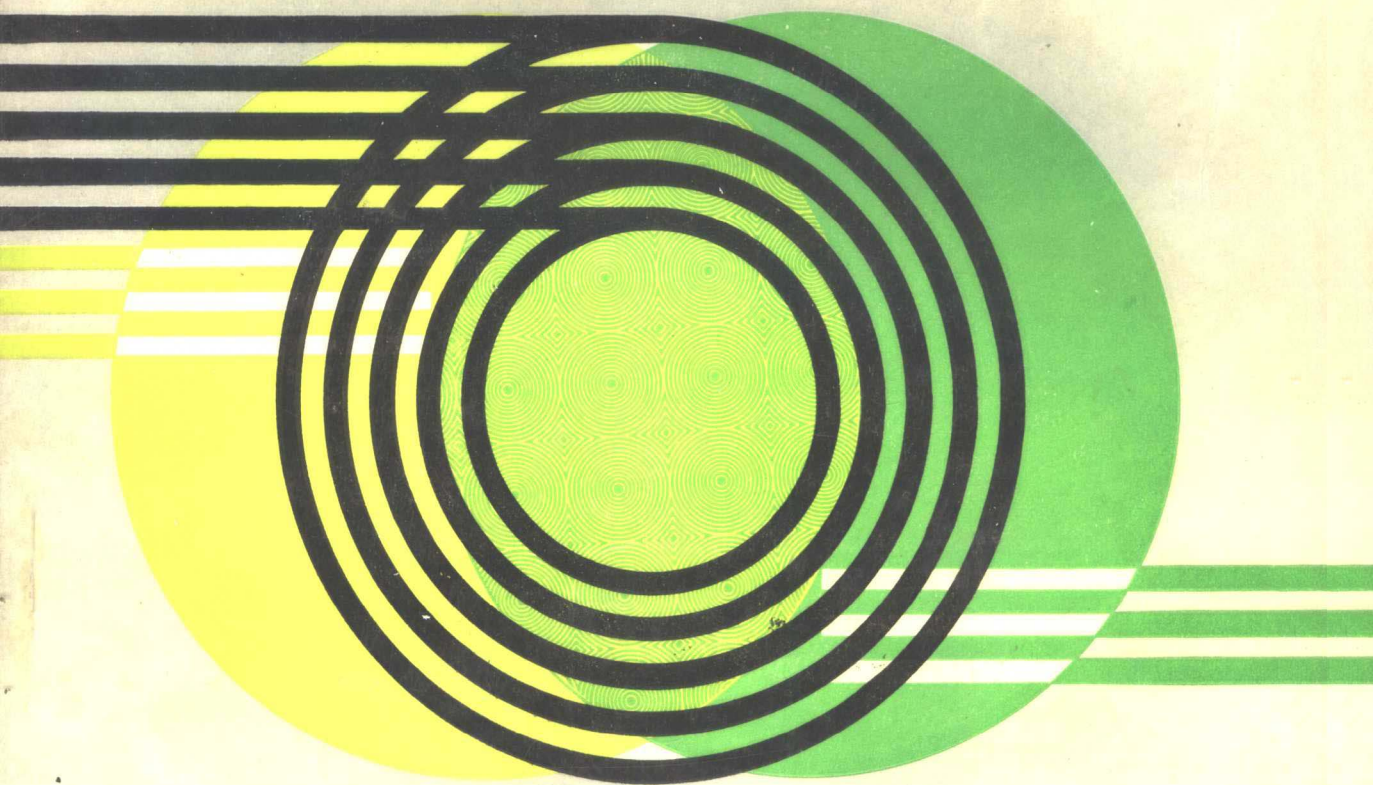


# 电子储存环物理

金玉明 编



中国科学技术大学出版社

# 电子储存环物理

金玉明 编

中国科学技术大学出版社

1994·合肥

(皖)新登字 08 号

图书在版编目(CIP)数据

电子储存环物理 / 金玉明 编—合肥: 中国科学技术大学出版社, 1994 年 3 月  
ISBN 7-312-00583-7

I 电子储存环……

II 金玉明 编

III ①加速器②储存环③大学教学

IV O

凡购买中国科大版图书, 如有白页、缺页、倒页者由本社出版部负责调换

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本: 787×1092/16 印张: 6 字数: 140 千

1994 年 3 月第 1 版, 1994 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1-2000 册

ISBN7-312-00583-7/O·143 定价: 5.00 元

# 前 言

本书是为中国科学技术大学加速器专业研究生编写的教材。作者曾为中国科学技术大学加速器专业七八级、八一级、八二级、八三级、八五级、八九级研究生讲授过这些内容，本书就是在作者的讲义的基础上修改而成的。

本书着重介绍电子储存环的基本理论，内容包括储存环的粒子动力学、辐射阻尼和激发、束团尺寸、束流寿命、磁铁公差及轨道校正、束流发射度及光源亮度、束流不稳定性。书中的许多公式不仅对储存环的设计是很有用的，而且对利用电子储存环的同步辐射做实验研究也是有参考价值的。

电子储存环作为高能物理和同步辐射研究的工具最近十几年来有了蓬勃的发展。我国也在八十年代末到九十年代初先后建成了三台电子储存环，即北京的正负电子对撞机 (BEPC)、合肥的专用同步辐射光源 (HLS) 和台湾新竹的第三代同步辐射光源 (SRRC)。因此，在我国电子储存环将会日益被人们熟悉，希望本书对那些想了解电子储存环的人们也有所裨益。

作者在此对审阅本书全部稿件的徐建铭先生及曾经支持和帮助出版的同事们表示衷心的感谢。

因为本书要赶上九三级研究生使用，时间仓促，错误和不足之处一定不少，衷心希望读者批评指正。

编 者

1993 年 12 月于合肥

# 目 次

前言 .....	(1)
第一章 绪言 .....	(1)
§ 1.1 电子储存环的发展历史和现状 .....	(1)
§ 1.2 高能物理实验用储存环 .....	(1)
§ 1.3 同步辐射专用储存环 .....	(3)
第二章 电子储存环的粒子动力学 .....	(7)
§ 2.1 粒子的横向运动 .....	(7)
§ 2.2 横向振荡的特性 .....	(12)
§ 2.3 动量分散函数 $\eta$ .....	(18)
§ 2.4 粒子的纵向运动——能量振荡 .....	(21)
第三章 辐射阻尼和辐射激发 .....	(33)
§ 3.1 同步辐射的能量损失 .....	(33)
§ 3.2 能量振荡的阻尼 .....	(34)
§ 3.3 横向振荡的阻尼 .....	(39)
§ 3.4 辐射阻尼的时间常数和衰减分配数 .....	(44)
§ 3.5 辐射激发 .....	(45)
第四章 束团尺寸 .....	(51)
§ 4.1 束团宽度 .....	(51)
§ 4.2 束团高度 .....	(56)
§ 4.3 束团长度 .....	(59)
§ 4.4 横向振荡耦合时的束团尺寸 .....	(59)
第五章 束流寿命 .....	(62)
§ 5.1 束流的量子寿命 .....	(62)
§ 5.2 束流的托歇克(Thouschek)寿命 .....	(68)
第六章 磁铁公差及轨道校正 .....	(74)
§ 6.1 二极场的误差及闭轨畸变 .....	(74)
§ 6.2 梯度误差及工作点和 $\beta$ 函数的变化 .....	(75)
§ 6.3 轨道校正 .....	(77)
§ 6.4 色品及其校正 .....	(78)
第七章 束流发射度及光源亮度 .....	(80)
§ 7.1 束流发射度 .....	(80)
§ 7.2 同步辐射光源的亮度(Brightness) .....	(81)
第八章 束流不稳定性 .....	(82)

§ 8.1 束流不稳定性的分类及其产生的机理 .....	(82)
§ 8.2 克服束流不稳定性的方法 .....	(86)
附录 I 正在运行和建造中的储存环同步辐射光源 .....	(87)
附录 II 常用物理常数表 .....	(89)
参考文献 .....	(90)

# 第一章 绪 言

## § 1.1 电子储存环的发展历史和现状

电子储存环是储存高速电子束流的设备。在储存环中电子可以长时间地（几个小时甚至几十小时）作回旋运动，也可以把电子加速到更高的能量。所以储存环也是一种加速器，有人称它为储存环加速器。

电子储存环是加速器技术发展史上的一个飞跃，首先是由于粒子物理实验的需要而发展起来的。现在正步入它蓬勃发展的新时期。

1963年在法国奥赛(Orsay)建成了第一台电子储存环，并首先进行了正负电子对撞的实验。两年后，1965年普林斯顿—斯坦福储存环也开始运行，并进行了高能物理的实验。此后，世界上陆陆续续出现了十多台正负电子对撞机为高能物理实验服务。另一方面，同步辐射的研究工作也在对撞机储存环上逐步开展起来。同步辐射的研究开始是在那些做高能物理研究的储存环上寄生工作的。1968年美国威斯康星大学的240MeV电子储存环作为专用的同步辐射光源开始工作以后，七十年代专用同步辐射的电子储存环陆续出现。目前世界上正在作为同步辐射光源运行的电子储存环有34台，正在建造的有12台（详见附录I）。

## § 1.2 高能物理实验用储存环

由于高能物理发展的需要，要求加速器提供的粒子的能量越来越高，因而加速器的规模和尺寸越来越大，建造费用也越来越高。现代的高能加速器，其规模是很大的，周长以公里计，所用的钢铁以万吨计，投资以亿元计。以目前正在运行的世界上能量最高的两台加速器为例：一台是美国费米国家实验室(NAL)的500GeV的质子同步加速器；另一台是西欧核子研究中心(CERN)的400GeV的质子同步加速器。这两台加速器都是七十年代建成的，其规模如下：

实验室	加速器名称	能量(GeV)	平均直径(km)	铁重(吨)	铜重(吨)	投资(US\$)	建成时间
费米国家实验室	NAL	500	2.0	9000	850	2.3亿	1972年
西欧核子研究中心	SPS	400	2.2	13500	1400	5.3亿	1976年

虽然高能加速器仍在不断的发展中，如采用超导技术可以在相同的尺寸下把能量大大提高。象上面提到的NAL，在原加速器上加了一个超导磁体环已经把能量提高到1000GeV。但是应该看到高能加速器的发展将会受到规模和投资上越来越大的限制。

对撞机的出现打破了同步加速器的能量的限制，可以使加速器往超高能发展。

### 1.2.1 有效作用能

两个粒子之间的有效作用能，等于该两粒子在它们的质心系统中的动能之和。一个在实验室坐标系中以速度  $v$  运动的粒子去轰击在实验室坐标系中静止的同种粒子，则两粒子间的有效作用能比运动粒子的动能（在实验室坐标系中的动能）要小得多，因为有一部分要转化为质心系统中的动能。

设运动粒子的动能为  $W$ ，静止靶粒子的能量为  $E_0$ ，当  $W \gg E_0$  时，有效作用能为<sup>[1]</sup>

$$T_E \approx \sqrt{2E_0 W} \quad (1.1)$$

有效作用能  $T_E$  与动能的平方根成正比。而两个以同样速度作相对运动的同类粒子相对撞时，由于这两个粒子的质心系中心对实验室系统是静止的，因而这两个粒子间的有效作用能为两者在实验室坐标系中动能之和，即

$$T_E = 2W \quad (1.2)$$

例如两束 30GeV 的质子对撞，其有效作用能相当于 2000GeV 的质子去轰击静止的质子。2.5GeV 的正负电子对撞机相当于 25000GeV 的正电子去打静止的电子。因为电子的静止质量小，所以对撞作用对电子特别有利。这就是为什么目前世界上的对撞机大多数都是电子对撞机的缘故。建造一台 25000GeV 的电子同步加速器几乎是不可能的事，而 2.5GeV 的正负电子对撞机则已成为成熟的技术了。这也就是为什么七十年代正负电子对撞机得以迅速发展的原因。

### 1.2.2 对撞机的亮度(Luminosity)

对撞机的亮度被定义为<sup>[2]</sup>

$$L = f \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_x^* \sigma_z^*} \quad (1.3)$$

式中的  $f$  是粒子的回转频率， $N_1$  和  $N_2$  是两个对撞束团的粒子的数目， $\sigma_x^*$ 、 $\sigma_z^*$  分别为对撞点处束团的半宽度和半高度。如果两束团的粒子数相同，即  $N_1 = N_2$ ，则

$$L = f \frac{N^2}{4\pi \sigma_x^* \sigma_z^*} \quad (1.4)$$

亮度是表征在对撞机里发生对撞的几率的一个量。它是单位时间单位反应截面内所产生的反应事例数，单位为厘米<sup>-2</sup>·秒<sup>-1</sup>

从 (1.3) 式可以看出，亮度是与两束团的粒子数成正比，而与对撞点的束团截面尺寸成反比的。为了提高亮度，必须积累较多的粒子数，或减小对撞点的束团的截面尺寸。但是无论提高流强（即增加粒子数），或者减小束团的截面尺寸，都会受到各种限制。如流强的提高受到束流不稳定性限制，而束团截面尺寸的减小则又受到对撞区的  $\beta$  函数值的限制。



在对撞机中，亮度只能优化在某一设计能量  $E_T$  上。大于或小于这个设计能量，亮度都会迅速下降。当高于设计能  $E_T$  时，流强主要受到高频功率的限制。假设高频腔对每个束流提供的功率为  $P_{rf}$ ，每个粒子每回转一圈所辐射的能量为  $U_0$ ，则该束流中可能的最大粒子数为

$$N_{\max} = P_{rf} / fU_0 \quad (1.5)$$

式中的  $f$  为电子的回转频率。由于  $U_0$  是正比于能量的四次方的，所以  $N_{\max} \propto E^{-4}$ ；同时因为  $\sigma_x^* \sigma_z^* \propto E^2$ ，所以在高于  $E_T$  的能区， $L \propto E^{-10}$ 。但是在低于  $E_T$  的能区，主要是由于束束相互作用，亮度也会迅速下降。在两个束团对撞时，一个束团中的粒子将会受到另一个束团中的粒子所产生的电磁场的作用而产生频移的现象。当频移超过某一值后，将会导致束流的大量损失。所产生的线性频移值为

$$\Delta v_x = \frac{Nr_e \beta_x^*}{2\pi\gamma\sigma_x^* (\sigma_x^* + \sigma_z^*)} \quad (1.6)$$

$$\Delta v_z = \frac{Nr_e \beta_z^*}{2\pi\gamma\sigma_z^* (\sigma_x^* + \sigma_z^*)} \quad (1.7)$$

从上面两式不难导出  $N_{\max} \propto E^2$ ，所以  $L \propto E^4$ 。因此在低于  $E_T$  的能区，亮度是随能量的四次方下降的（见图 1.1）。

### § 1.3 同步辐射专用储存环

电子储存环不但是高能物理研究的重要工具，也是同步辐射研究的重要设备。目前不仅绝大多数对撞机都兼做同步辐射的研究工作，而且专用于同步辐射的电子储存环从七十年代后也陆续建成。目前正在运行的 20 台电子储存环中有 12 台是专用于同步辐射研究的，其中八十年代初建成的有 6 台（见附录 I）。这些新建成的同步辐射光源的特点是：第一，能量在 0.7GeV 到 2.5GeV 之间，特征波长在几埃

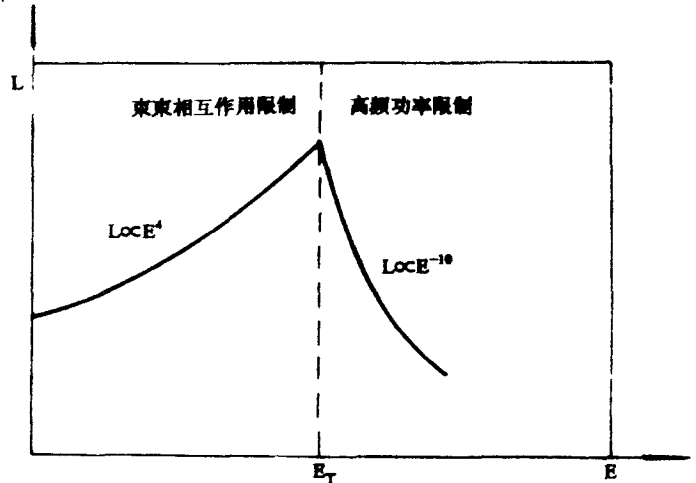


图 1.1 亮度与能量的关系曲线示意图

到几十埃之间，即可使用的波长在真空紫外，软 X 射线，硬 X 射线的范围内；第二，流强大，在几百毫安到 1 安之间；第三，计划安装超导扭摆磁铁(Wiggler)以获得更短波长的辐射，或安装波荡器以获得更强的辐射光。

### 1.3.1 同步辐射原理

大家知道，带电粒子在作加速运动时会辐射电磁波，并损失其能量。高能电子在磁场中作圆周运动时，由于是在作向心加速运动，所以会以光的形式辐射能量。因为这种辐射是首先在电子同步加速器中观察到的，所以人们称它为“同步加速器辐射”，简称为“同步辐射”，或“同步光”。而专门以生产这种辐射为目的的电子储存环叫做“光子工厂”。又因为辐射是电子与同步加速器或储存环的磁场相互作用产生的，所以有人也称它为“同步磁辐射”，或者“磁致辐射”。

当一个相对论性电子作圆周运动时，它每圈辐射的能量为

$$U_0 = 8.85 \times 10^{-32} \frac{E^4}{R} \quad (1.8)$$

式中  $E$  是电子的能量，用电子伏作单位； $R$  是电子轨道的曲率半径，用米作单位。所计算得到的  $U_0$  的单位仍为电子伏。从上式可看出当电子轨道的曲率半径不变时，电子每圈辐射的能量是随电子的能量的四次方增加的。例如在一个能量为 400MeV，曲率半径为 1.33 米的电子储存环中，一个电子在其中每回旋一圈所辐射的能量为 1.7keV。而在一个能量为 4GeV，电子轨道的曲率半径为 12.7 米的电子储存环中，一个电子每回旋一圈所辐射的能量达 1.785MeV！

如果有  $N_0$  个电子在储存环中作回旋运动，回旋频率为  $f_c$ ，则总的辐射功率为

$$P_r = f_c N_0 U_0 \quad (1.9)$$

同步辐射的光谱是连续谱，它的强度是波长  $\lambda$  的函数，可用下式计算<sup>[1]</sup>：

$$N(\lambda) = 7.86 \times 10^{11} J(\text{mA}) \frac{[E(\text{GeV})]^7}{[\rho(\text{m})]^2} \lambda(\text{\AA}) \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^3 \cdot \int_{\lambda_c/\lambda}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta \quad (1.10)$$

式中的  $N(\lambda)$  为光通量，它是沿电子轨道的切线方向 1 毫弧度的水平角中在 1 埃的范围内每秒发射的波长为  $\lambda$  的光子数； $J$  为储存环中的循环电流； $E$  为电子的总能量； $\rho$  为发射点的电子轨道的曲率半径； $\lambda_c$  为特征波长； $K_{5/3}(\eta)$  为第二类分数阶的修正贝塞耳函数。

特征波长是由电子的能量和电子轨道的曲率半径决定的。它被定义为

$$\lambda_c = \frac{4\pi}{3} \rho \gamma^{-3} \quad (1.11)$$

式中的  $\gamma$  为电子的相对能量， $\gamma = E / mc^2$ ， $E$  为总能量， $mc^2$  为电子的静止能量。

### 1.3.2 同步辐射的特性

同步辐射具有以下特性：

1. 辐射光强度大：能量为几个 GeV 的电子储存环（储存电流为几百毫安）的平均辐射功率可达 100 千瓦的数量级，而最大的旋转靶 X 光机的平均辐射功率仅 10 瓦左右。因此，同步辐射的功率是人们熟知的 X 光机的 10000 倍左右。同步辐射是一种极强的光源。

2. 光谱连续而且范围宽：同步辐射是非束缚态电子的辐射，所以它的光谱是连续

的，并且非常宽广，从红外、可见光、紫外、真空紫外、软 X 射线，直到硬 X 射线。利用各种单色仪，它可以成为波长连续可调的光源。这是激光光源和 X 光机光源做不到的。

3. 方向性好：当电子的速度接近光速时，辐射是一个沿着电子运动的切线方向的光锥。光锥的半张角为

$$\psi_{1/2} = \frac{mc^2}{E} = \frac{1}{\gamma} \quad (1.12)$$

一个能量为 500MeV 的电子储存环， $\psi_{1/2} \sim 1$  mrad，已接近平行束，可与激光的方向性相比拟了。当能量更高时，方向性更好。

4. 高度偏振：同步辐射在电子轨道平面内是完全偏振的光，偏振度达到 100%；离开轨道平面，则偏振度迅速下降。

5. 脉冲的时间结构：由于在同步加速器和储存环中自动稳相的结果，电子都聚集在平衡相角附近，成为一团一团的。束团的个数，就是高频的谐波数。这些一团团的电子束在发光时就得到一个一个一个的光脉冲。束团很短，因而辐射的脉冲宽度很小，短的可达 0.1 纳秒，甚至更短的可达几十皮秒，而脉冲的时间间隔则为几十纳秒，或更长。

6. 真空清洁：由于同步辐射是在超高真空（储存环的真空度为  $10^{-9}$ – $10^{-10}$  托）或高真空（同步加速器的真空度为  $10^{-6}$ – $10^{-8}$  托）的条件下获得的，又没有普通光源中的电极溅射问题，所以同步辐射是一种十分洁净的光源。

7. 波谱可以准确计算：同步辐射的波谱可根据储存环的参数按照式(1.10)准确计算，这是别的光源很难做到的。因此它可以作为一种标准光源来校准光学仪器或定标别的光源。

### 1.3.3 同步辐射的应用

由于同步辐射具有上述一系列优良特性，所以在许多种学科中得到广泛的应用。它的应用不仅遍及物理学、化学、生物学等基础学科，而且活跃在材料科学、表面科学、计量科学、医学、显微技术、超大规模集成电路的光刻等技术领域。举例说明如下：

1. 生物学：可用同步辐射来研究蛋白质以及蛋白质分子的结构。因为同步辐射强度大，可使实验时间大大缩短。例如过去对复杂蛋白质分子的测定需几个月的时间，利用同步辐射则只需要一两天就可完成。同时还因为同步辐射的脉冲时间结构，可以用来研究一些动态过程。例如肌肉的收缩、神经的活动、晶体的生长等动态过程。

2. 固体物理：使用同步辐射来研究晶体的结构比起普通 X 光机来具有实验时间短、信噪比高的优点。例如为完成一个晶体结构分析实验，用普通 X 光机需两个星期，信噪比为 300: 1；而用同步辐射只需要 30 分钟，信噪比为 10000: 1。

3. 表面科学：利用测光电子能谱来研究固体的表面和界面的物理、化学性质。这方面的研究工作极其广泛，而且很有实用价值。如对催化剂进行催化机理方面的研究；而对固体表面的吸附、氧化、腐蚀的机理的研究对于金属防腐蚀很有意义。

4. 光谱学：这个领域的工作很多，如原子光谱、分子光谱、荧光光谱等。同步辐射的应用最早就是从这方面的工作开始的。如用同步辐射完成的第一个实验就是氦原子(He)的吸收光谱(200 Å)，此后，氩原子(Ar)、氧分子(O<sub>2</sub>)、氮分子(N<sub>2</sub>)、一氧化碳分子(CO)等

的光谱也陆续用同步辐射做出来了。

5. 结构化学和光化学：可应用 X 射线吸收谱测量特定原子的配位结构、大分子之间的化学键等。光化学方面，则可使用同步光进行高电子激发态的分子的化学反应，分子离子的反应等研究工作。

6. 医学：利用同步辐射强度大的特点，使用广延 X 射线吸收边精细结构技术进行心血管或脑血管造影，可作为一种诊断心血管或脑血管病变的重要手段。

7. 超大规模集成电路的光刻：在集成电路的制造工艺上，目前广泛使用紫外光，通过掩膜进行光刻。由于衍射效应，线宽最小约 2 微米左右。若采用同步辐射进行光刻则线宽可缩小一两个数量级，集成度可提高 2-3 个数量级。这就为制造超大规模集成电路创造了条件。

## 第二章 电子储存环的粒子动力学

我们这里所使用的理论和公式都是建立在单粒子动力学的基础上的，即不考虑粒子之间的相互作用。为了处理问题方便，在实际运算中又作了线性近似。同时我们认为磁场是无缺陷的理想场。本章要讨论的是粒子的横向运动（即垂直粒子前进方向的运动）和纵向运动（即沿着粒子前进方向的运动）。采用自然坐标系 $(x, z, s)$ (如图 2.1 所示)。

### § 2.1 粒子的横向运动

在自然坐标系中，我们假定坐标轴 $s$ 与储存环中电子的平衡轨道相重合。 $x$ 轴位于电子运动轨道平面内，垂直于 $s$ 轴，并与轨道的曲率半径方向一致。 $z$ 轴为垂直于电子轨道平面。因此 $x$ 、 $z$ 、 $s$ 是彼此垂直的。

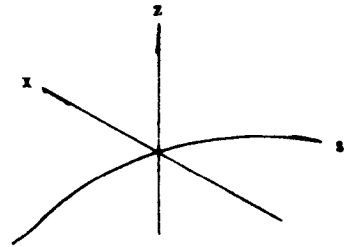


图 2.1 自然坐标系

现代的电子储存环都是属于分离作用强聚焦结构，所以我们以后不作特别声明时无疑是指的分离作用强聚焦结构。

所谓电子的横向运动是指电子在垂直于 $s$ 轴的运动。我们从加速器物理中知道粒子的横向运动是一种自由振荡运动。运动方程可以从洛伦兹力得到。当忽略了高次项时，可取下面的形式<sup>[4]</sup>：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + \left[ \frac{1}{\rho^2(s)} + K(s) \right] x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta P}{P} \\ \frac{d^2 z}{ds^2} - K(s)z = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

式中 $\rho(s)$ 是轨道的曲率半径。 $K(s) = \frac{ec}{E_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}$ 是元件的聚焦函数。它们都是轨道坐标 $s$ 的函数。 $\Delta P / P$ 是动量散度。容易看出，式(2.1)是两个振荡方程。

#### 2.1.1 横向振荡的稳定性

当我们讨论电子的横向振荡时，可先令 $\Delta P / P = 0$ 。于是式(2.1)的两个方程可以取相同的形式：

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = 0 \quad (2.2)$$

这个方程叫希尔(Hill)方程。它是一个具有周期性的振荡方程。由于在储存环中平衡轨道是闭合的，因此 $K(s)$ 是一个以机器的周长为周期的周期函数。如果一个机器具有若干磁周期结构，那末 $K(s)$ 还应该满足周期性条件，即

$$K(s+L) = K(s) \quad (2.3)$$

此处  $L$  是周期或超周期的长度。

我们使用矩阵法来解希尔方程 (2.2)。这常常是十分简便而且很实用的。任何一个二阶微分方程如 (2.2) 的解都可写成：

$$\begin{cases} y(s) = ay(s_0) + by'(s_0) \\ y'(s) = cy(s_0) + dy'(s_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

式中  $y(s_0)$  和  $y'(s_0)$  为  $s_0$  处的  $y$  和  $y'$  值。

我们把式 (2.4) 写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix} = M(s/s_0) \begin{bmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

此处

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

是一个变换矩阵，它仅仅取决于  $s_0$  和  $s$  之间的函数  $K(s)$ 。在分离作用聚焦结构中， $K(s)$  为分段常数。对于聚焦元件、散焦元件、自由空间、边缘场等的表达式是不同的，但都十分简单。

当  $K(s)$  为正常数时（聚焦节），变换矩阵为

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\varphi \\ -\sqrt{K} \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

这里的  $\varphi = \sqrt{K}(s-s_0)$ ， $s-s_0$  为元件的长度。当  $K(s)$  为负常数时（散焦节），变换矩阵也可方便地写成

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} \cosh\psi & \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh\psi \\ \sqrt{-K} \sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

此处  $\psi = \sqrt{-K}(s-s_0)$ 。对于  $K(s) = 0$ （即自由空间），则

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} 1 & s-s_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$s-s_0$  为自由空间的长度。对于扇形弯铁，水平方向的变换矩阵是

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

式中  $\theta$  为扇形铁之张角， $\rho$  为电子轨迹的曲率半径（图 2.2）。扇形铁的垂直方向相当于自由空间。对于边缘场，水平方向的变换矩阵为

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\text{tg}\varepsilon}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

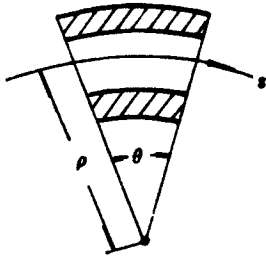


图 2.2 扇形弯铁

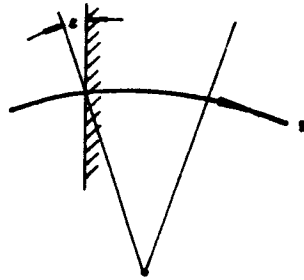


图 2.3 边缘场

式中  $\varepsilon$  为磁铁端面的法线与粒子入射方向之间的夹角。同样边缘场的垂直方向的变换矩阵为

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\text{tg}\varepsilon}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

显而易见，任何一个区间的矩阵是该区间中每个子区间的矩阵的乘积，即

$$M(s_2/s_0) = M(s_2/s_1)M(s_1/s_0) \quad (2.13)$$

因此，当我们知道了从  $s_0$  到  $s_0 + L$  一个周期内的一系列变换矩阵  $M(s_1/s_0)$ 、 $M(s_2/s_1)$ 、 $M(s_3/s_2)$ 、……、 $M(s_0 + L/s_n)$  后，就可以得到整个周期的变换矩阵：

$$M(s_0 + L/s_0) = M(s_0 + L/s_n)M(s_n/s_{n-1}) \cdots M(s_2/s_1)M(s_1/s_0) \quad (2.14)$$

令

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = M(s_0 + L/s_0) \quad (2.15)$$

则不难证明，这个矩阵的行列式等于  $1^{[1]}$ ，即

$$\text{Det}M = 1 \quad (2.16)$$

另一方面，任何一个行列式为 1 的矩阵，特别是具有周期性的  $M$  矩阵一定可以写成<sup>[5]</sup>

$$M = \begin{bmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

于是我们就有

$$\begin{cases} \cos\mu + \alpha\sin\mu = m_{11} \\ \beta\sin\mu = m_{12} \\ -\gamma\sin\mu = m_{21} \\ \cos\mu - \alpha\sin\mu = m_{22} \end{cases} \quad (2.18)$$

从上式我们可以得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2\sin\mu} \\ \beta = \frac{m_{12}}{\sin\mu} \\ \gamma = -\frac{m_{21}}{\sin\mu} \\ \cos\mu = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \end{cases} \quad (2.19)$$

此处  $\beta(\beta_x, \beta_y)$  是粒子横向振荡的振幅函数,  $\mu(\mu_x, \mu_y)$  是粒子每经过一个周期  $L$  的相角改变量。

如果整个储存环是由  $N$  个周期组成的, 则粒子在储存环中回旋一周时的相移为  $N\mu$ 。我们定义

$$\nu = \frac{N\mu}{2\pi} \quad (2.20)$$

则  $\nu(\nu_x, \nu_y)$  为粒子每回旋一圈时的横向振荡数, 或者说横向振荡频率。我们也叫  $\nu_x, \nu_y$  为储存环的工作点。式 (2.19) 中的  $\alpha, \beta, \gamma$  称为 Twiss 参数。

现在我们来证明公式 (2.17)。为了使  $M(s)$  矩阵的矩阵元有一个限制, 我们来考虑它的本征方程。令  $\lambda$  为特征矩阵方程的本征值, 则有

$$My = \lambda y \quad (2.21)$$

因此本征值  $\lambda$  是下面行列式方程的根

$$|\lambda I - M| = 0 \quad (2.22)$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ & (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21} = 0 \\ & \lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

上式中我们已经使用了  $\text{Det}M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$  这个公式。如果我们设

$$\cos\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}M = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \quad (2.24)$$

则



$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\mu + 1 = 0 \quad (2.25)$$

得到式 (2.25) 的两个解为

$$\lambda = \cos\mu \pm i \sin\mu = e^{\pm i\mu} \quad (2.26)$$

从式 (2.24) 可知当

$$\left| \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right| \leq 1 \text{ 时, } \mu \text{ 为实数, 对应于振荡稳定的情况.}$$

$$\left| \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right| > 1 \text{ 时, } \mu \text{ 为虚数或复数, 对应于振荡不稳定的情况.}$$

根据 (2.24) 式的假设, 并且定义  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为

$$\begin{cases} m_{11} - m_{22} = 2\alpha\sin\mu \\ m_{12} = \beta\sin\mu \\ m_{21} = -\gamma\sin\mu \end{cases} \quad (2.27)$$

则  $M$  矩阵可写成

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

这就是我们要证明的。

另外, 我们从 (2.27) 可得到  $\text{Det}M = 1$  的条件变为

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \quad (2.29)$$

同时, 从式 (2.28) 可得到

$$M = I\cos\mu + J\sin\mu \quad (2.30)$$

式中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

为单位矩阵, 而

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

它满足

$$J^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix} = -I \quad (2.33)$$

因此,  $M$  矩阵的  $k$  次幂为

$$M^k = (I\cos\mu + J\sin\mu)^k = I\cos k\mu + J\sin k\mu \quad (2.34)$$

所以, 只要  $\mu$  为实数, 则  $M^k$  的矩阵元都是有界的, 相应于稳定的情况。如果  $\mu$  是虚数时, 则  $M^k$  的矩阵元会指数地增加, 相应于不稳定的情况。

从 (2.32) 式知, 矩阵  $J$  的迹为 0, 而行列式值为 1。因此  $\mu$  值独立于坐标  $s$  的参考点。可以证明如下: