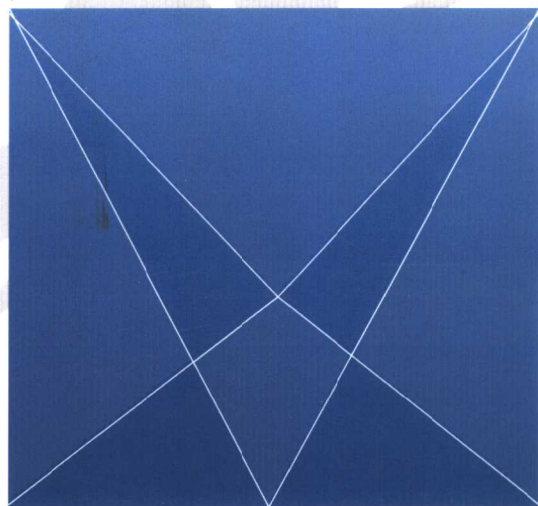




全国计算机技术与软件专业
技术资格（水平）考试指南

计算机数学与 经济管理基础知识

中国系统分析员顾问团 组编

张友生 主编



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试指南

计算机数学与经济管理基础知识

中国系统分析员顾问团 组编

张友生 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书由中国系统分析员顾问团组织编写,作为全国计算机技术与软件专业技术资格(水平)考试中的各级别辅导指定教程。在参考和分析历年考试试题的基础上,着重对新版的考试大纲(2004年修订版)规定的内容有重点地细化和深化,内容涵盖了考试大纲规定的数学和经济管理知识点,书中详尽地分析和解答了1990-2004年各级别考试中有关数学和经济管理方面的试题。

阅读本书,就相当于阅读了一本详细的,带有知识注释的考试大纲。准备考试的人员可通过阅读本书掌握考试大纲规定的知识,掌握考试重点和难点,熟悉考试方法、试题形式,试题的深度和广度,内容的分布,以及解答问题的方法和技巧等。

本书也可作为大学计算机专业的计算机数学和经济管理课程的教材,计算机专业教师的教学和工作参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学与经济管理基础知识 / 张友生主编. —北京:电子工业出版社, 2005.1

(全国计算机技术与软件专业技术资格(水平)考试指南)

ISBN 7-121-00556-5

I. 计… II. 张… III. ①电子计算机—数学基础—工程技术人员—资格考核—自学参考资料 ②计算机应用—经济管理—基本知识 IV. ①TP301.6 ②F2-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 117230 号

责任编辑:高洪霞

技术协作:桂 敏

印 刷:北京东光印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:21.5 字数:520 千字

印 次:2005 年 1 月第 1 次印刷

印 数:6000 册 定价:32.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试指南

编写委员会

组 编：中国系统分析员顾问团

主 编：张友生

副主编：苏永乐 殷建民

编 委：（按姓名拼音排序）

方 伟	黄 青	黄云志	简 亮	雷柏先	刘晓铭
罗永红	马映冰	聂作明	彭世强	漆 英	沈键钢
施 游	田俊国	王 勇	王 巍	万 火	相红利
谢 睿	徐 锋	张峰岭	郑建兵	郑 睿	

出版说明

全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试（以下简称“软考”）是我国人事部和信息产业部领导下的国家级考试，其目的是科学、公正地对全国计算机与软件专业技术人员进行专业技术资格认定和专业技术水平测试。

软考由于其权威性和严肃性，得到了社会及用人单位的广泛认同。考试通过后颁发的资格证书不仅在全国范围内有效，还实现了中日 IT 考试标准的相互认证。此外，中韩有关方面经过 IT 考试互认会谈，在相关问题上也达成一致意见，有望在近期内实现中韩 IT 考试标准的相互认证。中、日、韩 IT 考试互认，将有利于进一步促进 IT 技术和 IT 人才的交流与合作。

然而，软考的难度却比较大，对于广大考生而言，一套优秀的考试指南和参考资料，无异于夜航时导航的灯塔，可以使他们更加明确努力的方向，在短时期内迅速掌握考试要领，从而在解题时做到从容应对，如鱼得水。于是，我们邀请国内资深软考辅导专家，根据多年的理论和实践经验，秉着内容全面、指导性强、例题典型、解析精辟的原则，撰写了这套专门针对软考的丛书。

本套丛书包括“考试指南”和“冲刺指南”两个主题。

“考试指南”在参考和分析历年考试试题的基础上，着重对新版的考试大纲所规定的内容进行了有重点、有针对性的细化和深化，旨在引导广大考生，使备考人员通过阅读本丛书，就可以掌握新版的考试大纲规定的知识，了解内容的分布，熟悉考试方法、试题广度深度和解答技巧。同时，它们对于广大 IT 从业人员及从事于计算机教学工作的老师也有很好的辅助作用。

“冲刺指南”则系统地将历年考试中经常出现的重点、难点进行系统化的归纳与整理，通过大量的图表、以及横纵对比进行有机的组织与总结，并指出每个知识点的历年考题分布情况，分值分布情况，使考生能够更加有针对性地掌握考试方向，有效地完成最后的“冲刺”。

本套丛书由中国系统分析员顾问团组编，作者们不但具有丰富的 IT 项目实践经验，而且具有丰富的备考指导经验，参加了多年的软考阅卷工作，能准确地把握考试的要点和难点，了解考生在学习时会遇到的诸多问题。

由于水平有限和时间仓促，书中难免存在疏漏之处，欢迎广大读者批评指正。对书中内容的勘误，读者可登录 www.broadview.com.cn 网站进行查阅。同时，为进一步鼓励读者积极参与对本书的勘误，我们将对首先发现错误的读者或提供重大建设性意见和建议的读者，赠送纪念品。

有关本丛书的问题，读者也可在中国系统分析员顾问团网站（<http://www.csai.cn>）“技术论坛”中的“CSAI 辅导教程”栏目与作者们进行交流。

问题及意见反馈请发往：

（100036）北京万寿路 173 信箱电子工业出版社 计算机图书事业部 收

或通过电子邮件：

editor@broadview.com.cn jsj@phei.com.cn

电子工业出版社计算机图书事业部

（北京博文视点资讯有限公司）

前 言

全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试是一个难度很大的考试，十多年来，考生平均通过率为 10% 左右。主要原因是考试范围十分广泛，涉及到计算机专业的每门课程，还要加上数学、外语、系统工程、信息化和知识产权等知识，且注重考查新技术和新方法的应用。考试不但注重广度，而且还有一定的深度。特别是高级资格考试（系统分析师），不但要求考生具有扎实的理论知识，还要具有丰富的实践经验。

新的考试大纲（2004 年修订版）对系统分析师、软件设计师、数据库系统工程师和程序员等级别的考试中的数学和经济管理知识做出了明确的规定。本书是为全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试编写的学习用书，内容涵盖了最新的考试大纲规定的所有数学与经济管理知识点，详尽地分析和解答了 1990—2004 年各级别考试中有关数学和经济管理方面的试题。

本书在参考和分析历年考试试题的基础上，着重对新版的考试大纲规定的内容有重点地细化和深化。阅读本书，就相当于阅读了一本详细的，带有知识注释的考试大纲。准备考试的人员可通过阅读本书掌握考试大纲规定的知识，熟悉考试方法、试题形式、试题的深度和广度、内容的分布，以及解答问题的方法和技巧等。

本书不仅对准备参加全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试的读者有很大的作用，而且对从事软件设计工作的 IT 从业人员，计算机教学工作的老师，以及参加其他类似考试的读者也是有帮助的。本书也可作为大学计算机专业的计算机数学和经济管理课程的教材。

本书由中国系统分析员顾问团组编，由张友生主编。第 1 章由刘晓铭编写，第 2 章由王巍编写，第 3、6 章由苏永乐和田俊国编写，第 4、5、8 章由张友生编写，第 7、10 章由殷建民编写，第 9 章由黄青和张友生编写，第 11、12 章由漆英编写，第 13 章由方伟编写。

在本书出版之际，要特别感谢全国计算机技术与软件专业技术资格（水平）考试办公室的命题专家们，编者在本书中引用了部分考试原题，使本书能够尽量方便读者的阅读。同时，本书在编写的过程中参考了许多相关的资料和书籍，在此恕不一一列举（详见各章的主要参考文献），编者在此对这些参考文献的作者表示真诚的感谢。此外，还要特别感谢本书的技术协作桂敏对本书出版所付出的努力。

有关本书的意见反馈和咨询，读者可在中国系统分析员网站（<http://www.csai.cn>）“技术论坛”中的“CSAI 辅导教程”版块与作者进行交流。

由于编者水平有限，且本书涉及的知识点多，书中难免有不妥和错误之处，编者诚恳地期望各位专家和读者不吝指教和帮助，对此，我们将深为感激。

编 者

2004 年 9 月

目 录

第 1 章 数值计算	1
1.1 误差	1
1.2 矩阵和行列式	1
1.2.1 行列式	1
1.2.2 矩阵	3
1.2.3 例题分析	7
1.3 近似求解方程	11
1.3.1 方程的近似解	11
1.3.2 解线性方程组的迭代法	13
1.3.3 例题分析	15
1.4 插值	18
1.5 数值积分	24
1.5.1 数值积分的基本概念	24
1.5.2 牛顿-科茨公式	25
1.5.3 复化求积公式	26
1.5.4 高斯公式	27
主要参考文献	28
第 2 章 组合数学	29
2.1 计数原理基础	29
2.2 排列	29
2.3 组合	31
2.4 多重集的排列和组合	34
2.5 鸽巢原理	36
2.6 容斥原理	37
2.7 例题分析	40
主要参考文献	44
第 3 章 数理逻辑	45
3.1 命题逻辑	45
3.1.1 命题与命题公式	45
3.1.2 命题公式分类与真值函数	49
3.1.3 等值演算	52
3.1.4 联结词的全功能集	54
3.1.5 命题公式的标准形式	55
3.1.6 推理理论	61

3.2	谓词逻辑	65
3.2.1	谓词逻辑的基本概念	66
3.2.2	谓词逻辑的公式及分类	70
3.2.3	谓词逻辑的等值演算	74
3.2.4	谓词逻辑的推理	77
3.3	形式逻辑的基础知识	79
3.3.1	概述	80
3.3.2	性质命题及其推理	82
3.3.3	三段论推理	86
3.3.4	关系命题及其推理	88
3.3.5	基本复合命题及其推理	89
3.4	例题分析	100
	主要参考文献	105
第4章	集合论	106
4.1	集合及运算	106
4.2	关系	108
4.3	函数	113
4.4	例题分析	115
	主要参考文献	122
第5章	代数结构	123
5.1	代数系统的基本概念	123
5.2	半群与群	124
5.2.1	半群	124
5.2.2	群	125
5.3	环与域	126
5.4	例题分析	126
	主要参考文献	131
第6章	形式语言和自动机初步	132
6.1	形式语言和形式文法	132
6.1.1	形式语言	132
6.1.2	形式文法	133
6.1.3	形式文法的分类	138
6.1.4	正则表达式和正则语言	140
6.2	有穷自动机	143
6.2.1	确定型有穷自动机	143
6.2.2	非确定型有穷自动机	145
6.2.3	具有 ϵ 转移的非确定的有穷自动机	147

6.3	有穷自动机和正则文法的等价性	149
6.4	图灵机	151
6.4.1	图灵机的基本模型	152
6.4.2	用图灵机计算函数	156
6.4.3	构造具备子程序功能的图灵机	157
6.5	例题分析	158
	主要参考文献	171
第 7 章	概率论与应用统计	173
7.1	事件和概率	173
7.1.1	事件	173
7.1.2	概率	175
7.2	随机变量和分布函数	178
7.2.1	随机变量和分布函数的定义与性质	178
7.2.2	离散型随机变量	179
7.2.3	连续型随机变量	179
7.2.4	二维随机变量	180
7.2.5	二维离散型随机变量	180
7.2.6	二维连续型随机变量	181
7.2.7	随机变量的独立性	183
7.3	随机变量的数字特征	183
7.3.1	数学期望(均值)	183
7.3.2	方差	184
7.3.3	协方差和相关系数	184
7.4	常用分布	186
7.4.1	0-1 分布	186
7.4.2	二项分布	187
7.4.3	几何分布	187
7.4.4	超几何分布	188
7.4.5	泊松(Poisson)分布	188
7.4.6	均匀分布	189
7.4.7	指数分布	190
7.4.8	正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	190
7.4.9	标准正态分布 $N(0,1)$	191
7.4.10	二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$	192
7.5	概率论应用及数理统计基础	192
7.6	例题分析	193
	主要参考文献	197
第 8 章	运筹学知识	198
8.1	运筹学模型	198

8.2	线性规划	199
8.3	存储论	201
8.4	对策论	204
8.5	决策论	205
8.5.1	决策论概述	205
8.5.2	不确定型决策	206
8.5.3	风险决策	208
8.6	模拟	208
8.7	例题分析	209
	主要参考文献	213

第9章 图论 214

9.1	图的基本概念	214
9.2	图的连通性	218
9.3	图的表示	222
9.3.1	邻接矩阵	222
9.3.2	邻接表	226
9.3.3	图的遍历	226
9.4	树与最小生成树问题	227
9.5	外向树与最优树问题	228
9.6	平面图与着色问题	230
9.7	非平面图与图的边相交数的估计	231
9.8	二部图与匹配问题	232
9.9	网络及最大流问题	233
9.10	图的应用	234
9.10.1	最短路径	234
9.10.2	拓扑排序	236
9.10.3	关键路径	237
9.11	例题分析	238
	主要参考文献	256

第10章 算法及其复杂性 257

10.1	算法的基本概念	257
10.2	常用算法	257
10.2.1	穷举搜索法	257
10.2.2	迭代法	258
10.2.3	递推法	259
10.2.4	递归法	259
10.2.5	分治法 (Divide and Conquer)	261
10.2.6	动态规划法 (Dynamic Programming)	261

10.2.7	回溯法 (Backtracking)	262
10.2.8	贪婪法 (Greedy)	263
10.3	排序算法及其复杂性	264
10.3.1	插入排序	264
10.3.2	选择排序	265
10.3.3	冒泡排序	265
10.3.4	快速排序	265
10.3.5	希尔排序	265
10.3.6	堆排序	266
10.3.7	合并排序	266
10.3.8	外排序	266
10.4	例题分析	267
	主要参考文献	268
第 11 章	管理科学基础	270
11.1	系统论的观点	270
11.2	系统与环境	271
11.2.1	系统工程	272
11.2.2	系统模型与模拟	273
11.3	企业组织结构	274
11.4	组织结构设计	275
	主要参考文献	276
第 12 章	经济相关知识	277
12.1	会计常识	277
12.2	成本常识	278
12.3	会计报表	279
12.3.1	资产负债表	279
12.3.2	损益表	280
12.3.3	利润分配表	281
12.3.4	现金流量表	281
12.4	财务分析	283
12.4.1	财务报表分析	283
12.4.2	基本财务比率	283
12.4.3	杜邦财务分析体系	286
12.4.4	上市公司财务报告分析	287
12.4.5	量本利分析	288
12.5	经济学常识	289
12.5.1	微观经济学	289
12.5.2	宏观经济学	291

12.5.3 经济模型	293
12.6 例题分析	293
主要参考文献	295
第 13 章 IT 审计	296
13.1 概述	296
13.1.1 财务审计	296
13.1.2 IT 审计的产生背景	296
13.1.3 IT 审计的发展历程	297
13.1.4 IT 审计的目标、范围	298
13.1.5 IT 审计的意义	299
13.1.6 小结	300
13.2 IT 审计标准	300
13.2.1 基本框架	300
13.2.2 基本准则	301
13.2.3 具体准则	302
13.2.4 实施指南	303
13.2.5 与相关 IT 标准的关系	304
13.2.6 ISACA	304
13.2.7 中国的相关标准和法律法规	305
13.2.8 小结	306
13.3 IT 审计实施	306
13.3.1 IT 审计实施的生命周期	306
13.3.2 IT 审计项目的人员组织体系	308
13.3.3 IT 审计方法与工具	309
13.3.4 IT 审计计划和审计准备	311
13.3.5 系统规划分析阶段的 IT 审计	312
13.3.6 系统设计开发阶段的 IT 审计	313
13.3.7 系统运行维护阶段的 IT 审计	314
13.3.8 信息系统项目管理规范的 IT 审计	316
13.3.9 小结	318
13.4 IT 审计报告与跟踪	319
13.4.1 IT 审计报告	319
13.4.2 IT 审计跟踪	321
13.4.3 IT 审计的报告和跟踪制度	321
13.4.4 小结	322
13.5 试题分析和讲解	322
13.5.1 案例一	322
13.5.2 案例二	324
13.5.3 小结	325
主要参考文献	325

第1章 数值计算

根据考试大纲,在数值计算方面,要求考生掌握误差、矩阵和行列式、近似求解方程、插值、数值积分等方面的知识。本章将简单地介绍有关知识点,对有关定理和结论,会不加证明地直接引用。

1.1 误差

定义 1.1 设一个数真值为 x^* , $\tilde{x}$ 是它的近似值。称 $e = \tilde{x} - x^*$ 为 $\tilde{x}$ 的**绝对近似误差**, 简称为**误差**。如果存在尽可能小的正数 ε , 使得 $|e| \leq \varepsilon$, 则称 ε 为 $\tilde{x}$ 的**误差限**。 $\frac{e}{x^*} = \frac{\tilde{x} - x^*}{x^*}$ 称为 $\tilde{x}$ 的**相对误差**, 记为 e_r 。在实际计算中, 如果 $\frac{e}{x^*}$ 很小, 则通常取 $e_r = \frac{e}{\tilde{x}} = \frac{\tilde{x} - x^*}{\tilde{x}}$ 。称 $\varepsilon_r = \frac{e}{|x^*|}$ 为**相对误差限**。

定理 1.1 乘积的相对误差是各因子的相对误差之和; 商的相对误差是被除数的相对误差减去除数的相对误差。

定义 1.2 当真值 x^* 有多位数时, 常常按四舍五入的原则得到 x^* 的近似值 $\tilde{x}$ 。若 $\tilde{x}$ 的误差限是某一位的半个单位, 该位到 $\tilde{x}$ 的第一位非零数字共有 n 位, 则称 $\tilde{x}$ 有 n 位**有效数字**。

关于有效数字同相对误差限的关系, 有:

定理 1.2 设 $\tilde{x}$ 的第一位非零数字为 a_1 ,

(1) 若 $\tilde{x}$ 具有 n 位有效数字, 则 $\varepsilon_r \leq \frac{1}{2a_1} 10^{-(n-1)}$;

(2) 若 $\varepsilon_r \leq \frac{1}{2a_1} 10^{-(n-1)}$, 则 $\tilde{x}$ 至少具有 n 位有效数字。

例 1.1 为了使 $\sqrt{20}$ 的近似数的相对误差小于 0.1%, 要取几位有效数字?

解: $\sqrt{20}$ 的第一位数字为 4, 所以 $a_1 = 4$, 于是 $\frac{1}{2a_1} 10^{-(n-1)} = \frac{10^{1-n}}{8} \leq 0.1\% = 10^{-3}$, 显然 $n=4$ 时该式成立。所以应该取 4 位有效数字。

1.2 矩阵和行列式

1.2.1 行列式

1. 行列式的定义

定义 1.3 从数域 F 中任意取 n^2 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$), 排成以下形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{称为 } n \text{ 阶行列式。}$$

定义 1.4 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 如果把 D 的行变为列, 就得到一个新的行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T \text{ 叫做 } D \text{ 的转置行列式。}$$

2. 行列式的性质

- (1) 行列式与它的转置行列式相等。
- (2) 交换一个行列式的两行 (或两列), 行列式改变符号。
- (3) 如果一个行列式有两行 (列) 完全相同, 那么这个行列式等于零。
- (4) 把一个行列式的某一行 (列) 的所有元素同时乘以某一个数 k , 等于以数 k 乘这个行列式。
- (5) 一个行列式中某一行 (列) 所有元素的公因子可以提到行列式符号的外边。
- (6) 如果一个行列式中有一行 (列) 的元素全部是零, 那么这个行列式等于零。
- (7) 如果一个行列式有两行 (列) 的对应元素成比例, 那么这个行列式等于零。

3. 行列式的计算

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} \text{当 } n=1 \text{ 时, } A = a_{11} \\ \text{当 } n > 1 \text{ 时, } A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}, \\ \quad \text{其中 } M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 称为 } a_{ij} \text{ 的余子式,} \\ \quad \text{记 } a_{ij} \text{ 的代数余子式 } A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \text{ 则 } A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \end{cases}$$

例如, 四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 的元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

1.2.2 矩阵

1. 矩阵的定义

定义 1.5 令 F 是一个数域。用 F 的元素 a_{ij} 作成的一个 m 行 n 列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 F 上的一个**矩阵**。 A 也简记做 (a_{ij}) 。为了指明 A 的行数和列数, 有时也把它记为 A_{mn} 或 $(a_{ij})_{mn}$ 。 m 行 n 列矩阵简称为 $m \times n$ 矩阵。特别地, 把一个 $n \times n$ 矩阵叫做一个 n 阶**正方形**, 或 n 阶**矩阵**。

定义 1.6 元素全是零的矩阵叫做**零矩阵**, 记做 0 。

定义 1.7 如果矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$, 我们就把矩阵 $(-a_{ij})_{mn}$, 叫做 A 的**负矩阵**, 记为 $-A$ 。

定义 1.8 如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{nn}$, 满足 $a_{ij} = a_{ji}$, 其中 $i, j = 1 \cdots n$, 则称 A 为**对称矩阵**; 如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{nn}$, 满足 $a_{ij} = -a_{ji}$, 其中 $i, j = 1 \cdots n$, 则称 A 为**反对称矩阵**。

定义 1.9 形式为 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$ 的矩阵, 其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 是数, 通常称为**对角矩阵**,

而形式为 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_l \end{pmatrix}$ 的矩阵, 其中 $A_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵, 通常称为**准对角矩阵**。

定义 1.10 主对角线元素全是 1, 其余元素全是 0 的 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 称为 n

阶**单位矩阵**, 记为 I_n , 或者在不至于引起混淆的时候简单地记为 I 。

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵相等

对于 F 上的两个矩阵, 只有在它们有相同的行数和列数, 并且对应位置上的元素都相等时, 才认为这两个矩阵相等。

(2) 矩阵的线性运算

定义 1.11 数域 F 的数 k 与 F 上的一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$ 的乘法 kA 指的是 $m \times n$ 矩阵 $(ka_{ij})_{mn}$ 。

定义 1.12 两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$ 的和 $A+B$ 指的是 $m \times n$ 矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})_{mn}$ 。

注意, 我们只能把行数相同, 列数也相同的两个矩阵相加。

矩阵线性运算的规律:

$$\begin{aligned} A+B &= B+A \\ (A+B)+C &= A+(B+C) \\ 0+A &= A \\ A+(-A) &= 0 \\ k(A+B) &= kA+kB \\ (k_1+k_2)A &= k_1A+k_2A \\ k_1(k_2A) &= (k_1k_2)A \end{aligned}$$

这里 A , B 和 C 表示任意 $m \times n$ 矩阵, 而 k, k_1, k_2 表示数域 F 中的任意数。

利用负矩阵定义, 我们定义矩阵的减法如下: $A-B=A+(-B)$, 于是有 $A+B=C \Leftrightarrow A=C-B$ 。

(3) 矩阵的乘法运算

定义 1.13 数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$ 与 $n \times p$ 矩阵 $B = (b_{ij})_{np}$ 的乘积 AB 指的是这样的一个 $m \times p$ 矩阵: 第 i 行第 j 列 ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, p$) 的元素 c_{ij} 等于 A 的第 i 行的元素与 B 的第 j 列的对应元素的乘积的和, 即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

注意, 两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘。

例如:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-5) & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的运算规律:

- ① 对于数的乘法成立的运算规律, 对于矩阵的乘法并不都成立。
- ② 矩阵的乘法满足结合律, 但不满足交换律。
- ③ 矩阵的乘法和加法还满足分配律, 即 $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$ 。