用理论和弱电统一理论方面也取得了重大的进展，因此毫无疑问，量子场论已经成为我们了解微观世界的一门必不可少的基础理论. 不仅如此，量子场论还是研究其他理论物理的一个重要工具，近来统计物理，固体物理和其他领域的理论工作者都在各自的研究领域内移植了量子场论的研究方法，取得了重要的研究成果. 可见目前量子场论已经成为各类物理专业研究工作者的一门重要的基础理论课程.

# 第1章 数学准备

## §1.1 Lorentz群简述

在狭义相对论中通常所指的Lorentz变换是指固有Lorentz变换$Lp$,它含有:

恒等变换,

空间转动,

特殊Lorentz洛仑兹变换.

它是不同惯性系的时空坐标间的一种变换关系.
可证这种Lorentz变换满足下列条件:

(1) 任二个Lorentz变换的积仍是一个Lorentz变换;

(2) 满足结合律;

(3) 存在恒等变换;

(4) 任一Lorentz变换必有逆,且其逆也是一个Lorentz变换.
满足上述条件的变换的集合叫做群.亦即全部(固有)Lorentz变换的集合,构成一个群叫固有Lorentz群$Lp$.

设在Lorentz变换

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \text{或 } x' = ax, (a)\varepsilon Lp \tag{1.1.1}$$

下,某个物理场量$\psi(x)$经受的变换为

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = D_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \text{ 或 } \psi' = D\psi, D \equiv D(a), \tag{1.1.2}$$

则场量$\psi(x)$在洛氏变换下变换性质之不同,完全由变换矩阵$D$之不同来定,我们说矩阵$D$是Lorentz群的一个表示矩阵,相应的$\psi$

是 Lorentz 群的一个表示对象，$\psi$ 和 $D$ 合称 Lorentz 群的一个表示.

显然，Lorentz 群可以有许多不同的表示：标量表示，旋量表示，矢量表示，张量表示，等等.

考虑无穷小 Lorentz 变换：

$$x_\mu \to x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) x_\nu, \tag{1.1.3}$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$，共有 6 个独立参量，3 个尤拉角，3 个速度分量，故 Lorentz 群是含有 6 个参量的连续群（李群）.

某个表示 $(\psi, D)$ 在变换 (1.1.3) 下的变换规律

$$\psi \to \psi'(x') = D\psi(x),$$

$$D(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) = D(\delta_{\mu\nu}) + \left.\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right|_{\varepsilon_{\mu\nu}=0} \cdot \varepsilon_{\mu\nu} + (0^2)$$

$$\simeq I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu}. \tag{1.1.4}$$

其中 $I$ 是单位矩阵，$I_{\mu\nu} \equiv 2\left.\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right|_{\varepsilon_{\mu\nu}=0}$，称 Lorentz 群 $Lp$ 的生成元. 它也是个矩阵，并且是一个常数矩阵.

由此得场量在变换 (1.1.3) 下的增量为：

$$\delta\psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \psi(x) \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} I_{\rho\sigma} \psi(x). \tag{1.1.5}$$

由于 $\varepsilon_{\rho\sigma} = -\varepsilon_{\sigma\rho}$，故可令 $I_{\rho\sigma} = -I_{\sigma\rho}$ 即独立的 $I_{\rho\sigma}$ 仅 6 个，$I_{\rho\sigma}$ 是一个常数矩阵，它完全由 Lorentz 群的表示决定，或它完全由场量在 Lorentz 变换下的性质来决定.

可以证明：标量场：$I_{\rho\sigma} = 0$，

一级旋量场：$I_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]$，

矢量场：$\varphi_\mu = [\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} I_{\rho\sigma,\mu\nu}]\varphi_\nu$，

$$I_{\rho\sigma,\mu\nu} = (\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}).$$

证：对矢量场应成立 $\varepsilon_{\mu\nu}=(\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}(I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}$，

$$
\begin{aligned}
\text{故 } \varepsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma,\mu\nu} &= 2\varepsilon_{[\mu\nu]}=\varepsilon_{\mu\nu}-\varepsilon_{\nu\mu}\\
&= \varepsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\varepsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}\\
&= \varepsilon_{\rho\sigma}(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}).\ \text{即}
\end{aligned}
$$

$$I_{\rho\sigma,\mu\nu}=\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}.$$

一级旋量场的证明见第二章第三节.

现在考虑 2 维复空间内的变换：

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{1.1.6}$$

其中 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，满足么模条件.

$$\det M=ad-bc=1. \tag{1.1.7}$$

则复共轭变换：

$$\begin{pmatrix} u'^*_1 \\ u'^*_2 \end{pmatrix}=M^*\begin{pmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

其中 $M^*=\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$，也满足么模条件

$$\det M^*=a^*d^*-b^*c^*=1. \tag{1.1.9}$$

$M$ 和 $M^*$ 分别是么模群 $SL(C,2)$.

如此定义的二个列矩阵：

$$
\begin{cases}
u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\
u^*=\begin{pmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} u_{\dot 1} \\ u_{\dot 2} \end{pmatrix},
\end{cases} \tag{1.1.10}
$$

称为一级旋量，是 $SL(C,2)$ 群的表示对象，$M,M^*$ 为其表示矩阵，此时应注意到，由于 $M$ 和 $M^*$ 的特征标不等，这二个表示是不等价的.

$$\left.\begin{array}{l}(u,M)\text{ 称 }D^{\frac{1}{2}0}\text{ 表示},\\(u^*,M^*)\text{ 称 }D^{0\frac{1}{2}}\text{ 表示},\end{array}\right\}\text{互为复共轭}.$$

$M$ 和 $M^*$ 分别构成幺模群 $SL(C,2)$，且含有$(2n^2-2=6)$个参量，给定 6 个参量值，就给定了一个具体的 2 维幺模变换，而每个 2 维幺模变换又对应一个且仅对应一个固有 Lorentz 变换. 反之，每个固有 Lorentz 变换可与仅差一负号的二个 2 维幺模变换相对应. 因之，$D^{\frac{1}{2}0}(u,M)$ 与 $D^{0\frac{1}{2}}(u^*,M^*)$ 都是 Lorentz 群的双值表示.

若形式上引入 2 维复空间的度规矩阵

$$(g^{ab})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},(g_{ab})=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{1.1.11}$$

其中 $g^{ab}g_{bc}=\delta^a_c,g^{ab}=-g^{ba},g_{ab}=-g_{ba}$.

并定义

$$\begin{aligned}&u^a\equiv g^{ab}u_b(u^1=u_2,u^2=-u_1).\\&u^{*a}\equiv g^{ab}u_b^*(u^{*1}=u_2^*,u^{*2}=-u_1^*),\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

或 $\qquad u^{\dot a}\equiv g^{ab}u_{\dot b}(u^{\dot 1}=u_{\dot 2},u^{\dot 2}=-u_{\dot 1}).$

利用度规矩阵及幺模条件可证：

(1) 任两一级旋量的标积，在二维幺模变换下为不变量.

即 $\qquad u_av^a=$ 不变量，

$\qquad\qquad u_{\dot a}v^{\dot a}=$ 不变量.

(2)$u_av^a=-u^av_a$.

(3) 任一旋量的长度为 0，

即 $\quad u_au^a=0=u_{\dot a}u^{\dot a}$.

现引入直积矩阵：

$$M^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=M\otimes M^*=\begin{pmatrix}aM^*&bM^*\\cM^*&dM^*\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa^* & ab^* & ba^* & bb^* \\ ac^* & ad^* & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & da^* & db^* \\ cc^* & cd^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix}, \qquad (1.1.13)$$

及旋量的直积

$$(u_{a\dot{b}}) = \begin{pmatrix} u_{1\dot{1}} \\ u_{1\dot{2}} \\ u_{2\dot{1}} \\ u_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 u_1^* \\ u_1 u_2^* \\ u_2 u_1^* \\ u_2 u_2^* \end{pmatrix}, (u_{a\dot{b}})^* = u_{b\dot{a}}. \qquad (1.1.14)$$

则可证

(1) $u_{a\dot{b}}$ 和 $M^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 仍是 $SL(C,2)$ 群的一个表示，叫 2 级混合旋量表示，通常以 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 表之.

利用度规矩阵 $g^{ab}$ 可证：$u_{1\dot{1}} = u^{2\dot{2}}, u_{2\dot{2}} = u^{1\dot{1}}, u_{1\dot{2}} = - u^{2\dot{1}}, u_{2\dot{1}} = - u^{1\dot{2}}$.

**例** 证 $u^{2\dot{2}} = u_{1\dot{1}}, u^{2\dot{2}} = g^{2a}g^{2b}u_{a\dot{b}} = g^{2a}g^{2b}u_a u_b^* = u_1 u_1^* = u_{1\dot{1}}$.

(2) $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的矢量表示.

证：对 $(u_{ab})$ 引入幺正变换 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}Tu$.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$(1.1.15)$$

则

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}T\begin{pmatrix}u_{1\dot{1}}\\ u_{1\dot{2}}\\ u_{2\dot{1}}\\ u_{2\dot{2}}\end{pmatrix}. \tag{1.1.16}$$

即

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=\frac{1}{2}(u_{2\dot{1}}+u_{1\dot{2}}),\\ \psi_2&=\frac{1}{2i}(u_{2\dot{1}}-u_{1\dot{2}}),\\ \psi_3&=\frac{1}{2}(u_{1\dot{1}}-u_{2\dot{2}}),\\ \psi_4&=-\frac{1}{2i}(u_{1\dot{1}}+u_{2\dot{2}}),\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}u_{1\dot{1}}&=\psi_3-\mathrm{i}\psi_4,\\ u_{1\dot{2}}&=\psi_1-\mathrm{i}\psi_2,\\ u_{2\dot{1}}&=\psi_1+\mathrm{i}\psi_2,\\ u_{2\dot{2}}&=-\psi_3-\mathrm{i}\psi_4.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.17}$$

在变换 $u'=D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}u$ 下，$\psi'=TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\psi$.

应用公式 $\det(AB)=\det A\det B=\det(BA)$ 及 $\det(A\times B)=[\det(AB)]^{n^{r-1}}$，其中 $n$ 系矩阵维数，$r$ 系直积矩阵数.

可进一步证明：$TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}$ 正好就是固有 Lorentz 变换矩阵，证明步骤：

(1) $\langle\psi',\psi'\rangle=\langle\psi,\psi\rangle$.

(2) $\det\left(TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\right)=+1$.

(3) $\left(TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\right)_{44}=\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)\geq 1$.（顺时）

(4) $\psi_1,\psi_2,\psi_3$ 是实数量，$\psi_4$ 是虚数量.

故 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的矢量表示.

应注意：虽然表示 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=D^{\frac{1}{2}}\otimes D^{\frac{1}{2}}$，可分解为低维表示的直积，但不能按 Clebsch-Gordan 定理展开为低维表示的直和，即 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 $SL(C,2)$ 或 $Lp$ 的一个不可约表示或 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\neq D^1\oplus D^0$.

不作证明，仅指出：

$D^{0\,0}$ 是 Lorentz 群的标量表示.

$D^{\frac{1}{2}\,0}$,$D^{0\,\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的一级旋量表示.

$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$,$D^{1\,0}$,$D^{0\,1}$,是 Lorentz 群的二级旋量表示或矢量表示.

一般说,$SL(C,2)$ 的全部表示 $D^{JJ'}$ 都是 Lorentz 群 $Lp$ 的表示,并且都是不可约的.

在纯空间转动变换下,$D^{JJ'} = D^{J} \otimes D^{J'} = \Sigma_{l\oplus} D^{J-l}$.

($l$: $-J'$, $-J'+1$,$\cdots J'$ 若 $J \geqslant J'$).

$D^{JJ'}$ 当 $S = J + J'$ 为整数时叫张量表示,可描述最大自旋为 $S$ 的玻色子.

$D^{JJ'}$ 当 $S = J + J'$ 为半整数时叫旋量表示,可描述最大自旋为 $S$ 的费米子.

## §1.2 旋量微分

最基本的微分运算是梯度运算,在闵可夫斯基时空中,梯度运算是一个矢量算符,利用 2 级混合旋量 $U_{a\dot{b}}$ 与矢量 $\psi_a$ 之间的关系

$$u = \sqrt{2}\,T^{-1}\psi$$

可由矢量微分算符 $\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ 定义旋量微分算符

$$(\partial_{a\dot{b}}) = (\partial_{1\dot{1}}, \partial_{1\dot{2}}, \partial_{2\dot{1}}, \partial_{2\dot{2}}),$$

即

$$(\partial_{a\dot{b}}) = \sqrt{2}\,T^{-1}\partial.$$

或